PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

TEORIA y
760 problemas
resueltos

MURRAY R.
SPIEGEL

SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM

TEORIA Y PROBLEMAS de PROBABILIDAD y ESTADISTICA

Por:

MURRAY R. SPIEGEL Ph.D.
Antiguo Profesor y Director
del Departamento de Matemáticas
Rensselaer Polytechnic Institute

Traducido por:

JAIRO OSUNA SUAREZ
Bogotá, Colombia

Libros McGraw-Hill

MEXICO PANAMA MADRID BOGOTA SAO PAULO NUEVA YORK
AUCKLAND DUSSELDORF JOHANNESBURG LONDRES MONTREAL NUEVA DELHI
PARIS SINGAPUR SAN FRANCISCO ST. LOUIS TOKIO TORONTO

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.

DERECHOS RESERVADOS

LIBROS McGRAW-HILL DE MEXICO, S. A. de C. V.
Atlacomulco 499-501, Naucalpan de Juárez, Edo. de México.
Miembro de la Cámara Nacional de la Ind. Editorial. Reg. núm. 465

0-07-090922-9

Traducido de la primera edición en inglés de
PROBABLITY AND STATISTICS

2345678901 CC-76 7123456987

Impreso en México Printed in Mexico

Esta obra se terminó en enero de 1977
en Litográfica Ingramex, S. A.
Centeno 162, Col. Granjas Esmeralda,
México 13, D. F.

Se tiraron 15 800 ejemplares.

Prólogo

El importante y fascinante tema de la probabilidad comenzó en el siglo XVII con los esfuerzos de matemáticos como Fermat y Pascal en resolver preguntas relacionadas con los juegos del azar. Hasta el siglo XX se desarrolla una teoría matemática rigurosa basada sobre axiomas, definiciones y teoremas. Con el correr de los años, la teoría de probabilidad encuentra su cauce en muchas aplicaciones, no solamente en ingeniería, ciencias y matemáticas sino también en campos como la agricultura, la administración de empresas, la medicina y la sicología. En muchos casos las aplicaciones contribuyen al desarrollo ulterior de la teoría.

El tema de la estadística se originó con anterioridad al de probabilidad, trata principalmente de la colección, organización y presentación de los datos en tablas y gráficos. Con el advenimiento de la probabilidad se puso de manifiesto que la estadística podría emplearse en la extracción de conclusiones válidas y en la toma de decisiones razonables sobre la base del análisis de datos, por ejemplo en la teoría de muestreo y predicción.

El propósito del libro es presentar una introducción moderna a la probabilidad y la estadística suponiendo un conocimiento del cálculo. Por conveniencia el libro se divide en dos partes. La primera trata con probabilidad (y en sí puede utilizarse como introducción al tema) y la segunda trata con estadística.

El libro se diseñó para utilizarse como texto de un curso formal en probabilidad y estadística o como suplemento a los textos típicos. También es de considerable valor como libro de referencia para investigadores o para aquellos interesados en el tema. El libro puede emplearse para un curso anual o mediante una selección juiciosa de los temas para un curso semestral.

Agradezco al Ejecutor Literario del Sir Ronald A. Fisher, F. R. S., al doctor Frank Yates, F. R. S., y a Longman Group Ltda., Londres, por el permiso para utilizar la tabla III de su libro *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* (6a. edición, 1974). Deseo aprovechar esta oportunidad para agradecer a David Beckwith por su sobresaliente edición y a Nicola Monti por su habilidad artística.

M. R. SPIEGEL

Septiembre 1975

Contenido

PRIMERA PARTE PROBABILIDAD

SEGUNDA PARTE ESTADISTICA

Pág.

Capítulo 5 TEORIA DE MUESTREO 155

Población y muestras. Inferencia estadística. Muestreo con y sin remplazamiento. Muestras aleatorias. Números aleatorios. Parámetros poblacionales. Estadísticos muestrales. Distribución muestral. Media muestral. Distribución muestral de medias. Distribución muestral de proporciones. Distribución muestral de diferencias y sumas. Varianza muestral. Distribución muestral de varianzas. Caso donde la varianza poblacional se desconoce. Distribución muestral de relaciones de varianzas. Otros estadísticos. Distribuciones de frecuencia. Distribuciones de frecuencia relativa y ojivas. Cómputo de la media, varianza y momentos para datos agrupados.

Capítulo 6 TEORIA DE ESTIMACION 194

Estimas insesgadas y estimas eficientes. Estimas por puntos y estimas por intervalos. Seguridad. Estimas por intervalos de confianza, de parámetros poblacionales. Intervalos de confianza para medias. Intervalos de confianza para proporciones. Intervalos de confianza para diferencias y sumas. Intervalos de confianza para varianzas. Intervalos de confianza para relaciones de varianzas. Estimas de máxima verosimilitud.

Capítulo 7 ENSAYOS DE HIPOTESIS Y SIGNIFICACION.................... 211

Decisiones estadísticas. Hipótesis estadísticas. Hipótesis nula. Ensayos de hipótesis y significación. Errores de tipo I y tipo II. Nivel de significación. Ensayos referentes a la distribución normal. Ensayos de una y dos colas. Ensayos especiales de significación para grandes muestras. Ensayos especiales de significación para pequeñas muestras. Relación entre la teoría de estimación y ensayo de hipótesis. Curvas características de operación. Potencia de un ensayo. Gráficos de control de calidad. Ajuste de las distribuciones teóricas a distribuciones de frecuencia muestrales. Ensayo chi-cuadrado para la bondad del ajuste. Tablas de contingencia. Corrección de Yates para la continuidad. Coeficiente de contingencia.

Capítulo 8 CURVA DE AJUSTE, REGRESION Y CORRELACION.............. 258

Curva de ajuste. Regresión. Método de mínimos cuadrados. Recta de mínimos cuadrados. Recta de mínimos cuadrados en términos de varianzas y covarianza muestrales. Parábola de mínimos cuadrados. Regresión múltiple. Error típico de la estima. Coeficiente de correlación lineal. Coeficiente de correlación generalizado. Correlación gradual. Interpretación probabilística de la regresión. Interpretación probabilística de la correlación. Teoría muestral de la regresión. Teoría muestral de correlación. Correlación y dependencia.

Capítulo 9 ANALISIS DE VARIANZA 306

Propósito del análisis de varianza. Clasificación simple o experimentos de un factor. Variación total. Variación dentro de tratamientos. Variación entre tratamientos. Métodos cortos para obtener variaciones. Modelo matemático lineal para análisis de varianza. Valores esperados de las variaciones. Distribuciones de las variaciones. Ensayo F para la hipótesis nula de medias iguales. Notación para experimentos de dos factores. Variaciones para experimentos de dos factores. Análisis de varianza para experimentos de dos factores. Experimentos de dos factores con repetición. Diseño experimental.

Parte I

PROBABILIDAD

Capítulo 1

Conjuntos y probabilidad

EL CONCEPTO DE CONJUNTO

El concepto de *conjunto* es un pilar fundamental de la probabilidad y la estadística y de la matemática en general. Un conjunto puede considerarse como una colección de objetos, llamados *miembros* o *elementos* del conjunto. En general, mientras no se especifique lo contrario, denotamos un conjunto por una letra mayúscula A, B, C, y un elemento por una letra minúscula a, b. Sinónimos de conjunto son *clase*, *grupo* y *colección*.

Si un elemento a pertenece a un conjunto C escribimos $a \in C$. Si a no pertenece a C escribimos $a \notin C$. Si a y b pertenecen a C escribimos $a, b \in C$. Para que un conjunto sea *bien definido*, como siempre lo supondremos, debemos estar capacitados para determinar si un objeto específico pertenece o no al conjunto.

Un conjunto puede definirse haciendo una lista de sus elementos o, si esto no es posible, describiendo alguna propiedad conservada por todos los miembros y por los no miembros. El primero se denomina el *método de extensión* y el segundo el *método de comprensión*.

EJEMPLO 1.1. El conjunto de las vocales en el alfabeto puede definirse por el método de extensión como $\{a, e, i, o, u\}$ o por el método de comprensión como $\{x \mid x \text{ es una vocal}\}$, léase "el conjunto de los elementos x tales que x es una vocal" donde la línea vertical | se lee "tal que" o "dado que".

EJEMPLO 1.2. El conjunto $\{x \mid x \text{ es un triángulo en un plano}\}$ es el conjunto de los triángulos en un plano. Obsérvese que el método de extensión no puede utilizarse aquí.

EJEMPLO 1.3. Si lanzamos un par de dados comunes los "números" o "puntos" posibles que pueden resultar sobre la cara superior de cada dado son elementos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

SUBCONJUNTOS

Si cada elemento de un conjunto A también pertenece a un conjunto B llamamos a A un *subconjunto* de B, escrito $A \subset B$ ó $B \supset A$ y leído "A está contenido en B" o "B contiene a A" respectivamente. Se sigue que para todos los conjuntos A tenemos $A \subset A$.

Si $A \subset B$ y $B \subset A$ llamamos a A y B *iguales* y escribimos $A = B$. En este caso A y B tienen exactamente los mismos elementos.

Si A no es igual a B, es decir si A y B no tienen exactamente los mismos elementos, escribimos $A \neq B$.

Si $A \subset B$ pero $A \neq B$ llamamos a A un *subconjunto propio* de B.

EJEMPLO 1.4. $\{a, i, u\}$ es un subconjunto propio de $\{a, e, i, o, u\}$.

EJEMPLO 1.5. $\{i, o, a, u, e\}$ es un subconjunto, pero no un subconjunto propio, de $\{a, e, i, o, u\}$, puesto que los dos conjuntos son iguales. Obsérvese que la sola redistribución de los elementos no cambia el conjunto.

EJEMPLO 1.6. Al lanzar un dado los resultados posibles cuando el resultado es "par" son elementos del conjunto $\{2, 4, 6\}$, el cual es un subconjunto (propio) del conjunto de todos los resultados posibles $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

El teorema siguiente es verdadero para cualesquiera conjuntos A, B, C.

Teorema 1-1: Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

CONJUNTO UNIVERSAL Y CONJUNTO VACIO

Para muchos propósitos restringimos nuestra discusión a subconjuntos de algún conjunto específico denominado el *universo del discurso*, o simplemente, *universo*. También se llama el *conjunto* o *espacio universal* y se denota por $\mathcal{U}$. Los elementos de un espacio se llaman los *puntos* del espacio.

Es útil considerar un conjunto que no tiene elementos. Este conjunto se denomina el *conjunto vacío* o *el conjunto nulo* y se denota por $\emptyset$; es un subconjunto de cualquier conjunto.

EJEMPLO 1.7. Un conjunto importante que nos es familiar es el conjunto $\mathcal{R}$ de los *números reales* como $3, -2, \sqrt{2}, \pi$, que pueden representarse por puntos en una *línea real* como el eje x. Si a y b son números reales tales que $a < b$, los subconjuntos $\{x \mid a \leqq x \leqq b\}$ y $\{x \mid a < x < b\}$ de $\mathcal{R}$ (con frecuencia descritos simplemente por $a \leqq x \leqq b$ y $a < x < b$) se denominan *intervalos cerrado* y *abierto* respectivamente. Los subconjuntos tales como $\{x \mid a \leqq x < b\}$ ó $\{x \mid a < x \leqq b\}$ se denominan intervalos *semi-abiertos* o *semi-cerrados.*

EJEMPLO 1.8. El conjunto de todos los números reales x tales que $x^2 = -1$, escrito $\{x \mid x^2 = -1\}$, es el conjunto nulo o vacío ya que no hay números reales cuyos cuadrados sean iguales a -1. Sin embargo, si incluimos los números complejos el conjunto no es vacío.

EJEMPLO 1.9. Si lanzamos un dado, el conjunto de todos los resultados posibles es el universo $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. El conjunto de los resultados que consisten de las caras 7 u 11 sobre un solo dado es el conjunto nulo.

DIAGRAMAS DE VENN

Un universo $\mathcal{U}$ puede representarse geométricamente por el conjunto de puntos dentro de un rectángulo. En tal caso los subconjuntos de $\mathcal{U}$ (como A y B indicados y sombreados en la Fig. 1-1) se representan por conjuntos de puntos dentro de los círculos. Tales diagramas denominados *diagramas de Venn*, sirven para darnos una intuición geométrica respecto a las posibles relaciones entre conjuntos.

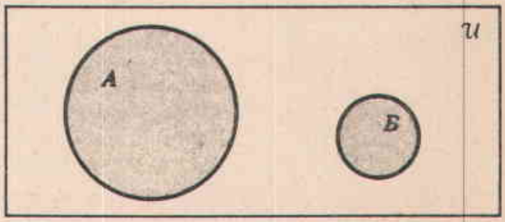


Fig. 1-1

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

1. **Unión.** El conjunto de todos los elementos (o puntos) que pertenecen a A o a B, o tanto a A como a B, se llama la *unión* de A y B y se escribe $A \cup B$ (región sombreada en la Fig. 1-2).

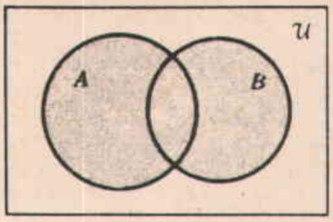


Fig. 1-2

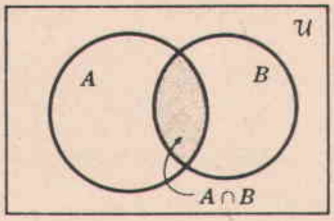


Fig. 1-3

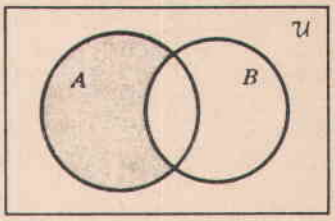


Fig. 1-4

2. **Intersección.** El conjunto de todos los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B se llama la *intersección* de A y B y se escribe $A \cap B$ (región sombreada en la Fig. 1-3).

Dos conjuntos A y B tales que $A \cap B = \emptyset$, es decir, que no tienen elementos comunes, se llaman *conjuntos disjuntos*. En la Fig. 1-1, A y B son disjuntos.

3. **Diferencia.** El conjunto que consiste en todos los elementos de A que no pertenecen a B se llama la *diferencia* de A y B, escrita por $A - B$ (región sombreada en la Fig. 1-4).

4. **Complemento.** Si $B \subset A$ entonces $A - B$ se llama el *complemento de B relativo a A* y se escribe B'_A (región sombreada en la Fig. 1-5). Si $A = \mathcal{U}$, el conjunto universal, nos referimos a $\mathcal{U} - B$ sencillamente como el *complemento* de B y lo escribimos B' (región sombreada en la Fig. 1-6). El complemento de $A \cup B$ se escribe $(A \cup B)'$.

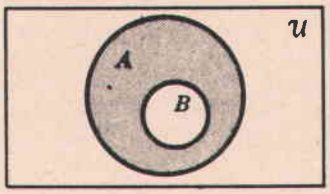


Fig. 1-5

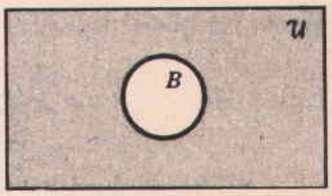


Fig. 1-6

ALGUNOS TEOREMAS RELATIVOS A CONJUNTOS

Teorema 1-2:	$A \cup B = B \cup A$	Ley conmutativa de las uniones
Teorema 1-3:	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$	Ley asociativa de las uniones
Teorema 1-4:	$A \cap B = B \cap A$	Ley conmutativa de las intersecciones
Teorema 1-5:	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$	Ley asociativa de las intersecciones
Teorema 1-6:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Primera ley distributiva
Teorema 1-7:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Segunda ley distributiva
Teorema 1-8:	$A - B = A \cap B'$	
Teorema 1-9:	Si $A \subset B$, entonces $A' \supset B'$ ó $B' \subset A'$	
Teorema 1-10:	$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$	
Teorema 1-11:	$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}, \quad A \cap \mathcal{U} = A$	
Teorema 1-12a:	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	Primera ley De Morgan
Teorema 1-12b:	$(A \cap B)' = A' \cup B'$	Segunda ley De Morgan
Teorema 1-13:	$A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$	Para cualquier conjunto A y B

Los teoremas 1-12*a*, 1-12*b* y 1-13 pueden generalizarse (véanse Problemas 1.69 y 1.74).

PRINCIPIO DE DUALIDAD

Cualquier resultado verdadero relativo a conjuntos también es verdadero si remplazamos uniones por intersecciones, intersecciones por uniones, conjuntos por sus complementos y si invertimos los *símbolos de inclusión* $\subset$ y $\supset$.

EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Todos estamos familiarizados con la importancia de los experimentos en la ciencia y en la ingeniería. Un principio fundamental es que si efectuamos tales experimentos repetidamente bajo condiciones aproximadamente idénticas obtenemos resultados que son esencialmente los mismos.

Sin embargo, hay experimentos en los cuales los resultados no son esencialmente los mismos a pesar de que las condiciones sean aproximadamente idénticas. Tales experimentos se denominan *experimentos aleatorios.* Los siguientes son algunos ejemplos.

EJEMPLO 1.10. Si lanzamos una moneda el resultado del experimento es un "sello", simbolizado por S (ó 0), o una "cara", simbolizada por C (ó 1), es decir uno de los elementos del conjunto $\{C, S\}$ (ó $\{0, 1\}$).

EJEMPLO 1.11. Si lanzamos un dado el resultado del experimento es uno de los números en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

EJEMPLO 1.12. Si lanzamos una moneda dos veces, el resultado puede indicarse por $\{CC, CS, SC, SS\}$, es decir dos caras, cara la primera y sello la segunda, etc.

EJEMPLO 1.13. Si tenemos una máquina que produce tornillos, el resultado del experimento es que algunos pueden estar defectuosos. Así cuando se produce un tornillo será un miembro del conjunto {defectuoso, no defectuoso}.

EJEMPLO 1.14. Si un experimento consiste en medir "la vida" de las lámparas eléctricas producidas por una compañía, entonces el resultado del experimento es el tiempo t en horas que se encuentra en algún intervalo, por ejemplo, $0 \leqq t \leqq 4000$, donde suponemos que ninguna lámpara eléctrica dura más de 4000 horas.

ESPACIOS MUESTRALES

Un conjunto $\mathcal{S}$ que consiste en todos los resultados de un experimento aleatorio se llama un *espacio muestral* y cada uno de los resultados se denomina *punto muestral.* Con frecuencia habrá más de un espacio muestral que describe los resultados de un experimento pero hay comúnmente sólo uno que suministra la mayoría de la información. Obsérvese que $\mathcal{S}$ corresponde al conjunto universal.

EJEMPLO 1.15. Si lanzamos un dado, un espacio o conjunto muestral de todos los resultados posibles se da por $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en tanto que otro es {par, impar} Sin embargo, es lógico que el último no sería adecuado para determinar, por ejemplo, si un resultado es divisible por 3.

Frecuentemente es útil dibujar un espacio muestral gráficamente. En tal caso es deseable utilizar números en cambio de letras siempre y cuando sea posible.

EJEMPLO 1.16. Si lanzamos una moneda dos veces y utilizamos 0 para representar sellos y 1 para representar caras el espacio muestral (véase Ejemplo 1.12) puede dibujarse por puntos en la Fig. 1-7 donde, por ejemplo, (0,1) representa sello en el primer lanzamiento y cara en el segundo lanzamiento, es decir SC.

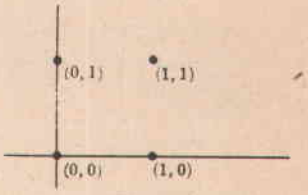


Fig. 1-7

Si un espacio muestral tiene un número finito de puntos, como en el Ejemplo 1.16, se denomina *espacio muestral finito.* Si tiene tantos puntos como números naturales 1, 2, 3, . . . , se denomina *espacio muestral infinito contable.* Si tiene tantos puntos como hay en algún intervalo en el eje x, tal como $0 \leqq x \leqq 1$, se denomina *espacio muestral infinito no contable.* Un espacio muestral que es finito o infinito contable frecuentemente se denomina *espacio muestral discreto*, en tanto que uno que es infinito no contable se llama *espacio muestral continuo* o *no discreto.*

SUCESOS

Un *suceso* es un subconjunto A del espacio muestral $\mathcal{S}$, es decir es un conjunto de resultados posibles. Si el resultado de un experimento es un elemento de A decimos que el suceso A ha ocurrido. Un suceso que consiste de un solo punto de $\mathcal{S}$ frecuentemente se llama un *suceso elemental* o *simple.*

EJEMPLO 1.17. Si lanzamos una moneda dos veces, el suceso que sólo resulte una cara es el subconjunto del espacio muestral que consiste de los puntos (0, 1) y (1, 0), como se indica en la Fig. 1-8.

Como sucesos particulares tenemos el suceso en sí mismo, que es el *suceso cierto* o *seguro* ya que un elemento de $\mathcal{S}$ debe ocurrir, y el conjunto vacío $\emptyset$, que se llama el *suceso imposible* puesto que un elemento de $\emptyset$ no puede ocurrir.

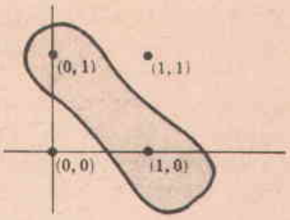


Fig. 1-8

Puesto que los sucesos son conjuntos es lógico que las proposiciones relativas a sucesos pueden traducirse en el lenguaje de la teoría de conjuntos e inversamente. En particular tenemos un *álgebra de sucesos* que corresponde al álgebra de conjuntos indicada en la página 3.

Empleando las operaciones de conjuntos en sucesos en $\mathcal{S}$ podemos obtener otros sucesos en $\mathcal{S}$. Así si A y B son sucesos, entonces

1. $A \cup B$ es el suceso "A ó B o ambos".
2. $A \cap B$ es el suceso "tanto A como B"
3. A' es el suceso "no A".
4. $A - B$ es el suceso "A pero no B".

Si los conjuntos correspondientes a los sucesos A y B son disjuntos, es decir $A \cap B = \emptyset$, frecuentemente decimos que los sucesos son *mutuamente excluyentes.* Esto quiere decir que no pueden ocurrir ambos.

EJEMPLO 1.18. Haciendo referencia al experimento de lanzar una moneda dos veces sea A el suceso "por lo menos resulte una cara" y B el suceso "el segundo lanzamiento sea un sello". Entonces $A = \{CS, SC, CC\}, B = \{CS, SS\}$ así tenemos

$$A \cup B = \{CS, SC, CC, SS\} = \mathcal{S} \qquad A \cap B = \{CS\}$$
$$A' = \{SS\} \qquad A - B = \{SC, CC\}$$

EL CONCEPTO DE PROBABILIDAD

En cualquier experimento aleatorio siempre hay incertidumbre sobre si un suceso específico ocurrirá o no. Como medida de la *oportunidad* o *probabilidad* con la que podemos esperar que un suceso ocurra es conveniente asignar un número entre 0 y 1. Si estamos seguros de que el suceso ocurrirá decimos que su probabilidad es 100% ó 1, pero si estamos seguros de que el suceso no ocurrirá decimos que su probabilidad es cero. Por ejemplo, si la probabilidad es de 1/4, diríamos que hay un 25% de oportunidad de que ocurra y un 75% de oportunidad de que no ocurra. Equivale a decir que la *probabilidad* contra su ocurrencia es del 75% al 25% o de 3 a 1.

Existen dos procedimientos importantes por medio de los cuales podemos obtener estimativos para la probabilidad de un suceso.

1. **Enfoque clásico o a priori.** Si un suceso puede ocurrir en h maneras diferentes de un número total de n maneras posibles, todos igualmente factibles, entonces la probabilidad del suceso es h/n.

EJEMPLO 1.19. Supóngase que deseamos la probabilidad de que resulte una cara en un solo lanzamiento de una moneda. Puesto que hay dos maneras igualmente factibles del resultado de la moneda, simplemente "cara" y "sello" (suponiendo que la moneda no se pierda ni caiga verticalmente), y de estas dos maneras una cara puede aparecer en una sola manera, razonamos que la probabilidad requerida es 1/2. Al llegar a este resultado suponemos que la moneda es *honrada*, es decir que no está *cargada*.

2. **Enfoque como frecuencia relativa o a posteriori.** Si después de n repeticiones de un experimento, donde n es muy grande, un suceso ocurre h veces, entonces la probabilidad del suceso es h/n. Esto también se llama la *probabilidad empírica* del suceso.

EJEMPLO 1.20. Si lanzamos una moneda 1000 veces y hallamos que 532 veces resultan caras estimamos que la probabilidad de una cara es $532/1000 = 0.532$.

Ambos enfoques el clásico y el de frecuencia presentan serias dificultades, el primero debido a la vaguedad de las palabras "igualmente factibles" y el segundo debido a la vaguedad incluida en un "número muy grande". A causa de estas dificultades los matemáticos en los últimos años se han orientado a un *enfoque axiomático* utilizando conjuntos.

LOS AXIOMAS DE LA PROBABILIDAD

Supóngase que tenemos un espacio muestral $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{S}$ es discreto todos los subconjuntos corresponden a sucesos y recíprocamente, pero si $\mathcal{S}$ es continuo solamente subconjuntos especiales (llamados *medibles*) corresponden a sucesos. A cada suceso A en la clase $\mathcal{C}$ de sucesos asociamos un número real $P(A)$, es decir P es una función de valor real definida en $\mathcal{C}$. Así P se llama la *función de probabilidad*, y $P(A)$ la *probabilidad* del suceso A, si se satisfacen los axiomas siguientes:

Axioma 1. Para cada suceso A en la clase $\mathcal{C}$

$$P(A) \geqq 0 \qquad (1)$$

Axioma 2. Para el suceso cierto o seguro $\mathcal{S}$ en la clase $\mathcal{C}$

$$P(\mathcal{S}) = 1 \qquad (2)$$

Axioma 3. Para cualquier número de sucesos mutuamente excluyentes $A_1, B_2, \ldots$ en la clase $\mathcal{C}$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots \qquad (3)$$

En particular, para solo dos sucesos mutuamente excluyentes A_1, A_2,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \qquad (4)$$

ALGUNOS TEOREMAS IMPORTANTES SOBRE PROBABILIDAD

De los axiomas anteriores podemos demostrar varios teoremas sobre probabilidad que son importantes en el estudio posterior.

Teorema 1-14: Si $A_1 \subset A_2$ entonces $P(A_1) \leqq P(A_2)$ y $P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$.

Teorema 1-15: Para cada suceso A

$$0 \leqq P(A) \leqq 1 \qquad (5)$$

es decir la probabilidad de un suceso está entre 0 y 1.

Teorema 1-16:

$$P(\emptyset) = 0 \qquad (6)$$

es decir el suceso imposible tiene probabilidad cero.

Teorema 1-17: Si A' es el complemento de A entonces

$$P(A') = 1 - P(A) \qquad (7)$$

Teorema 1-18: Si $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \qquad (8)$$

En particular si $A = \mathcal{S}$, el espacio muestral, entonces

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1 \tag{9}$$

Teorema 1-19: Si A y B son dos sucesos cualesquiera, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{10}$$

Generalizando, si A_1, A_2, A_3 son tres sucesos cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ & - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_3 \cap A_1) \\ & + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned} \tag{11}$$

También pueden hacerse generalizaciones a n sucesos. Véase Problema 1.79.

Teorema 1-20: Para dos sucesos A y B

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') \tag{12}$$

Teorema 1-21: Si un suceso A debe resultar en uno de los sucesos mutuamente excluyentes A_1, $A_2, \ldots, A_n$ entonces

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \cdots + P(A \cap A_n) \tag{13}$$

ASIGNACION DE PROBABILIDADES

Si un espacio muestral $\mathcal{S}$ consiste únicamente de los sucesos elementales $A_1, A_2, \ldots, A_n$ entonces por el Teorema 1-18

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1 \tag{14}$$

Se concluye que podemos escoger arbitrariamente cualquier número no negativo para las probabilidades de estos sucesos simples siempre y cuando se satisfaga (*14*). En particular, si suponemos *probabilidades iguales* para todos los sucesos simples, entonces

$$P(A_k) = \frac{1}{n} \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{15}$$

y si A es un suceso compuesto por h sucesos simples tenemos

$$P(A) = \frac{h}{n} \tag{16}$$

Esto equivale al enfoque clásico de la probabilidad dado en la página 5. Podríamos lógicamente emplear otros procedimientos para asignar probabilidades, como el de la frecuencia relativa de la página 6.

La asignación de probabilidades provee un *modelo matemático* y su éxito debe probarse experimentalmente en forma muy similar a como las teorías en física u otras ciencias deben probarse experimentalmente.

EJEMPLO 1.21. Se lanza solo un dado. Hallar la probabilidad de que resulte 2 ó 5.

El espacio muestral es $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si asignamos probabilidades iguales a los puntos muestrales, es decir si suponemos que el dado es honrado, entonces

$$P(1) = P(2) = \cdots = P(6) = \frac{1}{6}$$

El suceso que resulte 2 ó 5 se indica por $2 \cup 5$. Por tanto

$$P(2 \cup 5) = P(2) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Sean A y B dos sucesos (Fig. 1-9) tales que $P(A) > 0$. Denotamos por $P(B \mid A)$ la probabilidad de B *dado que* A ha ocurrido. Puesto que se sabe que A ha ocurrido, se convierte en el nuevo espacio muestral remplazando el original $\mathcal{S}$. De aquí llegamos a la definición

$$P(B \mid A) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{17}$$

ó

$$P(A \cap B) \equiv P(A)\,P(B \mid A) \tag{18}$$

En palabras, la ecuación (*18*) nos dice que la probabilidad de que tanto A y B ocurran es igual a la probabilidad de que A ocurra tantas veces la probabilidad de que B ocurra dado que A ha ocurrido. Llamamos a $P(B \mid A)$ la ***probabilidad condicional*** de B dada A, es decir la probabilidad de que B ocurra dado que A ha ocurrido. Fácilmente se demuestra que la probabilidad condicional satisface los axiomas en la página 6.

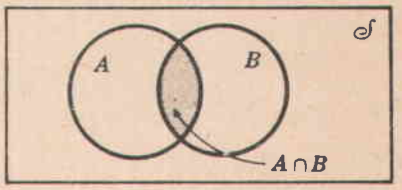


Fig. 1-9

EJEMPLO 1.22. Hallar la probabilidad de que en un sólo lanzamiento de un dado resulte un número menor que 4, (*a*) no se da ninguna otra información, (*b*) se da que el lanzamiento resultó en un número impar.

(*a*) Si B denota el suceso {menor que 4}. Ya que B es la unión de los sucesos 1, 2 ó 3 observamos por el teorema 1-18 que

$$P(B) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

suponiendo probabilidades iguales para los puntos muestrales.

(*b*) Si A es el suceso {número impar} observamos que $P(A) = 3/6 = 1/2$. También $P(A \cap B) = 2/6 = 1/3$. Entonces

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

Por tanto, el saber que el resultado del lanzamiento es un número impar aumenta la probabilidad de 1/2 a 2/3.

TEOREMAS SOBRE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Teorema 1-22: Para tres sucesos cualesquiera A_1, A_2, A_3 tenemos

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1)\,P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \tag{19}$$

En palabras, la probabilidad de que A_1 y A_2 y A_3 ocurran es igual a la probabilidad de que A_1 ocurra tantas veces la probabilidad de que A_2 ocurra dado que A_1 ha ocurrido tantas veces la probabilidad de que A_3 ocurra dado que A_1 y A_2 han ocurrido. El resultado se generaliza fácilmente a n sucesos.

Teorema 1-23: Si un suceso A debe resultar en uno de los sucesos mutuamente excluyentes A_1, $A_2, \ldots, A_n$ entonces

$$P(A) = P(A_1)P(A \mid A_1) + P(A_2)P(A \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(A \mid A_n) \tag{20}$$

SUCESOS INDEPENDIENTES

Si $P(B \mid A) = P(B)$, es decir la probabilidad de que B ocurra no está afectada por la ocurrencia o no ocurrencia de A, entonces decimos que A y B son *sucesos independientes*. Esto es equivalente a

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) \tag{21}$$

como se deduce de (*18*). Inversamente, si se cumple (*21*) entonces A y B son independientes. Algunas propiedades de la independencia están dadas en los Problemas 1.91 y 1.92.

Si A_1, A_2, A_3 son independientes entonces deben ser independientes por parejas,

$$P(A_j \cap A_k) = P(A_j)\,P(A_k) \qquad j \neq k \text{ donde } j, k = 1, 2, 3 \tag{22}$$

y también debemos tener

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) \tag{23}$$

Ni (*22*) ni (*23*) son suficientes por sí solo. La generalización a más de tres sucesos se hace fácilmente.

TEOREMA O REGLA DE BAYES

Supóngase que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos mutuamente excluyentes cuya unión es el espacio muestral $\mathcal{S}$, es decir uno de los sucesos debe ocurrir. Entonces si A es cualquier suceso tenemos el siguiente teorema importante:

Teorema 1-24 **(regla de Bayes):**

$$P(A_k \mid A) = \frac{P(A_k)\,P(A \mid A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\,P(A \mid A_k)} \tag{24}$$

Esto nos permite hallar las probabilidades de los diferentes sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que pueden causar la ocurrencia de A. Por esta razón con frecuencia se hace referencia al teorema de Bayes como el teorema sobre la *probabilidad de causas.*

ANALISIS COMBINATORIO

En muchos casos el número de puntos muestrales en un espacio muestral no es muy grande y así la enumeración o cuenta directa de los puntos del muestreo necesarios para obtener las probabilidades no es difícil. Sin embargo, surgen problemas cuando la cuenta directa se convierte en una imposibilidad práctica. En tales casos se emplea el *análisis combinatorio,* que podría llamarse una *forma sofisticada* de contar.

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE CUENTA. DIAGRAMAS ARBOL

Si una cosa puede realizarse en n_1 maneras diferentes y después de esto una segunda cosa puede realizarse en n_2 maneras diferentes, ..., y finalmente una k-ésima cosa puede realizarse en n_k maneras diferentes, entonces todas las k cosas pueden realizarse en el orden especificado en $n_1 n_2 \ldots n_k$ maneras diferentes.

EJEMPLO 1.23. Si un hombre tiene 2 camisas y 4 corbatas entonces tiene $2 \cdot 4 = 8$ maneras de escoger una camisa y luego una corbata.

Un diagrama, llamado *diagrama árbol* debido a su apariencia (Fig. 1-10), se emplea frecuentemente en conexión con el principio anterior.

EJEMPLO 1.24. Si las camisas se representan por S_1, S_2 y las corbatas por T_1, T_2, T_3, T_4, las diferentes maneras de escoger una camisa y luego una corbata se indican en el diagrama árbol de la Fig. 1-10.

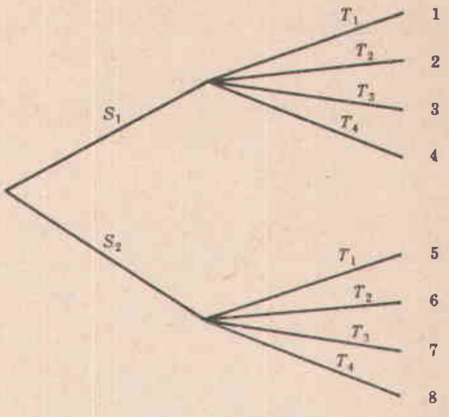


Fig. 1-10

PERMUTACIONES

Supóngase que se dan n objetos diferentes y deseamos *ordenar* r de estos objetos en una línea. Puesto que hay n maneras de escoger el primer objeto, y luego de hacer esto $n - 1$ maneras de escoger el segundo objeto, . . . , y finalmente $n - r + 1$ formas de escoger el r-ésimo objeto, se deduce por el principio fundamental de cuenta que el número de *ordenaciones*, o *permutaciones* diferentes como generalmente se les llama, está dado por

$$_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \tag{25}$$

donde se observa que el producto tiene r factores. Llamamos a $_nP_r$ el número de *permutaciones de n objetos tomados de r en r.*

Para el caso particular cuando $r = n$, (*25*) se convierte en

$$_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n! \tag{26}$$

que se denomina n *factorial.* Podemos escribir (*25*) en términos de factoriales como

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{27}$$

Si $r = n$ observamos que (*25*) y (*26*) se satisfacen sólo si tenemos que $0! = 1$ y tomaremos realmente esto como una definición de 0!

EJEMPLO 1.25. El número de ordenaciones o permutaciones diferentes que consisten de 3 letras cada una y que pueden formarse de las 7 letras *A, B, C, D, E, F, G* es

$$_7P_3 = \frac{7!}{4!} = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$$

Supóngase que un conjunto que consiste de n objetos de los cuales n_1 son de un tipo (es decir no se podrían distinguir entre sí), n_2 son de un segundo tipo, . . . , n_k son del k-ésimo tipo. Aquí, lógicamente, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Así el número de permutaciones diferentes de los objetos es

$$_nP_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!} \tag{28}$$

Véase Problema 1.34.

EJEMPLO 1.26. El número de permutaciones diferentes de las 11 letras de la palabra *M I S S I S S I P P I*, que consiste de 1*M*, 4*I*, 4*S* y 2*P* es

$$\frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!} = 34\,650$$

COMBINACIONES

En una permutación estamos interesados en el orden de la distribución de los objetos. Así *abc* es una permutación diferente de *bca*. Sin embargo, en muchos problemas estamos interesados solamente en seleccionar o escoger objetos sin interesar su orden. Dichas selecciones se llaman *combinaciones*. Por ejemplo *abc* y *bca* son la misma combinación.

El número total de combinaciones de r objetos seleccionados de n (también llamadas las combinaciones de n *cosas tomadas de r en r*) se denota por ${}_nC_r$ ó $\binom{n}{r}$. Tenemos (véase Problema 1.36)

$$\binom{n}{r} = {}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \tag{29}$$

que también puede escribirse como

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{{}_nP_r}{r!} \tag{30}$$

Fácilmente se demuestra que

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad \text{ó} \quad {}_nC_r = {}_nC_{n-r} \tag{31}$$

EJEMPLO 1.27. El número de maneras en las cuales 3 cartas pueden escogerse o seleccionarse de un total de 8 cartas diferentes es

$${}_8C_3 = \binom{8}{3} = \frac{8\cdot7\cdot6}{3!} = 56$$

COEFICIENTES BINOMIALES

Los números de (*29*) se les llama frecuentemente los *coeficientes binomiales* puesto que provienen de la *expansión binomial*

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n \tag{32}$$

Tienen muchas propiedades interesantes.

EJEMPLO 1.28.

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 \\ &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

APROXIMACION DE STIRLING A $n!$

Cuando n es muy grande la evaluación de $n!$ no es práctica. En tales casos se utiliza la fórmula aproximada

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \tag{33}$$

donde $e = 2.71828\ldots$ es la base de los logaritmos naturales. Véase Problema 1.48. El símbolo $\sim$ en (*33*) significa que la relación del lado izquierdo al lado derecho se aproxima a 1 a medida que $n \to \infty$. Por esta razón decimos que el lado derecho es una *expansión asintótica* del lado izquierdo. Para un estudio más detallado de la fórmula de Stirling véase el Apéndice A.

Problemas resueltos

CONJUNTOS

1.1. Sea A el conjunto de todos los números reales cuyos cuadrados son iguales a 25. Indique cómo describir a A por (*a*) el método de comprensión y (*b*) el método de extensión.

(*a*) $A = \{x \mid x^2 = 25\}$ que se lee "el conjunto de todos los elementos de x tales que $x^2 = 25$".

(*b*) Puesto que $x^2 = 25$ para $x = 5$ y $x = -5$, podemos escribir $A = \{5, -5\}$, es decir A se describe dando sus elementos.

1.2. Sea $A = \{x \mid x \text{ es un entero impar}\}$, $B = \{x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$. Demostrar que $B \subset A$.

Ya que $x^2 - 8x + 15 = 0$ ó $(x-3)(x-5) = 0$ sólo si $x = 3$ ó $x = 5$, tenemos $B = \{3, 5\}$. Puesto que los elementos 3 y 5 son enteros impares, pertenecen a A. Así cada elemento de B pertenece a A y por tanto $B \subset A$, es decir B es un subconjunto de A.

1.3. ¿Es cierto que $\{2\} = 2$?

No, 2 es un *número real* mientras que $\{2\}$ es un *conjunto* que consiste del número real 2. Un conjunto como $\{2\}$ que consiste únicamente de un elemento algunas veces se llama *conjunto singular* o *unitario* y debe distinguirse del elemento que contiene.

1.4. Determinar cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas y corregir las que son falsas.

(*a*) $\{x \mid x \neq x\} = \{\emptyset\}$.

(*b*) Si $A = \{x \mid x^2 = 4,\ x > 9\}$ y $B = \{x \mid x \leqq 1\}$, entonces $B \supset A$.

(*a*) La proposición es falsa. Cualquier objeto particular se supone es igual a sí mismo. Así, no hay objeto que no sea igual a sí mismo. Entonces $\{x \mid x \neq x\} = \emptyset$, el conjunto vacío.

El error radica en escribir $\{\emptyset\}$ por $\emptyset$, puesto que $\{\emptyset\}$ es un conjunto *no vacío* que consiste del conjunto vacío.

(*b*) Obsérvese que esto se lee "A es el conjunto de x tal que $x^2 = 4$ y $x > 9$".

Puesto que no hay un número x tal que $x^2 = 4$ [ó $x = 2, -2$] y $x > 9$, se sigue que $A = \emptyset$. Puesto que el conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto, se deduce que $A \subset B$ ó $B \supset A$ y la proposición es verdadera.

1.5. Demostrar que si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

Sea x cualquier elemento de A, es decir $x \in A$. Entonces ya que $A \subset B$, es decir cada elemento de A está en B, tenemos $x \in B$. Puesto que también $B \subset C$, tenemos que $x \in C$. Así cada elemento de A es un elemento de C y por tanto $A \subset C$.

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS, DIAGRAMAS DE VENN Y TEOREMAS SOBRE CONJUNTOS

1.6. Si el universo $\mathcal{U} = \{\frac{1}{2}, 0, \pi, 5, -\sqrt{2}, -4\}$ y los subconjuntos de $\mathcal{U}$ están dados por $A = \{-\sqrt{2}, \pi, 0\}$, $B = \{5, \frac{1}{2}, -\sqrt{2}, -4\}$ y $C = \{\frac{1}{2}, -4\}$, encontrar (*a*) $A \cap B$, (*b*) $A \cup B$, (*c*) $(A \cup B) \cap C$, (*d*) $B' \cup C'$, (*e*) $A - B$, (*f*) $(B \cap C)'$, (*g*) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

(*a*) $A \cap B = \{-\sqrt{2}, \pi, 0\} \cap \{5, \frac{1}{2}, -\sqrt{2}, -4\} = \{-\sqrt{2}\}$

(*b*) $A \cup B = \{-\sqrt{2}, \pi, 0\} \cup \{5, \frac{1}{2}, -\sqrt{2}, -4\} = \{-\sqrt{2}, \pi, 0, 5, \frac{1}{2}, -4\}$

(*c*) $(A \cup B) \cap C = \{-\sqrt{2}, \pi, 0, 5, \frac{1}{2}, -4\} \cap \{\frac{1}{2}, -4\} = \{\frac{1}{2}, -4\}$ utilizando el resultado de (*b*).

(*d*) B' = conjunto de los elementos en $\mathcal{U}$ que no están en $B = \{0, \pi\}$.
C' = conjunto de los elementos en $\mathcal{U}$ que no están en $C = \{0, \pi, 5, -\sqrt{2}\}$.
Entonces $B' \cup C' = \{0, \pi\} \cup \{0, \pi, 5, -\sqrt{2}\} = \{0, \pi, 5, -\sqrt{2}\}$.

(*e*) $A - B$ = conjunto de elementos en A que no están en $B = [0, \pi]$.

Otro método. Por el Teorema 1-8, página 3, tenemos

$$A - B = A \cap B' = \{\tfrac{1}{2}, 0, \pi, 5, -\sqrt{2}, -4\} \cap \{0, \pi\} = \{0, \pi\}$$

(*f*) $B \cap C = \{5, \frac{1}{2}, -\sqrt{2}, -4\} \cap \{\frac{1}{2}, -4\} = \{\frac{1}{2}, -4\}$.
Entonces $(B \cap C)' = \{0, \pi, 5, -\sqrt{2}\}$.

Obsérvese que este resultado conjuntamente con el de la parte (*d*) ilustra la segunda ley De Morgan, Teorema 1-12*b*, página 3.

(*g*) $A \cap C = \{-\sqrt{2}, \pi, 0\} \cap \{\frac{1}{2}, -4\} = \emptyset$, el conjunto vacío.

$B \cap C = \{\frac{1}{2}, -4\}$ [Véase parte (*f*)].

Entonces $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset \cup \{\frac{1}{2}, -4\} = \{\frac{1}{2}, -4\}$

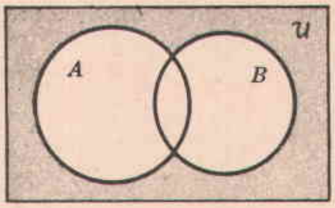
1.7. (*a*) Demostrar la primera ley De Morgan, Teorema 1-12*a*, página 3: $(A \cup B)' = A' \cap B'$. (*b*) Ilustrar el resultado de la parte (*a*) empleando un diagrama de Venn.

(*a*) Tenemos

$$(A \cup B)' = \{x \mid x \notin A \cup B\} = \{x \mid x \notin A, x \notin B\} = \{x \mid x \in A', x \in B'\} = A' \cap B'$$

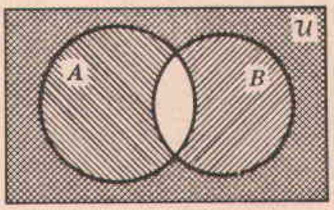
El resultado puede extenderse a cualquier número finito de conjuntos (véase Problema 1.69).

(*b*) En el diagrama de Venn de la Fig. 1-11 la región sombreada representa $(A \cup B)'$. En la Fig. 1-12, A' se indica por líneas diagonales paralelas construidas de izquierda a derecha en tanto que B' se indica por líneas diagonales paralelas construidas de derecha a izquierda. Luego $A' \cap B'$ se representa por la región doblemente rayada en donde se encuentran ambos conjuntos de líneas, y se observa que esta región es igual a la región sombreada de la Fig. 1-11.



Región sombreada $= (A \cup B)'$

Fig. 1-11



Región doblemente rayada $= A' \cap B'$

Fig. 1-12

Obsérvese que un diagrama de Venn no suministra una prueba como la dada en la parte (*a*). Sin embargo, sirve para suministrar relaciones posibles entre conjuntos que luego pueden probarse por métodos similares al dado en (*a*).

1.8. Demostrar la primera ley distributiva, Teorema 1-6, página 3: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Tenemos
$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{x \mid x \in A,\ x \in B \cup C\} \\ &= \{x \mid x \in A,\ x \in B \text{ ó } x \in C\} \\ &= \{x \mid x \in A,\ x \in B \text{ ó } x \in A,\ x \in C\} \\ &= \{x \mid x \in A \cap B \text{ ó } x \in A \cap C\} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

1.9. Demostrar que para cualquier conjunto A y B tenemos $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$.

Método 1.

$$A = \{x \mid x \in A\} = \{x \mid x \in A \cap B \text{ ó } x \in A \cap B'\} = (A \cap B) \cup (A \cap B')$$

Método 2.

Sea $C = B'$ en el Problema 1.8. Entonces

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup B') &= (A \cap B) \cup (A \cap B') \\ A \cap \mathcal{U} &= (A \cap B) \cup (A \cap B') \\ A &= (A \cap B) \cup (A \cap B') \end{aligned}$$

El resultado puede generalizarse (véase Problema 1.74).

EXPERIMENTOS ALEATORIOS, ESPACIOS MUESTRALES Y SUCESOS

1.10. Se extrae una carta aleatoriamente de una baraja de 52 cartas. Describir el espacio muestral si (a) no se tiene en consideración el palo (b) si se tiene en cuenta el palo.

(a) Si no tenemos en cuenta los palos el espacio muestral consiste de as, dos, . . . , diez, jota, reina, rey, y puede indicarse como $\{1, 2, \ldots, 13\}$.

(b) Si tenemos en cuenta los palos el espacio muestral consiste del as de corazón, picas, diamantes y tréboles; . . . ; rey de corazones, picas, diamantes y tréboles. Denotando corazones, picas, diamantes y tréboles respectivamente por 1, 2, 3, 4, por ejemplo, podemos indicar una jota de picas por (11,2). Luego el espacio muestral consiste de 52 puntos indicados en la Fig. 1-13.

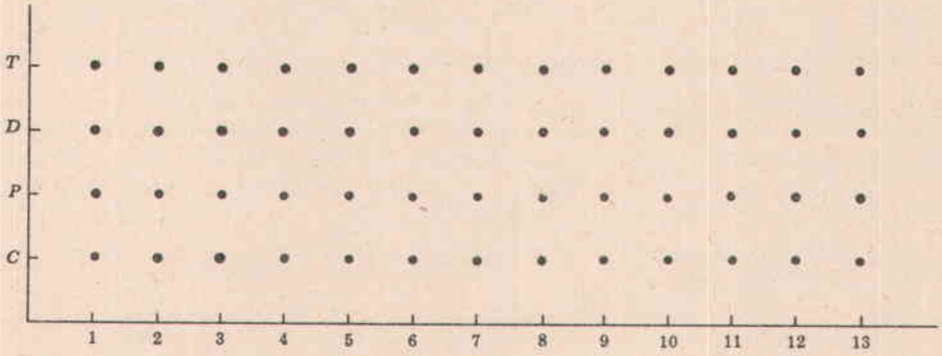


Fig. 1-13

1.11. Refiriéndose al experimento del Problema 1.10 sea A el suceso {se extrae un rey} o sencillamente {rey} y B el suceso {se extrae un trébol} o sencillamente {trébol}. Describir los sucesos (a) $A \cup B$, (b) $A \cap B$, (c) $A \cup B'$, (d) $A' \cup B'$, (e) $A - B$, (f) $A' - B'$, (g) $(A \cap B) \cup (A \cap B')$.

(a) $A \cup B =$ {o rey o trébol (o ambos, es decir rey de trébol)}

(b) $A \cap B =$ {rey y trébol} = {rey de trébol}

(c) Puesto que $B =$ {trébol}, $B' =$ {no trébol} = {corazón, diamante, pica}.

Luego $A \cup B' =$ {rey o corazón o diamante o pica}.

(d) $A' \cup B' =$ {no rey o no trébol} = {no rey de trébol} = { cualquier carta pero no el rey de tréboles}

También puede considerarse observando que $A' \cup B' = (A \cap B)'$ y utilizando (b).

(e) $A - B =$ {rey pero no trébol}

Es lo mismo que $A \cap B' =$ {rey y no trébol}.

(f) $A' - B' =$ {no rey y no "no trébol"} = {no rey y trébol} = {cualquier trébol excepto el rey}.

También puede considerarse observando que $A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B$.

(g) $(A \cap B) \cup (A \cap B') =$ {(rey y trébol) o (rey y no trébol)} = {rey}.

También puede considerarse observando que $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$.

1.12. Emplear la Fig. 1-13 para describir los sucesos (a) $A \cup B$, (b) $A' \cap B'$.

Los sucesos requeridos se indican en el diagrama de Venn de la Fig. 1-14. De una manera similar todos los sucesos del Problema 1.11 también pueden indicarse por los diagramas de Venn. Debe observarse de la Fig. 1-14 que $A' \cap B'$ es el complemento de $A \cup B$, de acuerdo con el Teorema 1-12a, página 3.

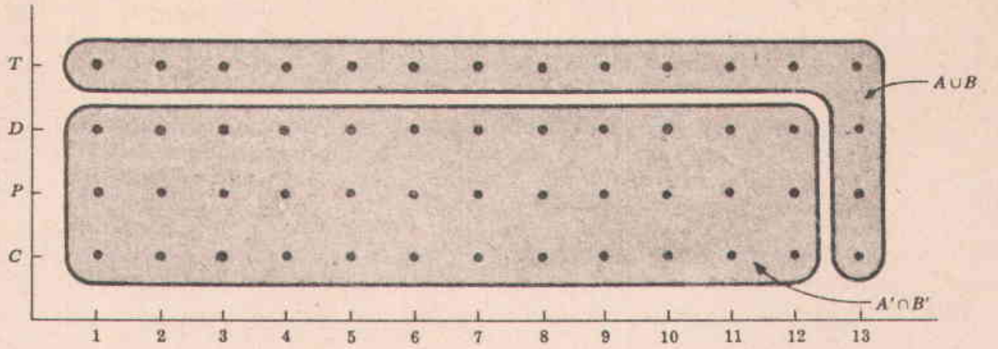


Fig. 1-14

TEOREMAS SOBRE PROBABILIDAD

1.13. Demostrar el (*a*) Teorema 1-14, (*b*) Teorema 1-15, (*c*) Teorema 1-16, página 6.

(*a*) Tenemos $A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1)$ en donde A_1 y $A_2 - A_1$ son mutuamente excluyentes. Entonces por el axioma 3, página 6,

$$P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1)$$

así que

$$P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$$

Puesto que $P(A_2 - A_1) \geqq 0$ por el Axioma 1, página 6, también se sigue que $P(A_2) \geqq P(A_1)$.

(*b*) Con anterioridad sabemos que $P(A) \geqq 0$ por el Axioma 1. Para demostrar que $P(A) \leqq 1$ primero observamos que $A \subset \mathcal{S}$. Así por el Teorema 1-14 [parte (*a*)] y el Axioma 2

$$P(A) \leqq P(\mathcal{S}) = 1$$

(*c*) Tenemos $\mathcal{S} = \mathcal{S} \cup \emptyset$. Puesto que $\mathcal{S} \cap \emptyset = \emptyset$ se sigue del Axioma 3 que

$$P(\mathcal{S}) = P(\mathcal{S}) + P(\emptyset) \quad \text{ó} \quad P(\emptyset) = 0$$

1.14. Demostrar (*a*) el Teorema 1-17 y (*b*) el Teorema 1-19.

(*a*) Tenemos $A \cup A' = \mathcal{S}$. Entonces puesto que $A \cap A' = \emptyset$ tenemos

$$P(A \cup A') = P(\mathcal{S}) \quad \text{ó} \quad P(A) + P(A') = 1$$

es decir

$$P(A') = 1 - P(A)$$

(*b*) Tenemos el diagrama de Venn de la Fig. 1-15

(*1*) $$A \cup B = A \cup [B - (A \cap B)]$$

Entonces puesto que los conjuntos A y $B - (A \cap B)$ son mutuamente excluyentes, tenemos usando el Axioma 3 y el Teorema 1-14:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - (A \cap B))$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Aunque hemos utilizado el diagrama de Venn el resultado (*1*) puede establecerse directamente (véase Problema 1.77).

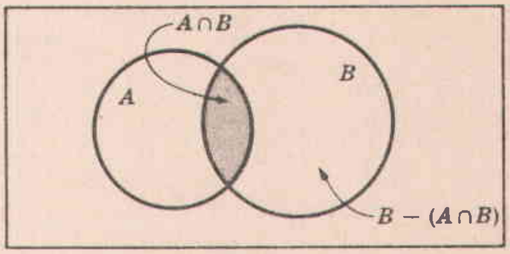


Fig. 1-15

CALCULO DE PROBABILIDADES

1.15. Una carta se extrae aleatoriamente de una baraja de 52 cartas. Encontrar la probabilidad de que sea (*a*) un as, (*b*) una jota de corazones, (*c*) un tres de tréboles o un seis de diamantes, (*d*) un corazón, (*e*) cualquier palo excepto corazones, (*f*) un diez o una pica, (*g*) ni un cuatro ni un trébol.

Por simplicidad utilicemos C, P, D, T para indicar corazón, pica, diamante, trébol, respectivamente, y 1, 2, . . . , 13 por as, dos, . . . , rey. Así $3 \cap C$ significa tres de corazones, en tanto que $3 \cup C$ significa tres o corazón. Empleemos el espacio muestral del Problema 1.10(*b*), asignando probabilidades iguales de 1/52 a cada punto muestral. Así, por ejemplo, $P(6 \cap T) = 1/52$.

(*a*)
$$\begin{aligned} P(1) &= P(1 \cap C \text{ ó } 1 \cap P \text{ ó } 1 \cap D \text{ ó } 1 \cap T) \\ &= P((1 \cap C) + P(1 \cap P) + P(1 \cap D) + P(1 \cap T) \\ &= \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{1}{13} \end{aligned}$$

También había sido posible conseguir este resultado del espacio muestral del Problema 1.10(*a*) en donde cada punto muestral, en particular "as" tiene una probabilidad de 1/13. También se hubiera llegado a este resultado por un razonamiento sencillo de que hay 13 números y así cada uno tiene una probabilidad de ser extraído igual a 1/13.

(*b*) $P(11 \cap C) = \dfrac{1}{52}$

(*c*) $P(3 \cap T \text{ ó } 6 \cap D) = P(3 \cap T) + P(6 \cap D) = \dfrac{1}{52} + \dfrac{1}{52} = \dfrac{1}{26}$

(*d*) $P(C) = P(1 \cap C \text{ ó } 2 \cap C \text{ ó} \ldots 13 \cap C) = \dfrac{1}{52} + \dfrac{1}{52} + \cdots + \dfrac{1}{52} = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$

También se había podido llegar a este resultado observando que hay cuatro palos y cada uno tiene una probabilidad igual de ser extraído, esto es 1/4.

(*e*) $P(C') = 1 - P(C) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ **utilizando la parte (*d*) y el Teorema 1-17, página 6.**

(*f*) **Puesto que 10 y P no son mutuamente excluyentes tenemos del Teorema 1-19**

$$P(10 \cup P) = P(10) + P(P) - P(10 \cap P) = 1/13 + 1/4 - 1/52 = 4/13$$

(*g*) **La probabilidad de no cuatro no trébol puede denotarse por $P(4' \cap T')$. Pero por el Teorema 1-12 (*a*), página 3, $4' \cap T' = (4 \cup T)'$. Por tanto**

$$\begin{aligned} P(4' \cap T') = P[(4 \cup T)'] = 1 - P(4 \cup T) &= 1 - [P(4) + P(T) - P(4 \cap T)] \\ &= 1 - \left[\frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52}\right] = \frac{9}{13} \end{aligned}$$

También podíamos obtener este resultado observando que el diagrama de Venn favorable a este suceso es el complemento del suceso mostrado como la parte sombreada en la Fig. 1-16. Puesto que este complemento tiene 52 − 16 = 36 puntos muestrales en él y cada punto muestral tiene una asignación de probabilidad 1/52, la probabilidad requerida es 36/52 = 9/13.

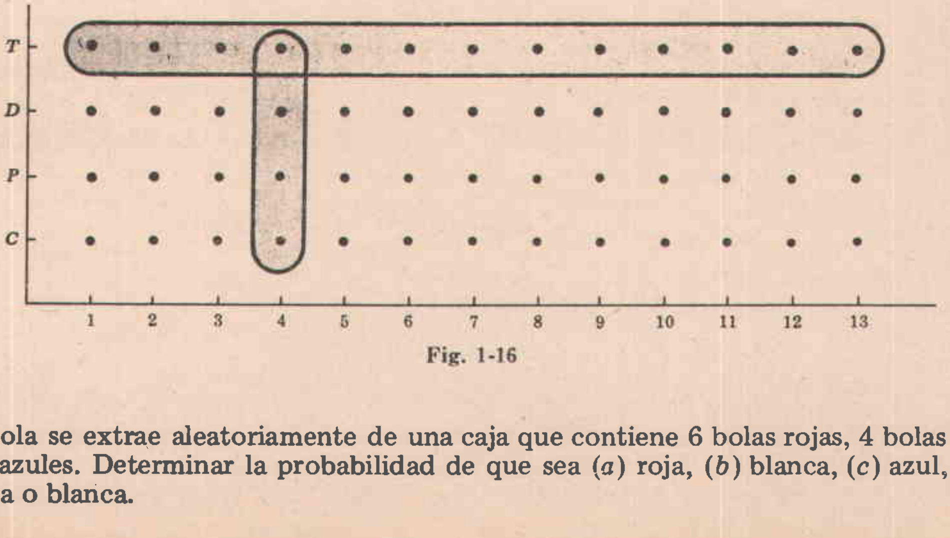


Fig. 1-16

1.16. Una bola se extrae aleatoriamente de una caja que contiene 6 bolas rojas, 4 bolas blancas y 5 bolas azules. Determinar la probabilidad de que sea (*a*) roja, (*b*) blanca, (*c*) azul, (*d*) no roja, (*e*) roja o blanca.

(*a*) **Método 1.**

Denótese por R, B y A los sucesos de extraer una bola roja, blanca y azul, respectivamente. Entonces

$$P(R) = \frac{\text{maneras de elegir una bola roja}}{\text{maneras de elegir una bola}} = \frac{6}{6+4+5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Método 2.

Nuestro espacio muestral consiste de $6+4+5=15$ puntos muestrales. Entonces si asignamos probabilidades iguales $1/15$ a cada punto muestral observamos que $P(R) = 6/15 = 2/5$, debido a que hay 6 puntos muestrales que corresponden a "bola roja".

(*b*) $P(B) = \dfrac{4}{6+4+5} = \dfrac{4}{15}$

(*c*) $P(A) = \dfrac{5}{6+4+5} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$

(*d*) $P(\text{no roja}) = P(R') = 1 - P(R) = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$ por parte (*a*)

(*e*) **Método 1.**

$$P(\text{roja o blanca}) = P(R \cup B) = \frac{\text{maneras de elegir una bola roja o blanca}}{\text{maneras de elegir una bola}}$$

$$= \frac{6+4}{6+4+5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

También puede resolverse utilizando el espacio muestral como en la parte (*a*).

Método 2.

$$P(R \cup B) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ por parte } (c).$$

Método 3.

Puesto que los sucesos R y B son mutuamente excluyentes se deduce de (*4*), página 6, que

$$P(R \cup B) = P(R) + P(B) = \frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2}{3}$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL Y SUCESOS INDEPENDIENTES

1.17. Un dado honesto se lanza dos veces. Hallar la probabilidad de obtener 4, 5 ó 6 en el primer lanzamiento y 1, 2, 3 ó 4 en el segundo lanzamiento.

Sean A_1 el suceso "4, 5 ó 6 en el primer lanzamiento" y A_2 el suceso "1, 2, 3 ó 4 en el segundo lanzamiento". Luego estamos buscando $P(A_1 \cap A_2)$.

Método 1.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1) = P(A_1)\,P(A_2) = \left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

Hemos empleado aquí el hecho de que el resultado del segundo lanzamiento es *independiente* del primero así que $P(A_2 \mid A_1) = P(A_2)$. También hemos usado $P(A_1) = 3/6$ (ya que 4, 5 ó 6 son 3 resultados de las 6 probabilidades igualmente factibles) y $P(A_2) = 4/6$ (ya que 1, 2, 3 ó 4 son 4 resultados de las 6 probabilidades igualmente factibles).

Método 2.

Cada una de las 6 maneras en las cuales un dado cae en el primer lanzamiento puede asociarse con cada una de las 6 maneras en que cae en el segundo lanzamiento, un total de $6 \cdot 6 = 36$ maneras, todas igualmente factibles.

Cada una de las tres maneras en que A_1 ocurre puede asociarse con cada una de las 3 maneras en que A_2 ocurre para dar $3 \cdot 4 = 12$ maneras en que tanto A_1 como A_2 ocurren. Entonces

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Esto indica directamente que A_1 y A_2 son independientes puesto que

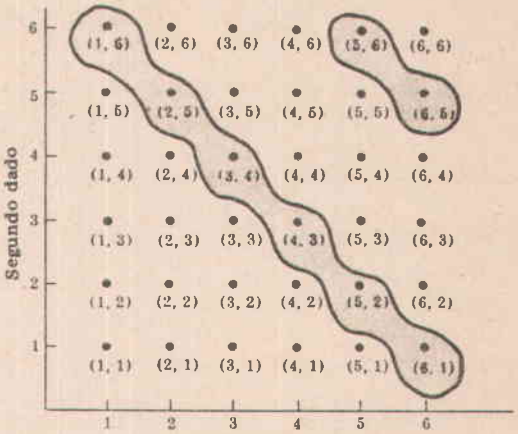
$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{3} = \left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right) = P(A_1)P(A_2)$$

1.18. Encontrar la probabilidad de no obtener un total de 7 u 11 en ninguno de los dos lanzamientos de un par de dados honrados.

El espacio muestral para cada lanzamiento de los dados se muestra en la Fig. 1-17. Por ejemplo (5,2) significa que el resultado del primer dado es 5 y el del segundo 2. Puesto que los dados son honestos y hay 36 puntos muestrales asignamos la probabilidad 1/36 para cada uno.

Si A es el suceso "7 u 11" entonces A se indica por la porción sombreada en la Fig. 1-17. Puesto que se incluyen 8 puntos tenemos que $P(A) = 8/36 = 2/9$. Se deduce que la probabilidad de no 7 u 11 está dada por

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$



Primer dado

Fig. 1-17

Utilizando subíndices 1, 2 para indicar 1o. y 2o. lanzamientos de los dados observamos que la probabilidad de no 7 u 11 en el primero o segundo lanzamientos está dada por

$$P(A_1')\,P(A_2' \mid A_1') = P(A_1')\,P(A_2') = \left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{49}{81}$$

empleando el hecho de que los lanzamientos son independientes.

1.19. Se extraen dos cartas de una baraja de 52 cartas. Hallar la probabilidad de que ambas sean ases si la carta (*a*) se remplaza, (*b*) no se remplaza.

Método 1.

Sea A_1 suceso "as en la primera extracción" y A_2 suceso "as en la segunda extracción". Entonces estamos buscando $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)$.

(*a*) Puesto que para la primera extracción hay 4 ases en las 52 cartas, $P(A_1) = 4/52$. También, si la carta se remplaza para la segunda extracción, entonces $P(A_2 \mid A_1) = 4/52$, puesto que también hay 4 ases en las 52 cartas para la segunda extracción. Entonces

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{52}\right) = \frac{1}{169}$$

(*b*) Como en la parte (*a*), $P(A_1) = 4/52$. Sin embargo si ocurre un as en la primera extracción quedarán 3 en las 51 cartas restantes, así que $P(A_2 \mid A_1) = 3/51$. Entonces

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right) = \frac{1}{221}$$

Método 2.

(*a*) La primera carta puede extraerse en una de las 52 maneras posibles y ya que hay remplazamiento la segunda carta también puede extraerse en una de las 52 maneras posibles. Así que ambas cartas pueden extraerse en (52)(52) maneras, todas igualmente factibles.

En este caso hay 4 maneras de sacar un as en la primera extracción y 4 maneras de sacar un as en la segunda extracción de tal forma que el número de maneras de sacar ases en la primera y segunda extracción es (4)(4). Así la probabilidad requerida es

$$\frac{(4)(4)}{(52)(52)} = \frac{1}{169}$$

(*b*) La primera carta puede extraerse en una de las 52 maneras posibles y ya que no hay remplazamiento la segunda carta puede extraerse en una de las 51 maneras posibles. Así ambas cartas pueden extraerse en (52)(51) maneras, todas igualmente factibles.

En este caso hay 4 maneras de sacar un as en la primera extracción y 3 maneras de sacar un as en la segunda extracción de tal forma que el número de maneras de sacar ases en la primera y segunda extracción es (4)(3). Así la probabilidad pedida es

$$\frac{(4)(3)}{(52)(51)} = \frac{1}{221}$$

1.20. Se extraen tres bolas sucesivamente de la caja del Problema 1.16. Hallar la probabilidad de que se extraigan en el orden roja, blanca y azul si las bolas (*a*) se remplazan, (*b*) no se remplazan.

Si R_1 = suceso "roja en la primera extracción", B_2 = suceso "blanca en la segunda extracción", A_3 = suceso "azul en la tercera extracción". Requerimos $P(R_1 \cap B_2 \cap A_3)$.

(*a*) Si cada bola se remplaza, entonces los sucesos son independientes y

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap B_2 \cap A_3) &= P(R_1)P(B_2 \mid R_1)P(A_3 \mid R_1 \cap B_2) \\ &= P(R_1)P(B_2)P(A_3) \\ &= \left(\frac{6}{6+4+5}\right)\left(\frac{4}{6+4+5}\right)\left(\frac{5}{6+4+5}\right) = \frac{8}{225} \end{aligned}$$

(*b*) Si no se remplazan las bolas, entonces los sucesos son dependientes y

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap B_2 \cap A_3) &= P(R_1)P(B_2 \mid R_1)P(A_3 \mid R_1 \cap B_2) \\ &= \left(\frac{6}{6+4+5}\right)\left(\frac{4}{5+4+5}\right)\left(\frac{5}{5+3+5}\right) = \frac{4}{91} \end{aligned}$$

1.21. Hallar la probabilidad de obtener al menos un 4 en dos lanzamientos de un dado honrado.

Sea A_1 = suceso "4 en el primer lanzamiento" y A_2 = suceso "4 en el segundo lanzamiento". Así

$A_1 \cup A_2$ = suceso "4 en el primer lanzamiento o 4 en el segundo lanzamiento o ambos"
= suceso "al menos un 4"

requerimos $P(A_1 \cup A_2)$.

Método 1.

Los sucesos A_1 y A_2 no son mutuamente excluyentes, pero son independientes. Por tanto, por (*10*) y (*21*)

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{11}{36} \end{aligned}$$

Método 2.

$$P(\text{al menos un } 4) + P(\text{ningún } 4) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces } P(\text{al menos un } 4) &= 1 - P(\text{ningún } 4) \\ &= 1 - P(\text{no 4 en 1er. lanzamiento y no 4 en el 2o. lanzamiento}) \\ &= 1 - P(A_1' \cap A_2') = 1 - P(A_1')P(A_2') \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{11}{36} \end{aligned}$$

Método 3.

Número total de maneras igualmente factibles en las que ambos dados pueden caer = 6 · 6 = 36.

También, número de maneras en las que A_1 ocurra pero no A_2 = 5
número de maneras en las que A_2 ocurra pero no A_1 = 5
número de maneras en las que tanto A_1 como A_2 ocurran = 1

Luego el número de maneras en las cuales por lo menos uno de los sucesos A_1 ó A_2 ocurra es $= 5 + 5 + 1 = 11$. Por tanto $P(A_1 \cup A_2) = 11/36$.

1.22. Un talego contiene 4 bolas blancas y 2 bolas negras; otro contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras. Si se extrae una bola de cada talego, hallar la probabilidad de que (*a*) ambas sean blancas, (*b*) ambas sean negras, (*c*) una sea blanca y una negra.

Sea B_1 = suceso "bola blanca del primer talego", B_2 = suceso "bola blanca del segundo talego".

(*a*)
$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) = P(B_1)P(B_2) = \left(\frac{4}{4+2}\right)\left(\frac{3}{3+5}\right) = \frac{1}{4}$$

(*b*)
$$P(B_1' \cap B_2') = P(P_1')P(B_2'|B_1') = P(B_1')P(B_2') = \left(\frac{2}{4+2}\right)\left(\frac{5}{3+5}\right) = \frac{5}{24}$$

(*c*) La probabilidad pedida es

$$1 - P(B_1 \cap B_2) - P(B_1' \cap B_2') = 1 - \frac{1}{4} - \frac{5}{24} = \frac{13}{24}$$

1.23. Demostrar el Teorema 1-23, página 8.

Demostramos el teorema para el caso $n = 2$. Extensiones para valores mayores de n se obtienen fácilmente.

Si el suceso A debe resultar en uno de los dos sucesos mutuamente excluyentes A_1, A_2 entonces

$$A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2)$$

Pero $A \cap A_1$ y $A \cap A_2$ son mutuamente excluyentes puesto que A_1 y A_2 lo son. Así por Axioma 3

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) \\ &= P(A_1)\,P(A \mid A_1) + P(A_2)\,P(A \mid A_2) \end{aligned}$$

empleando (*18*), página 8.

1.24. La caja *I* contiene 3 bolas rojas y 2 azules en tanto que la caja *II* contiene 2 bolas rojas y 8 azules. Se lanza una moneda honrada. Si se obtiene cara se saca una bola de la caja *I*; si se obtiene sello se saca una bola de la caja *II*. Hallar la probabilidad de sacar una bola roja.

Si R indica el suceso "sacar una bola roja" mientras que I y II indican los sucesos escoger caja I y caja II, respectivamente. Puesto que una bola roja puede resultar al escoger cualquiera de las cajas podemos emplear los resultados del Problema 1.23 con $A = R$, $A_1 = I$, $A_2 = II$. Así la probabilidad de sacar una bola roja es

$$P(R) = P(I)\,P(R \mid I) + P(II)\,P(R \mid II) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{3+2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{2+8}\right) = \frac{2}{5}$$

TEOREMA DE BAYES

1.25. Demostrar el teorema de Bayes (Teorema 1-24, página 9).

Puesto que A resulta en uno de los sucesos mutuamente excluyentes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tenemos por el Teorema 1-22 (Problema 1.23)

$$P(A) = P(A_1)\,P(A \mid A_1) + \cdots + P(A_n)\,P(A \mid A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\,P(A \mid A_k)$$

Por tanto

$$P(A_k \mid A) = \frac{P(A_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_k)\,P(A \mid A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\,P(A \mid A_k)}$$

1.26. Supóngase en el Problema 1.24 que quien lanza la moneda no revela si resulta cara o sello (de tal forma que la caja de la cual se sacó la bola no se revela), pero revela que se sacó una bola roja. ¿Cuál es la probabilidad de que se escogiera la caja I (es decir que el resultado de la moneda sea cara)?

Utilicemos la misma terminología del Problema 1.24, es decir, $A = R$, $A_1 = I$, $A_2 = II$. Buscamos la probabilidad de que se escoja la caja I y se conoce que se sacó una bola roja. Empleando la regla de Bayes con $n = 2$ esta probabilidad está dada por

$$P(I \mid R) = \frac{P(I)\,P(R \mid I)}{P(I)\,P(R \mid I) + P(II)\,P(R \mid II)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{3+2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{3+2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{2+8}\right)} = \frac{3}{4}$$

Así podemos dar una probabilidad de 3 a 1 que se escogió la caja I.

ANALISIS COMBINATORIO, CUENTA Y DIAGRAMAS ARBOL

1.27. Se va a conformar un comité de 3 miembros compuesto por un representante de los trabajadores, uno de la administración y uno del gobierno. Si hay 3 candidatos de los trabajadores, 2 de la administración y 4 del gobierno, determinar cuántos comités diferentes pueden conformarse, empleando (*a*) el principio fundamental de cuenta y (*b*) un diagrama árbol.

(*a*) Podemos elegir un representante de los trabajadores en 3 maneras diferentes y luego un representante de la administración en 2 formas diferentes. Así hay $3 \cdot 2 = 6$ maneras diferentes de elegir un representante de los trabajadores y de la administración. Con cada una de estas elecciones podemos escoger un representante del gobierno de 4 maneras diferentes. Así el número de los diferentes comités que pueden formarse es $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.

(*b*) Represéntense los 3 candidatos de los trabajadores por L_1, L_2, L_3; los candidatos de la administración por M_1, M_2; y los candidatos del gobierno por P_1, P_2, P_3, P_4. Entonces el diagrama árbol de la Fig. 1-18 muestra que hay en total 24 comisiones diferentes. De este diagrama árbol podemos listar todas las comisiones, por ejemplo $L_1M_1P_1$, $L_1M_1P_2$, etc.

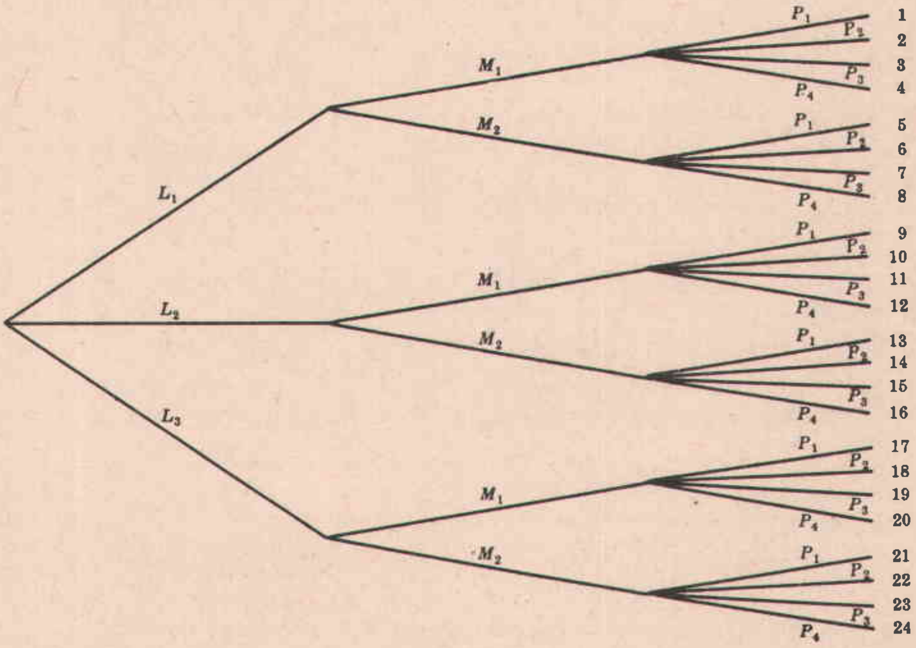


Fig. 1-18

PERMUTACIONES

1.28. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ordenarse 5 bolas en una fila?

Debemos ordenar 5 bolas en 5 posiciones así — — — — —. La primera posición puede ocuparse por cualquiera de las cinco bolas, es decir hay cinco maneras de llenar la primera posición. Cuando esto se haya hecho hay 4 maneras de llenar la segunda posición. Luego hay 3 maneras de llenar la tercera posición, 2 maneras de llenar la cuarta posición, y finalmente sólo 1 manera de llenar la última posición. Por tanto:

$$\text{El número de ordenaciones de las 5 bolas en una fila es} \; = \; 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \; = \; 5! \; = \; 120$$

En general,

$$\text{El número de ordenaciones de } n \text{ objetos diferentes en una fila es} \; = \; n(n-1)(n-2)\cdots 1 \; = \; n!$$

Esto se conoce como el número de *permutaciones* de n objetos diferentes tomados de n en n y se denota por ${}_nP_n$.

1.29. ¿De cuántas maneras pueden 10 personas sentarse en una banca si sólo hay 4 puestos disponibles?

El primer puesto puede ocuparse con cualquiera de las 10 personas y, cuando esto está hecho, hay 9 formas para ocupar el segundo puesto, 8 para ocupar el tercero y 7 para ocupar el cuarto. Por tanto:

$$\text{El número de ordenaciones de 10 personas tomadas de 4 en 4 es} \; = \; 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 \; = \; 5040$$

En general,

$$\text{El número de ordenaciones de } n \text{ objetos diferentes tomados de } r \text{ en } r \text{ es} \; = \; n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

Esto se conoce como el número de *permutaciones* de n objetos diferentes tomados de r en r y se denota por ${}_nP_r$. Obsérvese que cuando $r = n$, ${}_nP_n = n!$ como en el Problema 1.28.

1.30. Hallar el valor de (*a*) ${}_8P_3$, (*b*) ${}_6P_4$, (*c*) ${}_{15}P_1$, (*d*) ${}_3P_3$.

(*a*) ${}_8P_3 = 8\cdot 7\cdot 6 = 336$ (*b*) ${}_6P_4 = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 360$ (*c*) ${}_{15}P_1 = 15$ (*d*) ${}_3P_3 = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$

1.31. Se quieren sentar 5 hombres y 4 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los sitios pares. ¿De cuántas formas pueden sentarse?

Los hombres pueden sentarse de ${}_5P_5$ formas y las mujeres de ${}_4P_4$ formas. Cada ordenación de los hombres puede asociarse con cada ordenación de las mujeres. Así pues,

$$\text{El número de ordenaciones pedido es} \; = \; {}_5P_5\cdot {}_4P_4 \; = \; 5!\,4! \; = \; (120)(24) \; = \; 2880$$

1.32. ¿Cuántos números de cuatro cifras pueden formarse con los 10 dígitos 0,1,2,3,. . . ,9 si (*a*) los números pueden repetirse, (*b*) si los números no pueden repetirse, (*c*) si el último número ha de ser cero y los números no pueden repetirse?

(*a*) La primera cifra puede ser cualquiera entre 9 (puesto que el 0 no tiene valor). La segunda, tercera y cuarta pueden ser cualquiera de las 10. Entonces $9\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 9000$ son los números que pueden formarse.

(*b*) La primera puede ser cualquiera entre 9 (el 0 no).

La segunda puede ser cualquiera entre 9 (no puede ser la que ocupó el primer puesto).

La tercera puede ser cualquiera entre 8 (no pueden ser ninguna de las que ocupan los dos primeros puestos).

La cuarta puede ser cualquiera entre 7 (no pueden ser ninguna de las que ocupan los tres primeros puestos).

Entonces $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 4536$ son los números que pueden formarse.

Otro método.

El primer número puede ser cualquiera entre 9 y los tres restantes pueden elegirse de ${}_9P_3$ formas. Entonces $9\cdot {}_9P_3 = 9\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 4536$ son los números que pueden formarse.

(*c*) La primera cifra puede elegirse entre 9, la segunda entre 8 y la tercera entre 7. Entonces $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ son los números que pueden formarse.

Otro método.

El primer dígito puede elegirse de 9 maneras y los dos siguientes de ${}_8P_2$ formas. Entonces $9 \cdot {}_8P_2 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ será el número pedido.

1.33. Cuatro libros distintos de matemáticas, seis diferentes de física y dos diferentes de química se colocan en un estante. ¿De cuántas formas distintas es posible ordenarlos si (*a*) los libros de cada asignatura deben estar todos juntos, (*b*) solamente los libros de matemáticas deben estar juntos?

(*a*) Los libros de matemáticas pueden ordenarse entre ellos de ${}_4P_4 = 4!$ formas, los libros de física de ${}_6P_6 = 6!$ formas, los libros de química de ${}_2P_2 = 2!$ formas y los tres grupos de ${}_3P_3 = 3!$ formas.

$$\text{Entonces el número de ordenaciones pedido será} = 4!\,6!\,2!\,3! = 207\,360$$

(*b*) Considerar los cuatro libros de matemáticas como un solo libro. Entonces se tienen 9 libros que pueden ordenarse de ${}_9P_9 = 9!$ formas. En todos estos casos los libros de matemáticas están juntos. Pero los libros de matemáticas pueden ordenarse entre ellos de ${}_4P_4 = 4!$ formas.

$$\text{Entonces el número de ordenaciones pedido será} = 9!\,4! = 8\,709\,120$$

1.34. Se ordenan en una fila 5 bolas rojas, 2 bolas blancas y 3 bolas azules. Si las bolas de igual color no se distinguen entre sí ¿de cuántas formas posibles pueden ordenarse?

Supóngase que hay N diferentes ordenaciones. Multiplicando N por el número de ordenaciones (*a*) de las 5 bolas rojas entre sí, (*b*) de las 2 bolas blancas entre sí y (*c*) de las 3 bolas azules entre sí (es decir, multiplicando N por $5!\,2!\,3!$) se obtiene el número de ordenaciones de 10 bolas si todas ellas fuesen distintas, es decir, $10!$

Entonces $(5!\,2!\,3!)N = 10!$ y $N = 10!/(5!\,2!\,3!)$.

En general el número de ordenaciones diferentes de n objetos de los que n_1 son iguales, n_2 son iguales, . . . , n_k son iguales es $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$ donde, $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

1.35. ¿De cuántas formas pueden sentarse 7 personas alrededor de una mesa, si (*a*) pueden sentarse de cualquier forma, (*b*) si dos personas determinadas no deben estar una al lado de la otra?

(*a*) Considérese una de ellas sentada en cualquier parte. Entonces las 6 restantes pueden sentarse de $6! = 720$ formas, que es el total de casos que se dan en la ordenación de 7 personas en un círculo.

(*b*) Considérense las dos personas que no han de ir juntas como una sola. Entonces hay 6 personas para sentarse en círculo, que lo pueden hacer de $5!$ formas. Pero las dos personas consideradas como una sola pueden ordenarse entre sí de $2!$ formas. Así pues, el número de ordenaciones de 6 personas sentadas alrededor de una mesa con 2 determinadas de ellas sentadas juntas es de $5!\ 2! = 240$.

Entonces, mediante (*a*), se tiene el número total de formas en que 6 personas pueden sentarse alrededor de una mesa, de modo que dos de ellas no estén sentadas juntas es $720 - 240 = 480$ formas.

COMBINACIONES

1.36. ¿De cuántas formas pueden 10 objetos dividirse en dos grupos de 4 y 6 objetos respectivamente?

Esto es lo mismo que el número de ordenaciones de 10 objetos de los cuales 4 objetos son iguales y los otros 6 también son iguales entre sí. Por el Problema 1.34 esto es $\dfrac{10!}{4!\,6!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$.

El problema es equivalente a encontrar el número de grupos de 4 objetos que se pueden formar con 10 objetos dados (o de 6 objetos con 10 objetos dados), no teniendo en cuenta el orden de los objetos dentro del grupo. En general el número de grupos distintos de r objetos que se pueden formar con n objetos dados, se llama número de *combinaciones* de los n objetos tomados de r en r y se denota por ${}_nC_r$ ó $\binom{n}{r}$ y viene dado por

$$ {}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{{}_nP_r}{r!} $$

1.37. Hallar el valor de (*a*) ${}_7C_4$, (*b*) ${}_6C_5$, (*c*) ${}_4C_4$.

(*a*) $ {}_7C_4 = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4!} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 35.$

(*b*) $ {}_6C_5 = \frac{6!}{5!\,1!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{5!} = 6,$ ó ${}_6C_5 = {}_6C_1 = 6.$

(*c*) ${}_4C_4$ es el número de grupos de 4 objetos que se pueden formar con 4 objetos, lo que es evidentemente 1. Entonces ${}_4C_4 = 1$.

Nótese que formalmente ${}_4C_4 = \frac{4!}{4!\,0!} = 1$ si se *define* $0! = 1$.

1.38. ¿De cuántas formas puede elegirse una comisión de 5 personas de entre 9 personas?

$$ \binom{9}{5} = {}_9C_5 = \frac{9!}{5!\,4!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{5!} = 126 $$

1.39. De un total de 5 matemáticos y 7 físicos, se forma un comité de 2 matemáticos y 3 físicos. ¿De cuántas formas puede formarse, si (*a*) puede pertenecer a él cualquier matemático y físico, (*b*) un físico determinado debe pertenecer al comité, (*c*) dos matemáticos determinados no pueden estar en el comité?

(*a*) 2 matemáticos de un total de 5 pueden elegirse de ${}_5C_2$ formas.

3 físicos de un total de 7 pueden elegirse de ${}_7C_3$ formas.

$$ \text{Número total de selecciones posibles} = {}_5C_2\cdot{}_7C_3 = 10\cdot35 = 350 $$

(*b*). 2 matemáticos de un total de 5 pueden elegirse de ${}_5C_2$ formas.

2 físicos restantes de un total de 6 pueden elegirse de ${}_6C_2$ formas.

$$ \text{Número total de selecciones posibles} = {}_5C_2\cdot{}_6C_2 = 10\cdot15 = 150 $$

(*c*) 2 matemáticos de un total de 3 pueden elegirse de ${}_3C_2$ formas.

3 físicos de un total de 7 dan ${}_7C_3$ formas.

$$ \text{Número total de selecciones posibles} = {}_3C_2\cdot{}_7C_3 = 3\cdot35 = 105 $$

1.40. ¿Cuántas ensaladas pueden prepararse con lechuga, escarola, endibia, berro y achicoria?

Cada verdura puede tratarse de 2 formas, como si se escoge o como si se rechaza. Puesto que cada una de las 2 formas de considerar una verdura está asociada con 2 formas de considerar cada una de las otras verduras, el número de formas de considerar las cinco verduras es 2^5 formas. Pero las 2^5 formas incluyen el caso de no seleccionar ninguna verdura. Por tanto

$$ \text{El número de ensaladas es} = 2^5 - 1 = 31 $$

Otro método.

Puede seleccionarse 1 de las 5 verduras, 2 de las 5 verduras, . . . , 5 de las 5 verduras. Entonces el número requerido de ensaladas es

$$ {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31 $$

En general, para cualquier entero positivo n, ${}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n = 2^n - 1$.

1.41. Con 7 consonantes y 5 vocales diferentes, ¿cuántas palabras pueden formarse, que consten de 4 consonantes y 3 vocales? No es necesario que las palabras tengan significado.

Las 4 consonantes pueden elegirse de ${}_7C_4$ formas, las 3 vocales de ${}_5C_3$ formas y las 7 letras resultantes (4 consonantes, 3 vocales) pueden ordenarse entre sí de ${}_7P_7 = 7!$ formas. Entonces:

$$\text{El número de palabras es } {}_7C_4 \cdot {}_5C_3 \cdot 7! = 35 \cdot 10 \cdot 5040 = 1\,764\,000$$

COEFICIENTES BINOMIALES

1.42. Demostrar que $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$.

Tenemos que

$$\begin{aligned}\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{r!\,(n-r)!} &= \frac{(n-r+r)(n-1)!}{r!\,(n-r)!}\\ &= \frac{(n-r)(n-1)!}{r!\,(n-r)!} + \frac{r(n-1)!}{r!\,(n-r)!}\\ &= \frac{(n-1)!}{r!\,(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}\\ &= \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}\end{aligned}$$

El resultado tiene la siguiente aplicación interesante. Si escribimos los coeficientes de la expansión binomial de $(x+y)^n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ obtenemos la distribución conocida como el *triángulo de Pascal:*

$$\begin{array}{lc}
n = 0 & 1 \\
n = 1 & 1 \quad 1 \\
n = 2 & 1 \quad 2 \quad 1 \\
n = 3 & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
n = 4 & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
n = 5 & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
n = 6 & 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
\end{array}$$

etc.

Un resultado en cualquier renglón puede obtenerse sumando los dos coeficientes del renglón anterior que se encuentren inmediatamente a la izquierda y a la derecha. Así $10 = 4 + 6$, $15 = 10 + 5$, etc.

1.43. Hallar el término constante en la expansión de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$.

De acuerdo al teorema del binomio

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (x^2)^k \left(\frac{1}{x}\right)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} x^{3k-12}$$

El término constante corresponde a aquel para el cual $3k - 12 = 0$, es decir $k = 4$, y por tanto está dado por

$$\binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$$

PROBABILIDAD UTILIZANDO ANALISIS COMBINATORIO

1.44. Una caja contiene 8 bolas rojas, 3 blancas y 9 azules. Si se extraen 3 bolas aleatoriamente sin remplazamiento, determinar la probabilidad de que (*a*) las 3 bolas sean rojas, (*b*) las 3 bolas sean blancas, (*c*) 2 sean rojas y 1 blanca, (*d*) al menos 1 sea blanca, (*e*) se extraiga una de cada color, (*f*) las bolas sean extraídas en el orden rojo, blanco, azul.

(*a*) **Método 1.**

Sean R_1, R_2, R_3 los sucesos, "bola roja en la primera extracción", "bola roja en la segunda extracción", "bola roja en la tercera extracción", respectivamente. Así $R_1 \cap R_2 \cap R_3$ representa el suceso "las 3 bolas extraídas son rojas". De esta manera tenemos

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)\,P(R_2 \mid R_1)\,P(R_3 \mid R_1 \cap R_2) = \left(\frac{8}{20}\right)\left(\frac{7}{19}\right)\left(\frac{6}{18}\right) = \frac{14}{285}$$

Método 2.

$$\text{Probabilidad pedida} = \frac{\text{número de grupos de 3 bolas entre 8 rojas}}{\text{número de grupos de 3 bolas entre 20}} = \frac{{}_8C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{14}{285}$$

(*b*) Empleando el segundo método indicado en la parte (*a*),

$$P(\text{3 bolas blancas}) = \frac{{}_3C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{1}{1140}$$

También puede utilizarse el primer método indicado en la parte (*a*).

(*c*) $$P(\text{2 bolas rojas y 1 blanca}) = \frac{(\text{grupos de 2 entre 8 bolas rojas})(\text{grupos de 1 entre 3 bolas blancas})}{\text{número de grupos de 3 bolas entre 20}} = \frac{({}_8C_2)({}_3C_1)}{{}_{20}C_3} = \frac{7}{95}$$

(*d*) $P(\text{ninguna blanca}) = \dfrac{{}_{17}C_3}{{}_{20}C_3} = \dfrac{34}{57}$. Entonces

$$P(\text{al menos 1 blanca}) = 1 - \frac{34}{57} = \frac{23}{57}$$

(*e*) $$P(\text{1 de cada color}) = \frac{({}_8C_1)({}_3C_1)({}_9C_1)}{{}_{20}C_3} = \frac{18}{95}$$

(*f*) $$\text{P(extraer las bolas en orden rojo, blanco, azul)} = \frac{1}{3!}P(\text{1 de cada color}) = \frac{1}{6}\left(\frac{18}{95}\right) = \frac{3}{95}, \text{ usando } (e)$$

Otro método.

$$P(R_1 \cap B_2 \cap A_3) = P(R_1)\,P(B_2 \mid R_1)\,P(A_3 \mid R_1 \cap B_2) = \left(\frac{8}{20}\right)\left(\frac{3}{19}\right)\left(\frac{9}{18}\right) = \frac{3}{95}$$

1.45. Se extraen 5 cartas de una baraja de 52 cartas. Hallar la probabilidad de extraer (*a*) 4 ases, (*b*) 4 ases y un rey, (*c*) 3 dieces y 2 jotas, (*d*) un 9, 10, jota, reina, rey en cualquier orden, (*e*) 3 de un palo y 2 de otro, (*f*) al menos 1 as.

(*a*) $$P(\text{4 ases}) = \frac{({}_4C_4)({}_{48}C_1)}{{}_{52}C_5} = \frac{1}{54\,145}$$

(*b*) $$P(\text{4 ases y 1 rey}) = \frac{({}_4C_4)({}_4C_1)}{{}_{52}C_5} = \frac{1}{649\,740}$$

(*c*) $P(\text{3 dieces y 2 jotas}) = \dfrac{({}_4C_3)({}_4C_2)}{{}_{52}C_5} = \dfrac{1}{108\,290}$

(*d*) $P(\text{nueve, diez, jota, reina, rey}) = \dfrac{({}_4C_1)({}_4C_1)({}_4C_1)({}_4C_1)({}_4C_1)}{{}_{52}C_5} = \dfrac{64}{162\,435}$

(*e*) $P(\text{3 de un palo, 2 de otro}) = \dfrac{(4 \cdot {}_{13}C_3)(3 \cdot {}_{13}C_2)}{{}_{52}C_5} = \dfrac{429}{4165}$

puesto que hay 4 formas de escoger el primer palo y 3 formas de escoger el segundo.

(*f*) $P(\text{ningún as}) = \dfrac{{}_{48}C_5}{{}_{52}C_5} = \dfrac{35\,673}{54\,145}$. Luego $P(\text{al menos un as}) = 1 - \dfrac{35\,673}{54\,145} = \dfrac{18\,472}{54\,145}$.

1.46. Determinar la probabilidad de tres seises en 5 lanzamientos de un dado honrado.

Represéntense los lanzamientos del dado por cinco espacios — — — — —. Cada espacio tendrá los sucesos 6 o no 6 (6′). Por ejemplo, tres 6 y dos no 6 pueden ocurrir como 6 6 6′ 6 6′ ó 6 6′ 6 6′ 6, etc.

Así la probabilidad del resultado 6 6 6′ 6 6′ es

$$P(6\,6\,6'\,6\,6') = P(6)\,P(6)\,P(6')\,P(6)\,P(6') = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

puesto que suponemos que los sucesos son independientes. Análogamente

$$P = \left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

para todos los otros resultados en los cuales ocurren tres 6 y dos no 6. Pero hay ${}_5C_3 = 10$ de estos sucesos y son mutuamente excluyentes. Por tanto la probabilidad pedida es

$$P(6\,6\,6'\,6\,6' \text{ ó } 6\,6'\,6\,6'\,6 \text{ ó } \ldots) = {}_5C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5!}{3!\,2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{3888}$$

En general, si $p = P(A)$ y $q = 1 - p = P(A')$, por el mismo razonamiento anterior la probabilidad de obtener exactamente x veces A en n ensayos independientes es

$${}_nC_x p^x q^{n-x} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

1.47. Un estante tiene 6 libros de matemáticas y 4 de física. Hallar la probabilidad de que 3 libros · determinados de matemáticas estén juntos.

Los libros pueden ordenarse entre sí de ${}_{10}P_{10} = 10!$ formas. Supongamos que los 3 libros determinados de matemáticas se remplazan por 1. Así tenemos un total de 8 libros que pueden ordenarse entre sí de ${}_8P_8 = 8!$ formas. Pero a su vez los 3 libros de matemáticas pueden ordenarse entre sí de ${}_3P_3 = 3!$ formas. La probabilidad pedida está dada por

$$\frac{8!\,3!}{10!} = \frac{1}{15}$$

APROXIMACION DE STIRLING A $n!$

1.48. Hallar el valor de 50!

Para n muy grande, $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$. Por tanto

$$50! \sim \sqrt{2\pi(50)}\, 50^{50} e^{-50} \equiv N$$

Para evaluar N utilizamos logaritmos de base 10. Así

$$\begin{aligned}\log N &= \log(\sqrt{100\pi}\, 50^{50} e^{-50}) \\ &= \frac{1}{2}\log 100 + \frac{1}{2}\log\pi + 50\log 50 - 50\log e\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\log 100 + \frac{1}{2}\log 3\,142 + 50 \log 50 - 50 \log 2\,718$$

$$= \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(0.4972) + 50(1.6990) - 50(0.4343) = 64.4836$$

de donde $N = 3.04 \times 10^{64}$, un número que tiene 65 dígitos.

PROBLEMAS DIVERSOS

1.49. A y B juegan 12 partidas de ajedrez de las cuales A gana 6, B gana 4 y 2 terminan en tablas. Acuerdan jugar un torneo consistente en 3 partidas. Hallar la probabilidad de que (*a*) A gane las tres partidas, (*b*) dos partidas terminen en tablas, (*c*) A y B ganen alternativamente, (*d*) B gane al menos una partida.

Denótese por

A_1, A_2, A_3 los sucesos "A gana" la 1a., 2a., y 3a. partida respectivamente,
B_1, B_2, B_3 los sucesos "B gana" la 1a., 2a., y 3a. partida respectivamente.

Atendiendo a la experiencia que han tenido (probabilidad empírica) suponemos que

$$P(\text{A gane una partida}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \qquad P(\text{B gane una partida}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

(*a*) $P(\text{A gane las tres partidas}) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$

suponiendo que los resultados de cada partida son independientes de los resultados de las otras. (Esta suposición no sería justificable si un jugador fuera *influenciado sicológicamente* por los resultados anteriores).

(*b*) En cualquier partida la probabilidad de no tablas (esto es A o B gana) es $q = 1/2 + 1/3 = 5/6$ y la probabilidad de tablas es $p = 1 - q = 1/6$. Así la probabilidad de 2 tablas en 3 partidas es (véase Problema 1.46)

$$\binom{3}{2} p^2 q^{3-2} = 3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{72}$$

(*c*) $P(\text{A y B ganen alternativamente}) = P(\text{A gane, luego B, luego A } o \text{ B gane, luego A, luego B})$

$$\begin{aligned} &= P(A_1 \cap B_2 \cap A_3) + P(B_1 \cap A_2 \cap B_3) \\ &= P(A_1)\,P(B_2)\,P(A_3) + P(B_1)\,P(A_2)\,P(B_3) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{36} \end{aligned}$$

(*d*) $P(\text{B gane al menos una partida}) = 1 - P(\text{B no gane ninguna partida})$

$$\begin{aligned} &= 1 - P(B_1' \cap B_2' \cap B_3') \\ &= 1 - P(B_1')\,P(B_2')\,P(B_3') \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{19}{27} \end{aligned}$$

1.50 A y B juegan lanzando alternativamente un par de dados. Quien obtenga primero un total de 7 gana el juego. Hallar la probabilidad de que (*a*) quien lanza primero los dados gane, (*b*) quien lanza segundo los dados gane.

(*a*) La probabilidad de obtener 7 en un sólo lanzamiento de una pareja de dados, supuestamente honrados, es 1/6 como se determinó en el Problema 1.18 y Fig. 1-17. Si suponemos que A es el primero en lanzar entonces A ganará en cualquiera de los casos siguientes mutuamente excluyentes con las probabilidades asociadas indicadas:

(1) A gana en el 1er. lanzamiento. Probabilidad = 1/6.
(2) A pierde en el 1er. lanzamiento, luego pierde B, luego gana A. Probabilidad = $(\frac{5}{6})(\frac{5}{6})(\frac{1}{6})$.

(3) A pierde en el 1er. lanzamiento, pierde B, pierde A, pierde B, gana A.
Probabilidad $= (\frac{5}{6})(\frac{5}{6})(\frac{5}{6})(\frac{5}{6})(\frac{1}{6})$.

……

Así la probabilidad de que A gane es

$$\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)+\cdots$$

$$= \frac{1}{6}\left[1+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^4+\cdots\right] = \frac{1/6}{1-(5/6)^2} = \frac{6}{11}.$$

donde hemos utilizado el resultado 6 del Apéndice A con $x = (5/6)^2$.

(*b*) Análogamente la probabilidad de que B gane el juego es

$$\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)+\cdots = \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left[1+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^4+\cdots\right]$$

$$= \frac{5/36}{1-(5/6)^2} = \frac{5}{11}$$

Así iríamos 6 a 5 a que el primero que lance gana. Nótese que la probabilidad de un empate es cero ya que

$$\frac{6}{11}+\frac{5}{11} = 1$$

Esto no sería verdadero si el juego fuera limitado. Véanse Problemas 1.151 y 1.152.

1.51. Una máquina produce un total de 12 000 tornillos diarios de los cuales en promedio el 3% son defectuosos. Hallar la probabilidad de que de 600 tornillos seleccionados aleatoriamente 12 sean defectuosos.

De 12 000 tornillos, el 3% ó 360 son defectuosos y 11 640 no lo son. Así

$$\text{Probabilidad pedida} = \frac{{}_{360}C_{12}\ {}_{11\,640}C_{588}}{{}_{12\,000}C_{600}}$$

1.52. Una caja contiene 5 bolas rojas y 4 blancas. Se extraen dos bolas sucesivamente de la caja sin remplazamiento y se observa que la segunda es blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera también sea blanca?

Método 1.

Si B_1, B_2 son los sucesos "blanca en la primera extracción", "blanca en la segunda extracción", respectivamente, estamos buscando $P(B_1 | B_2)$. Este resultado se obtiene así

$$P(B_1 | B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{(4/9)(3/8)}{4/9} = \frac{3}{8}$$

Método 2.

Puesto que se sabe que la segunda bola es blanca solamente hay 3 formas de las restantes 8 para que la primera sea blanca, de tal manera que la probabilidad es 3/8.

1.53. Las probabilidades de que un esposo y una esposa estén vivos dentro de 20 años están dadas por 0.8 y 0.9 respectivamente. Hallar la probabilidad de que en 20 años (*a*) ambos vivan; (*b*) ninguno viva; (*c*) al menos uno viva.

Sean H, W los sucesos que el esposo y la esposa, respectivamente, estén vivos en 20 años. Entonces $P(H) = 0.8$, $P(W) = 0.9$. Suponemos que H y W son sucesos independientes, lo cual puede ser o no razonable.

(*a*) $P(\text{ambos vivan}) = P(H \cap W) = P(H)\,P(W) = (0.8)(0.9) = 0.72$

(*b*) $P(\text{ninguno viva}) = P(H' \cap W') = P(H')\,P(W') = (0.2)(0.1) = 0.02$

(*c*) P(al menos uno viva) $= 1 - P$(ninguno viva) $= 1 - 0.02 = 0.98$

1.54. Una secretaria ineficiente coloca n cartas diferentes en n sobres con destinos diferentes aleatoriamente. Hallar la probabilidad de que al menos una de las cartas llegue a la destinación apropiada.

Denótense por $A_1, A_2, \ldots, A_n$ los sucesos primera, segunda, . . . , n-ésima carta se encuentra en el sobre correcto. Entonces el suceso al menos una carta en el sobre correcto es $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ y deseamos hallar $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$. A partir de la generalización de los resultados (*10*) y (*11*), página 7, (véase Problema 1.79) tenemos

$$(1) \qquad P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum P(A_k) - \sum P(A_j \cap A_k) + \sum P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

donde $\Sigma\, P(A_k)$ es la suma de las probabilidades de A_k desde 1 hasta n, $\Sigma\, P(A_j \cap A_k)$ es la suma de las probabilidades de $A_j \cap A_k$ con j y k desde 1 hasta n y $k > j$, etc. Tenemos por ejemplo lo siguiente:

$$(2) \qquad P(A_1) = \frac{1}{n} \quad \text{y análogamente} \quad P(A_k) = \frac{1}{n}$$

ya que de los n sobres solamente 1 tendrá la dirección apropiada. También

$$(3) \qquad P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1) = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)$$

puesto que si la primera letra está en el sobre apropiado entonces sólo 1 de los restantes $n - 1$ sobres estará correcto. De una manera similar hallamos

$$(4) \qquad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{1}{n-2}\right)$$

y así sucesivamente, finalmente

$$(5) \qquad P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)\cdots\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{n!}$$

Entonces en la suma $\Sigma\, P(A_j \cap A_k)$ hay $\binom{n}{2} = {}_nC_2$ términos que tienen el valor dado por (*3*).

Análogamente en $\Sigma\, P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ hay $\binom{n}{3} = {}_nC_3$ términos que tienen el valor dado por (*4*). Por tanto la probabilidad pedida es

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= \binom{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right) - \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right) + \binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{1}{n-2}\right) \\ &\quad - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\left(\frac{1}{n!}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Del cálculo sabemos que (véase Apéndice A)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

así que para $x = -1$

$$e^{-1} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots\right)$$

ó

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots = 1 - e^{-1}$$

Se deduce que si n es grande la probabilidad pedida es aproximadamente $1 - e^{-1} = 0.6321$. Esto quiere decir que hay una buena probabilidad de que al menos una carta llegue al destino apropiado. El resultado es asombroso ya que la probabilidad permanece casi constante para $n > 10$. Por tanto, la probabilidad de que al menos una carta llegue a su destino apropiado es casi la misma si n es 10 ó 10 000.

1.55. Hallar la probabilidad de que n personas ($n \leqq 365$) seleccionadas aleatoriamente tengan n días de cumpleaños diferentes.

Suponemos que solamente hay 365 días en el año y que todos los días de cumpleaños son igualmente probables, suposiciones que no se cumplen generalmente en la realidad.

La primera de las n personas tiene lógicamente algún cumpleaños con probabilidad $365/365 = 1$. Entonces, si la segunda persona tiene un cumpleaños diferente, debe ocurrir en uno de los otros 364 días. Así la probabilidad de que la segunda persona tenga un cumpleaños diferente de la primera es 364/365. Análogamente la probabilidad de que la tercera persona tenga un cumpleaños diferente de las dos primeras es 363/365. Finalmente, la probabilidad de que la n-ésima persona tenga un cumpleaños diferente de las otras es $(365 - n + 1)/365$. Por tanto tenemos

$$\begin{aligned} P(n \text{ cumpleaños diferentes}) &= \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdots\frac{365-n+1}{365} \\ &= \left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{365}\right) \end{aligned}$$

1.56. Determinar cuántas personas se necesitan en el Problema 1.55 para que la probabilidad de cumpleaños distintos sea menor que 1/2.

Denotando la probabilidad dada por p y tomando logaritmos naturales hallamos

$$(1) \qquad \ln p = \ln\left(1-\frac{1}{365}\right) + \ln\left(1-\frac{2}{365}\right) + \cdots + \ln\left(1-\frac{n-1}{365}\right)$$

Pero sabemos de cálculo (Apéndice A, fórmula 7) que

$$(2) \qquad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$$

así que (*1*) puede escribirse como

$$(3) \qquad \ln p = -\left[\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{365}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{(365)^2}\right] - \cdots$$

Empleando los hechos de que para $n = 2, 3, \ldots$ (Apéndice A, fórmulas 1 y 2)

$$(4) \qquad 1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad 1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

obtenemos para (*3*)

$$(5) \qquad \ln p = -\frac{n(n-1)}{730} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{12(365)^2} - \cdots$$

Para n pequeño comparado con 365, por ejemplo $n < 30$, el segundo término y los términos superiores a la derecha de (*5*) son despreciables comparados con el primer término, así que una buena aproximación en este caso es

$$(6) \qquad \ln p = -\frac{n(n-1)}{730}$$

Para $p = 1/2$, $\ln p = -\ln 2 = -0.693$. Por tanto tenemos

$$(7) \qquad \frac{n(n-1)}{730} = 0.693 \quad \text{ó} \quad n^2 - n - 506 = 0 \quad \text{ó} \quad (n-23)(n+22) = 0$$

así que $n = 23$. Por tanto nuestra conclusión es que si n es mayor que 23 podemos decir con mayor seguridad que al menos dos personas cumplen años el mismo día.

Problemas suplementarios

CONJUNTOS

1.57. Sea A el conjunto de los números naturales entre 5 y 15 que son pares. Describir A de acuerdo al (*a*) método de extensión, (*b*) método de comprensión.

1.58. Sea $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 \leqq 16\}$. Determinar si $A \subset B$ o no.

1.59. Demostrar que para cualquier conjunto A tenemos $A \subset A$.

1.60. Estudiar la verdad o falsedad de las proposiciones siguientes. (*a*) Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, entonces $A \subset B$, $A \supset B$, ó $A = B$. (*b*) Si x y y son dos números reales cualesquiera, entonces $x < y$, $x > y$ ó $x = y$.

1.61. Demostrar que cualquier subconjunto del conjunto vacío debe ser el conjunto vacío.

1.62. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto o clase de todos los conjuntos que no son elementos de ellos mismos. (*a*) Demostrar que si $\mathcal{S} \in \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{S} \notin \mathcal{S}$. (*b*) Demostrar que si $\mathcal{S} \notin \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{S} \in \mathcal{S}$. La paradoja descrita se conoce como la *paradoja de Russell.*

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS, DIAGRAMAS DE VENN Y TEOREMAS SOBRE CONJUNTOS

1.63. Sea un universo $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y supóngase que los subconjuntos de $\mathcal{U}$ son $A = \{1, 5\}$, $B = \{2, 5, 3\}$, $C = \{4, 2\}$. Encontrar (*a*) $A \cup (B \cup C)$, (*b*) $(A \cup B) \cup C$, (*c*) $A \cap (B \cup C)$, (*d*) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, (*e*) $A' \cap (B' \cap C')$, (*f*) $(A \cup B) - (A \cup C)$, (*g*) $(A \cap C)' \cup B$, (*h*) $A - (B' \cup C')$.

1.64. Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de todos los enteros no negativos y considérense los subconjuntos

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero par, } 1 \leqq x < 6\} \quad \text{y} \quad B = \{x \mid x \text{ es un número primo, } 0 < x \leqq 4\}$$

Encontrar (*a*) $A \cup B$, (*b*) $A \cap B$, (*c*) $A' \cap B'$, (*d*) $A - B$, (*e*) $B - A$, (*f*) $(A - B) \cup (B - A)$.

1.65. Emplear un diagrama de Venn para dibujar cada uno de los conjuntos siguientes:

(*a*) $A \cap (B \cup C)$ (*c*) $A' \cap (B \cup C)'$ (*e*) $A' - (B \cup C)'$

(*b*) $A \cup (B \cap C)$ (*d*) $A - (B \cap C)$

1.66. ¿Es $(A - B)' = A' - B'$? Justificar la solución.

1.67. Demostrar el (*a*) Teorema 1-2, página 3, (*b*) Teorema 1-3, página 3, (*c*) Teorema 1-4, página 3.

1.68. (*a*) Demostrar la segunda ley De Morgan, Teorema 1-12*b*, página 3, y (*b*) ilustrarla utilizando un diagrama de Venn.

1.69. Generalizar las primera y segunda leyes De Morgan a cualquier número de conjuntos. (Véase Problema 1.7).

1.70. Ilustrar el principio de dualidad haciendo referencia a los teoremas de la página 3.

1.71. Demostrar que $(A - B) \cup B = A$ sólo si $B \subset A$ e ilustrarlo utilizando un diagrama de Venn.

1.72. Afirmar o negar: Si $A - B = \emptyset$, entonces $A = B$.

1.73. Demostrar que $A \cup B = [A - (A \cap B)] \cup [B - (A \cap B)] \cup (A \cap B)$ e ilustrarlo por un diagrama de Venn.

1.74. Generalizar el resultado del Problema 1.9.

EXPERIMENTOS ALEATORIOS, ESPACIOS MUESTRALES Y SUCESOS

1.75. Describir un espacio muestral para cada uno de los siguientes experimentos aleatorios: (*a*) 3 lanzamientos de una moneda, (*b*) el número de fumadores en un grupo de 500 hombres, (*c*) lanzar una moneda hasta que aparezca un sello, (*d*) el número de llamadas recibidas en una central telefónica, (*e*) el número de partículas nucleares que entran a un contador Geiger, (*f*) lanzar una moneda y un dado.

1.76. Un experimento consiste en el lanzamiento de una moneda y un dado. Si A es el suceso "cara" en el lanzamiento de la moneda y B es el suceso "3 ó 6" en el lanzamiento del dado, formule en palabras el significado de cada una de las operaciones siguientes: (*a*) A', (*b*) B', (*c*) $A \cap B$, (*d*) $A \cap B'$, (*e*) $A - B$, (*f*) $B - A$, (*g*) $A' \cup B$.

TEOREMAS SOBRE PROBABILIDAD

1.77. Completar la demostración en el Problema 1.14(*b*) demostrando (sin emplear el diagrama de Venn) que

$$A \cup B = A \cup [B-(A \cap B)]$$

donde A y $B-(A \cap B)$ son mutuamente excluyentes.

1.78. Demostrar el resultado (*11*), página 7.

1.79. Generalizar los resultados (*10*) y (*11*), página 7, y así demostrar el resultado (*1*) del Problema 1.54, página 30.

1.80. Demostrar que $P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$.

CALCULO DE PROBABILIDADES

1.81. Determinar la probabilidad p, o un estimador de ella, para cada uno de los sucesos siguientes:

(*a*) La aparición de un rey, as, jota de tréboles o reina de diamantes al extraer una sola carta de una baraja común de 52 cartas.
(*b*) La suma 8 aparezca en un solo lanzamiento de un par de dados honrados.
(*c*) Encontrar un tornillo defectuoso si después de examinar 600 tornillos se han encontrado 12 defectuosos.
(*d*) Un 7 u 11 resulte en un solo lanzamiento de un par de dados honrados.
(*e*) Al menos aparezca una cara en tres lanzamientos de una moneda honrada.

1.82. Un experimento consiste en la sucesiva extracción de tres cartas de una baraja. Sea A_1 el suceso "rey en la primera extracción", A_2 el suceso "rey en la segunda extracción", y A_3 el suceso "rey en la tercera extracción". Explicar el significado de cada una de las siguientes:

(*a*) $P(A_1 \cap A_2')$, (*b*) $P(A_1 \cup A_2)$, (*c*) $P(A_1' \cup A_2')$, (*d*) $P(A_1' \cap A_2' \cap A_3')$, (*e*) $P[(A_1 \cap A_2) \cup (A_2' \cap A_3)]$.

1.83. Se extrae una bola aleatoriamente de un caja que contiene 10 bolas rojas, 30 blancas, 20 azules y 15 naranjas. Hallar la probabilidad de que sea (*a*) naranja o roja, (*b*) ni roja ni azul, (*c*) no azul, (*d*) blanca, (*e*) roja, blanca o azul.

1.84. Se extraen dos bolas sucesivamente de la caja del Problema 1.83, remplazando la bola extraída después de cada extracción. Hallar la probabilidad de que (*a*) ambas sean blancas, (*b*) la primera sea roja y la segunda sea blanca, (*c*) ninguna sea naranja, (*d*) sean rojas o blancas o de ambos colores (roja y blanca), (*e*) la segunda no sea azul, (*g*) al menos una sea azul, (*h*) máximo una sea roja, (*i*) la primera sea blanca pero la segunda no, (*j*) solamente una sea roja.

1.85. Resolver el Problema 1.84 si no hay remplazamiento después de cada extracción.

PROBABILIDAD CONDICIONAL Y SUCESOS INDEPENDIENTES

1.86. Una caja contiene 2 bolas rojas y 3 azules. Hallar la probabilidad de que si dos bolas se extraen aleatoriamente (sin remplazamiento) (*a*) ambas sean azules, (*b*) ambas sean rojas, (*c*) una sea roja y la otra azul.

1.87. Hallar la probabilidad de extraer 3 ases aleatoriamente de una baraja de 52 cartas si las cartas (*a*) se remplazan, (*b*) no se remplazan.

1.88. Si al menos un hijo en una familia con dos hijos es un niño ¿cuál es la probabilidad de que ambos hijos sean niños?

1.89. Demostrar que la probabilidad condicional definida por (*17*), página 8, satisface los axiomas de probabilidad en la página 6 y por tanto todos los teoremas sobre probabilidad.

1.90. Demostrar que si $P(A) > P(B)$ entonces $P(A \mid B) > P(B \mid A)$.

1.91. Si A es independiente de B demostrar que (*a*) A es independiente de B', (*b*) A' es independiente de B.

1.92. Si A, B, C son sucesos independientes, demostrar que (*a*) A y $B \cup C$, (*b*) A y $B \cap C$, (*c*) A y $B - C$, son independientes.

1.93. Sea A_1 = suceso "número impar en el primer dado", A_2 = suceso "número impar en el segundo dado", A_3 = suceso "total impar en ambos dados". Demostrar que $A_1, A_2; A_2, A_3; A_1, A_3$ son independientes pero que A_1, A_2, A_3 no son independientes.

1.94. La caja *I* contiene 3 bolas rojas y 5 blancas, en tanto que la caja *II* contiene 4 bolas rojas y 2 blancas. Se escoge una bola aleatoriamente de la primera caja y se coloca en la segunda caja sin observar su color. Luego se extrae una bola de la segunda caja. Hallar la probabilidad de que sea blanca.

TEOREMA O REGLA DE BAYES

1.95. Una caja contiene 3 bolas azules y 2 rojas mientras que otra caja contiene 2 bolas azules y 5 rojas. Una bola extraída aleatoriamente de una de las cajas resulta azul. ¿Cuál es la probabilidad de haberla extraído de la primera caja?

1.96. Tres joyeros idénticos tienen dos compartimientos. En cada compartimiento del primer joyero hay un reloj de oro. En cada compartimiento del segundo joyero hay un reloj de plata. En el tercer joyero en un compartimiento hay un reloj de oro, en tanto que en el otro hay un reloj de plata. Si seleccionamos un joyero aleatoriamente, abrimos uno de los compartimientos y hallamos un reloj de plata, ¿cuál es la probabilidad de que el otro compartimiento tenga un reloj de oro?

1.97. La urna I tiene 2 bolas blancas y 3 negras; la urna II, 4 blancas y 1 negra; y la urna III, 3 blancas y 4 negras. Se selecciona una urna aleatoriamente y una bola extraída aleatoriamente es blanca. Hallar la probabilidad de haber escogido la urna I.

ANALISIS COMBINATORIO, CUENTA Y DIAGRAMAS ARBOL

1.98. Se lanza una moneda tres veces. Utilizar un diagrama árbol para determinar las diferentes posibilidades que pueden suceder.

1.99. Se extraen tres cartas aleatoriamente (sin remplazamiento) de una baraja de 52 cartas. Utilizar un diagrama árbol para determinar el número de maneras en las que se puede extraer (*a*) un diamante y un trébol y un corazón en secuencia (*b*) dos corazones y luego un trébol o una pica.

1.100. ¿De cuántas maneras pueden colocarse 3 monedas diferentes en 2 posiciones diferentes?

PERMUTACIONES

1.101. Hallar el valor de (*a*) $_4P_2$, (*b*) $_7P_5$, (*c*) $_{10}P_3$.

1.102. ¿Para qué valor de n es $_{n+1}P_3 = {}_nP_4$?

1.103. ¿De cuántas formas pueden 5 personas sentarse en un sofá si tiene solamente tres asientos?

1.104. ¿De cuántas formas pueden ordenarse 7 libros en un estante si (*a*) es posible cualquier ordenación, (*b*) 3 libros determinados deben estar juntos, (*c*) 2 libros determinados deben ocupar los extremos?

1.105. ¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, . . . , 9 si (*a*) los números deben ser impares, (*b*) las primeras dos cifras de cada número son pares?

1.106. Resolver el problema anterior si las cifras de los números pueden estar repetidas.

1.107. ¿Cuántos números diferentes de 3 cifras pueden formarse con 3 cuatros, 4 doses y 2 treses?

1.108. ¿De cuántas formas pueden 3 hombres y 3 mujeres sentarse alrededor de una mesa si (*a*) no se impone ninguna restricción, (*b*) dos mujeres determinadas no deben sentarse juntas, (*c*) cada mujer debe estar entre dos hombres?

COMBINACIONES

1.109. Hallar el valor de (*a*) $_5C_3$, (*b*) $_8C_4$, (*c*) $_{10}C_8$.

1.110. ¿Para qué valor de *n* se cumple que $3 \cdot {}_{n+1}C_3 = 7 \cdot {}_nC_2$?

1.111. ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse 6 preguntas de un total de 10?

1.112. ¿Cuántos comités diferentes de 3 hombres y 4 mujeres pueden formarse con 8 hombres y 6 mujeres?

1.113. ¿De cuántas formas pueden seleccionarse 2 hombres, 4 mujeres, 3 niños y 3 niñas con 6 hombres, 8 mujeres, 4 niños y 5 niñas si (*a*) no se impone ninguna restricción, (*b*) deben seleccionarse un hombre y una mujer determinados?

1.114. ¿De cuántas formas puede un grupo de 10 personas dividirse en (*a*) dos grupos de 7 y 3 personas, (*b*) tres grupos de 5, 3 y 2 personas?

1.115. Con 5 estadistas y 6 economistas quiere formarse un comité de 3 estadistas y 2 economistas. ¿Cuántos comités diferentes pueden formarse si (*a*) no se impone ninguna restricción, (*b*) dos estadistas determinados deben estar en el comité, (*c*) un economista determinado no debe estar en el comité?

1.116. Hallar el número de (*a*) combinaciones y (*b*) permutaciones de cuatro letras cada una que pueden formarse con las letras de la palabra *Tennessee.*

COEFICIENTES BINOMIALES

1.117. Calcular (*a*) ${}_6C_3$, (*b*) $\binom{11}{4}$, (*c*) $({}_8C_2)({}_4C_3)/{}_{12}C_5$.

1.118. Expandir (*a*) $(x+y)^6$, (*b*) $(x-y)^4$, (*c*) $(x-x^{-1})^5$, (*d*) $(x^2+2)^4$.

1.119. Hallar el coeficiente de *x* en $\left(x+\frac{2}{x}\right)^9$.

1.120. Demostrar que (*a*) $$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n} = 2^n$$

(*b*) $$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

1.121. Demostrar que (*a*) $\sum_{j=1}^{n} j({}_nC_j) = n \cdot 2^{n-1}$, (*b*) $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} j({}_nC_j) = 0$.

PROBABILIDAD UTILIZANDO ANALISIS COMBINATORIO

1.122. Hallar la probabilidad de obtener una suma de 7 puntos (*a*) una vez, (*b*) al menos una vez, (*c*) dos veces, en dos lanzamientos de un par de dados honrados.

1.123. Se extraen dos cartas sucesivamente de una baraja de 52 cartas. Hallar la probabilidad de que (*a*) la primera carta no sea un diez de tréboles o un as, (*b*) la primera carta sea un as pero la segunda no, (*c*) al menos una carta sea un diamante, (*d*) las cartas no sean del mismo palo, (*e*) no más que una carta sea figura (jota, reina, rey), (*f*) la segunda carta no sea una figura, (*g*) la segunda carta no sea una figura dado que la primera sí lo es, (*h*) las cartas son figuras o picas o ambas.

1.124. Una caja contiene 9 tiquetes numerados del 1 al 9. Si se extraen 3 tiquetes de la caja uno a uno, hallar la probabilidad de que alternativamente sean impar, par, impar o par, impar, par.

1.125. Las apuestas en favor de *A* de ganar un juego de ajedrez contra *B* son 3:2. Si se van a jugar tres juegos ¿cuáles son las apuestas (*a*) en favor de *A* de ganar al menos dos de los tres juegos, (*b*) en contra de *A* de perder los primeros dos juegos?

1.126. En un juego de *naipes* se reparte a cada uno de los 4 jugadores 13 cartas de una baraja de 52 cartas. Hallar la probabilidad de que uno de los jugadores obtenga (*a*) 7 diamantes, 2 tréboles, 3 corazones y 1 pica; (*b*) un palo completo.

1.127. Una urna contiene 6 bolas rojas y 8 azules. Se extraen cinco bolas aleatoriamente sin remplazamiento. Hallar la probabilidad de que 3 sean rojas y 2 azules.

1.128. (*a*) Hallar la probabilidad de obtener la suma 7 en al menos uno de tres lanzamientos de un par de dados honrados, (*b*) ¿Cuántos lanzamientos se necesitan para que la probabilidad en (*a*) sea mayor que 0.95?

1.129. Se extraen 3 cartas de una baraja de 52. Hallar la probabilidad de que (*a*) las cartas sean de un palo, (*b*) al menos dos sean ases.

1.130. Hallar la probabilidad de que un jugador tenga de 13 cartas 9 de un mismo palo.

APROXIMACION DE STIRLING A n!

1.131. ¿De cuántas formas pueden seleccionarse 30 individuos de un total de 100?

1.132. Demostrar que aproximadamente ${}_{2n}C_n = 2^{2n}/\sqrt{\pi n}$, para valores de n grandes.

1.133. Hallar porcentaje de error en la fórmula de Stirling para $n = 10$.

1.134. Obtener una aproximación al resultado del Problema 1.51.

PROBLEMAS DIVERSOS

1.135. Un espacio muestral consiste de 3 puntos muestrales con probabilidades asociadas dadas por $2p$, p^2 y $4p - 1$. Hallar el valor de p.

1.136. Demostrar que si $A \subset B'$ entonces $A \cap B = \emptyset$.

1.137. Demostrar que $A - (A \cap B) = A \cap B'$.

1.138. ¿Cuántas palabras pueden formarse con 5 letras si (*a*) las letras son diferentes, (*b*) 2 letras son idénticas, (*c*) todas las letras son diferentes pero dos letras determinadas no pueden estar juntas?

1.139. Cuatro enteros se eligen aleatoriamente entre 0 y 9 inclusive. Hallar la probabilidad de que (*a*) sean diferentes, (*b*) máximo dos sean iguales.

1.140. Un par de dados se lanzan repetidamente. Hallar la probabilidad de que ocurra 11 por primera vez en el sexto lanzamiento.

1.141. ¿Cuál es el menor número de lanzamientos necesarios en el Problema 1.140 para que la probabilidad de obtener 11 por primera vez sea mayor que (*a*) 0.5, (*b*) 0.95?

1.142. Estudiar lo siguiente: no hay tal cosa de que una moneda sea honesta puesto que en cualquier número de lanzamientos es extremadamente difícil que el número de caras y sellos sea igual.

1.143. Supóngase que al lanzar una moneda 500 veces hay una secuencia de 24 lanzamientos que resultan "caras". ¿Puede considerarse la moneda cómo honrada? Explicar.

1.144. Demostrar que para cualesquiera sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leqq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

1.145. Al lanzar un par de dados la suma puede ser 2,3, . . . , 12. ¿Podríamos asignar probabilidades de 1/11 a cada uno de esos puntos? Explicar.

1.146. En un juego de póker hallar la probabilidad de obtener (*a*) una *escalera flor,* que consiste de diez, jota, reina, rey y as del mismo palo; (*b*) un *full* que consiste en 3 cartas de un valor y 2 de otro (por ejemplo 3 dieces y 2 jotas, etc.); (*c*) cartas diferentes, (*d*) 4 ases.

1.147. La probabilidad de que un tirador dé en el blanco es de 2/3. Si dispara al blanco hasta que le da la primera vez, hallar la probabilidad de que necesite 5 disparos.

1.148. (*a*) Un estanque contiene 6 compartimientos separados. ¿De cuántas maneras pueden colocarse 4 bolas idénticas en los compartimientos? (*b*) Resolver el problema si hay n compartimientos y r bolas. Este tipo de problema se presenta en física en conexión con la *estadística Bose-Einstein.*

1.149. (*a*) Un estante contiene 6 compartimientos separados. ¿De cuántas formas pueden colocarse 12 bolas idénticas en los compartimientos de tal manera que ningún compartimiento quede vacío? (*b*) Resolver el problema si hay n compartimientos y r bolas para $r > n$. Este tipo de problema se presenta en física en conexión con la *estadística Fermi-Dirac.*

1.150. Un jugador de póker tiene las cartas 2, 3, 4, 6, 8. Desea descartar el 8 y remplazarla por otra carta que espera sea un 5 (en ese caso obtendrá una "escalera"). ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga el 5 suponiendo que los otros tres jugadores en conjunto tienen (*a*) un cinco, (*b*) dos cincos, (*c*) tres cincos, (*d*) ningún 5? ¿Puede resolverse el problema sin saber el número de cincos que tienen los otros jugadores? Explicar.

1.151. Resolver el Problema 1.50 si el juego se limita a 3 lanzamientos.

1.152. Generalizar el resultado del Problema 1.151.

1.153. Hallar la probabilidad de que en un juego de bridge (*a*) dos jugadores, (*b*) tres jugadores, (*c*) los cuatro jugadores tengan un palo completo.

1.154. Demostrar que $\binom{n}{r} = \sum_{j=0}^{r} \binom{k}{j}\binom{n-k}{r-j}$ y dar una interpretación combinatoria. (*Sugerencia:* Considerar $(1+x)^k\,(1+x)^{n-k}$ y hallar el coeficiente de x^j en el producto).

1.155. Demostrar que $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$ y dar una interpretación combinatoria.

1.156. Demostrar que la probabilidad para que la secretaria del Problema 1.54 obtenga exactamente a letras en los sobres correctos es $\frac{1}{a!}\sum_{k=0}^{n-a}\frac{(-1)^k}{k!}$. [*Sugerencia:* Denotando la probabilidad deseada como $p_n(a)$, demostrar que $p_n(a) = \frac{1}{a!}\,p_{n-a}(0)$ y luego emplear el resultado del Problema 1.54].

Capítulo 2

Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad

VARIABLES ALEATORIAS

Supóngase que a cada punto de un espacio muestral asignamos un número. Así definimos una *función* en el espacio muestral. Esta función se llama *variable aleatoria* (o *variable estocástica*) o más precisamente *función aleatoria* (*función estocástica*). Comúnmente se denota por una letra mayúscula como X ó Y. En general una variable aleatoria tiene algún significado físico, geométrico u otro.

EJEMPLO 2.1. Supóngase que se lanza una moneda dos veces de tal forma que el espacio muestral es $\mathcal{S} = \{CC, CS, SC, SS\}$. Represéntese por X el número de caras que pueden resultar. Con cada punto muestral podemos asociar un número para X como se muestra en la Tabla 2-1. Así en el caso de CC (es decir 2 caras) $X = 2$ en tanto que para SC (1 cara) $X = 1$. Se concluye que X es una variable aleatoria.

Tabla 2-1

Punto muestral	CC	CS	SC	SS
X	2	1	1	0

Debe observarse que también podrían definirse otras muchas variables aleatorias en este espacio muestral, por ejemplo el cuadrado del número de caras, el número de caras menos el número de sellos, etc.

Una variable aleatoria que toma un número finito o infinito contable de valores (véase página 4) se denomina *variable aleatoria discreta* mientras que una que toma un número infinito no contable de valores se llama *variable aleatoria no discreta* ó *continua*.

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETA

Sea X una variable aleatoria discreta y supóngase que los valores posibles que puede tomar están dados por $x_1, x_2, x_3, \ldots$, ordenados en orden creciente de magnitud. Supóngase también que los valores se asumen con probabilidades dadas por

$$P(X = x_k) = f(x_k) \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Es conveniente introducir la *función de probabilidad*, también conocida como la *distribución de probabilidad*, definida por

$$P(X = x) = f(x) \tag{2}$$

Para $x = x_k$ (*2*) se reduce a (*1*) en tanto que para otros valores de x, $f(x) = 0$.

En general $f(x)$ es una función de probabilidad si

1. $f(x) \geqq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$

donde la suma en 2 se toma sobre los valores posibles de x. Una gráfica de $f(x)$ se llama *gráfica de probabilidad.*

EJEMPLO 2.2. **(*a*) Hallar la función de probabilidad correspondiente a la variable aleatoria X del Ejemplo 2.1 y (*b*) construir la gráfica de probabilidad.**

(*a*) Suponiendo que la moneda es honrada tenemos

$$P(CC) = \frac{1}{4} \qquad P(CS) = \frac{1}{4} \qquad P(SC) = \frac{1}{4} \qquad P(SS) = \frac{1}{4}$$

Luego

$$P(X=0) = P(SS) = \frac{1}{4}$$

$$P(X=1) = P(CS \cup SC) = P(CS) + P(SC) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=2) = P(CC) = \frac{1}{4}$$

Tabla 2-2

x	0	1	2
$f(x)$	1/4	1/2	1/4

Así, la función de probabilidad está dada en la Tabla 2-2.

(*b*) La gráfica de probabilidad puede representarse como se indica en la Fig. 2-1, o por un *histograma*, como se indica en la Fig. 2-2. En la Fig. 2-1 la suma de las ordenadas es 1 mientras que en el histograma la suma de las áreas rectangulares es 1. En el caso del histograma podemos considerar la variable aleatoria X como continua, por ejemplo $X = 1$ significa que está entre 0.5 y 1.5.

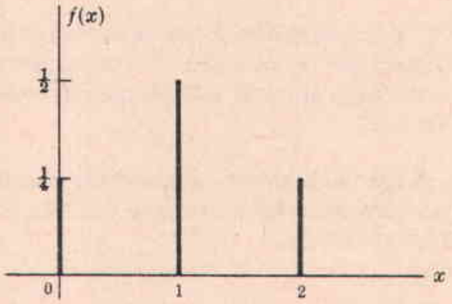


Fig. 2-1 Espectro

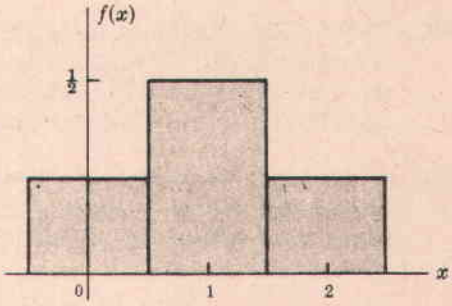


Fig. 2-2 Histograma

FUNCIONES DE DISTRIBUCION PARA VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

La *función de distribución acumulada*, o simplemente la *función de distribución*, para una variable aleatoria X se define por

$$P(X \leqq x) = F(x) \tag{3}$$

donde x es cualquier número real, es decir $-\infty < x < \infty$. La función de distribución puede obtenerse de la función de probabilidad notando que

$$F(x) = P(X \leqq x) = \sum_{u \leqq x} f(u) \tag{4}$$

donde la suma a la derecha se toma para todos los valores de u para los cuales $u \leqq x$. Recíprocamente la función de probabilidad puede obtenerse de la función de distribución.

Si X únicamente toma un número finito de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entonces la función de distribución está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \leqq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & x_2 \leqq x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ f(x_1) + \cdots + f(x_n) & x_n \leqq x < \infty \end{cases} \tag{5}$$

EJEMPLO 2.3. (*a*) Hallar la función de distribución para la variable aleatoria X del Ejemplo 2.2. (*b*) Obtener su representación gráfica.

(*a*) La función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leqq x < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \leqq x < 2 \\ 1 & 2 \leqq x < \infty \end{cases}$$

(*b*) La representación gráfica de $F(x)$ se muestra en la Fig. 2-3.

Los aspectos siguientes acerca de la función de distribución anterior, que son verdaderos en general, deben notarse.

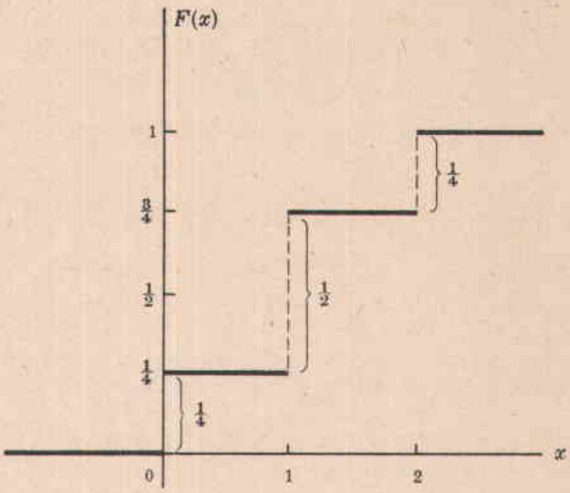


Fig. 2-3

1. Las magnitudes de los saltos en 0, 1, 2 son 1/4, 1/2, 1/4 corresponden exactamente a las ordenadas en la Fig. 2-1. Este hecho permite obtener la función de probabilidad a partir de la función de distribución.

2. Debido a la apariencia de la gráfica de la Fig. 2-3 frecuentemente se le llama función *escalera* o *función paso.* El valor de la función en un entero se obtiene del paso superior, así el valor en 1 es 3/4 y no 1/4. Esto se expresa matemáticamente estableciendo que la función de distribución es *continua por la derecha* en 0, 1, 2.

3. A medida que procedemos de izquierda a derecha (es decir *subiendo la escalera*) la función de distribución permanece igual o aumenta, tomando valores desde 0 hasta 1. Debido a esto se dice que es una *función monotónicamente creciente.*

DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD

Si X es una variable aleatoria continua, la probabilidad de que X tome un valor determinado generalmente es cero. Por tanto no podemos definir una función de probabilidad en la misma forma que para una variable aleatoria discreta (página 38). Para llegar a una distribución de probabilidad para una variable aleatoria continua notamos que la probabilidad de que X se encuentre *entre dos valores diferentes* tiene significado.

EJEMPLO 2.4. Si se selecciona aleatoriamente un individuo de un grupo numeroso de hombres adultos, la probabilidad de que su estatura X sea precisamente 147 centímetros sería cero. Sin embargo hay una probabilidad mayor que cero de que X esté entre 145 y 150 centímetros, por ejemplo.

Estas ideas y la analogía de las Propiedades 1 y 2, página 38, nos conducen a postular la existencia de una función $f(x)$ tal que

1. $f(x) \geqq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

donde la segunda es una proposición matemática del hecho que una variable aleatoria de valor real debe ciertamente encontrarse entre $-\infty$ e ∞. Entonces definimos la probabilidad de que X se encuentre entre a y b como

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (6)$$

Podemos demostrar que esta definición satisface los axiomas de probabilidad dados en la página 6.

Una función $f(x)$ que satisface los requisitos anteriores se llama *función de probabilidad* o *distribución de probabilidad* para una variable aleatoria continua, pero con mayor frecuencia se denomina *función de densidad de probabilidad* o simplemente *función de densidad.* Cualquier función que satisface las propiedades 1 y 2 anteriores automáticamente es una función de densidad y las probabilidades pedidas pueden obtenerse a partir de (*6*).

EJEMPLO 2.5. (*a*) Hallar la constante c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

sea una función de densidad y (*b*) calcular $P(1 < X < 2)$.

(*a*) Ya que $f(x)$ satisface la propiedad 1 si $c \geqq 0$, debe satisfacer la propiedad 2 para ser una función de densidad. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^3 cx^2\,dx = \left.\frac{cx^3}{3}\right|_0^3 = 9c$$

y puesto que esto debe ser igual a 1 tenemos $c = 1/9$.

(*b*)
$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{1}{9}x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{27}\right|_1^2 = \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

En el caso de que $f(x)$ sea continua, lo que supondremos al menos se establezca otra cosa, la probabilidad de que X sea igual a cualquier valor determinado es cero. En tal caso podemos remplazar cualquiera o ambos de los signos $<$ en (*6*) por $\leqq$. Así, en el Ejemplo 2.5,

$$P(1 \leqq X \leqq 2) = P(1 \leqq X < 2) = P(1 < X \leqq 2) = P(1 < X < 2) = \frac{7}{27}$$

FUNCIONES DE DISTRIBUCION PARA VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Por analogía con (*4*), página 39, definimos la *función de distribución* $F(x)$ *para una variable aleatoria continua* por

$$F(x) = P(X \leqq x) = P(-\infty < X \leqq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du \tag{7}$$

En los puntos de continuidad de $f(x)$, el signo $\leqq$ en (*7*) puede remplazarse por $<$ si se desea.

EJEMPLO 2.6. (*a*) Hallar la función de distribución para la variable aleatoria del Ejemplo 2.5. (*b*) Emplear el resultado de (*a*) para hallar $P(1 < x \leqq 2)$.

(*a*) Tenemos

$$F(x) = P(X \leqq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

Si $x < 0$ entonces $F(x) = 0$. Si $0 \leqq x < 3$ entonces

$$F(x) = \int_0^x f(u)\,du = \int_0^x \frac{1}{9}u^2\,du = \frac{x^3}{27}$$

Si $x \geqq 3$ entonces

$$F(x) = \int_0^3 f(u)\,du + \int_3^x f(u)\,du = \int_0^3 \frac{1}{9}u^2\,du + \int_3^x 0\,du = 1$$

Por tanto la función de distribución pedida es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3/27 & 0 \leqq x < 3 \\ 1 & x \geqq 3 \end{cases}$$

Obsérvese que $F(x)$ aumenta monotónicamente desde 0 hasta 1 como lo requiere una función de distribución. También debe observarse que $F(x)$ en este caso es continua.

(*b*) **Tenemos**

$$\begin{aligned} P(1 < X \leqq 2) &= P(X \leqq 2) - P(X \leqq 1) \\ &= F(2) - F(1) \\ &= \frac{2^3}{27} - \frac{1^3}{27} = \frac{7}{27} \end{aligned}$$

como en el Ejemplo 2.5.

La probabilidad de que X se encuentre entre x y $x + \Delta x$ está dada por

$$P(x \leqq X \leqq x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f(u)\, du \tag{8}$$

así que si Δx es pequeño tenemos aproximadamente

$$P(x \leqq X \leqq x + \Delta x) = f(x)\Delta x \tag{9}$$

También observamos de (*7*) que al diferenciar ambos lados

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \tag{10}$$

para todos los puntos donde $f(x)$ es continua, es decir la derivada de función de distribución es la función de densidad.

REGLA DE LEIBNIZ

Para obtener (*10*) hemos empleado el hecho familiar del cálculo de que

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)\, du = f(x) \tag{11}$$

Este es un caso especial de *la regla de Leibniz para diferenciación de una integral:*

$$\frac{d}{dx}\int_{a_1(x)}^{a_2(x)} F(u, x)\, du = \int_{a_1(x)}^{a_2(x)} \frac{\partial F}{\partial x} du + F(a_2(x), x)\frac{da_2}{dx} - F(a_1(x), x)\frac{da_1}{dx} \tag{12}$$

donde a_1, a_2 y F se suponen derivables con respecto a x.

INTERPRETACIONES GRAFICAS

Si $f(x)$ es la función de densidad para una variable aleatoria X entonces podemos representar $y = f(x)$ gráficamente por una curva como en la Fig. 2-4. Puesto que $f(x) \geqq 0$, la curva no puede caer por debajo del eje x. El área total limitada por la curva y el eje x debe ser 1 debido a la propiedad 2 en la página 40. Geométricamente la probabilidad de que X esté entre a y b, es decir $P(a < X < b)$, se representa por el área sombreada de la Fig. 2-4.

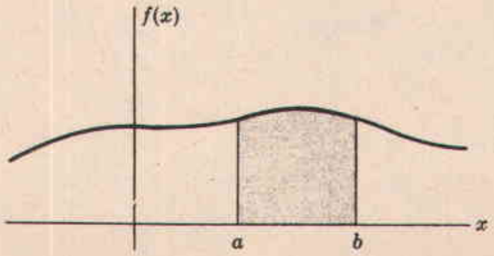


Fig. 2-4

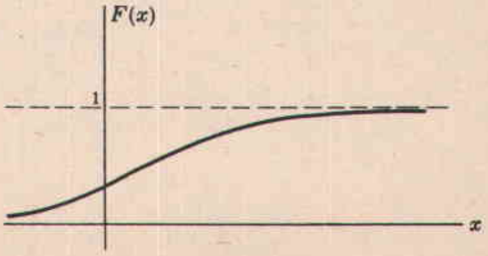


Fig. 2-5

La función de distribución $F(x) = P(X \leqq x)$ es una función monotónicamente creciente que aumenta desde 0 hasta 1 y se representa por una curva como en la Fig. 2-5.

DISTRIBUCIONES CONJUNTAS

Las ideas anteriores se generalizan fácilmente a dos o más variables aleatorias. Consideramos el caso típico de dos variables aleatorias que son ambas discretas o ambas continuas. En los casos donde una variable es discreta y la otra continua, se hacen fácilmente modificaciones apropiadas. También pueden hacerse generalizaciones a más de dos variables.

1. Caso discreto.

Si X, Y son dos variables aleatorias discretas definimos la *función de probabilidad conjunta* por

$$P(X = x, Y = y) = f(x, y) \tag{13}$$

donde 1. $f(x, y) \geqq 0$

2. $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$

es decir la suma sobre todos los valores de x, y es uno.

Supóngase que X puede tomar cualquiera de los m valores $x_1, x_2, \ldots, x_m$, y Y puede tomar cualquiera de los n valores $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Entonces la probabilidad del suceso $X = x_j$; $Y = y_k$ está dada por

$$P(X = x_j, Y = y_k) = f(x_j, y_k) \tag{14}$$

Una función de probabilidad conjunta para X, Y puede representarse por una *tabla de probabilidad conjunta* como en la Tabla 2-3. La probabilidad de que $X = x_j$ se obtiene sumando todas las entradas en la fila correspondiente a x_j y está dada por

$$P(X = x_j) = f_1(x_j) = \sum_{k=1}^{n} f(x_j, y_k) \tag{15}$$

Para $j = 1, 2, \ldots, m$ estas se indican por la entrada de totales en la columna o margen del extremo derecho como se indica en la Tabla 2-3. Análogamente la probabilidad de que $Y = y_k$ se obtiene sumando todas las entradas en la columna correspondiente a y_k y está dada por

$$P(Y = y_k) = f_2(y_k) = \sum_{j=1}^{m} f(x_j, y_k) \tag{16}$$

Para $k = 1, 2, \ldots, n$ estas se indican por la entrada de totales en la fila o margen inferior de la Tabla 2-3.

Tabla 2-3

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	Totales ↓
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	$\cdots$	$f(x_1, y_n)$	$f_1(x_1)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	$\cdots$	$f(x_2, y_n)$	$f_1(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	$f(x_m, y_1)$	$f(x_m, y_2)$	$\cdots$	$f(x_m, y_n)$	$f_1(x_m)$
Totales →	$f_2(y_1)$	$f_2(y_2)$	$\cdots$	$f_2(y_n)$	1 ← Gran Total

Debido a que las probabilidades (*15*) y (*16*) se obtienen de los márgenes de la tabla frecuentemente nos referimos a $f_1(x_j)$ y $f_2(y_k)$ (o simplemente $f_1(x)$ y $f_2(y)$) como las *funciones de probabilidad marginal* de X, Y respectivamente. También debe notarse que

$$\sum_{j=1}^{m} f_1(x_j) = 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} f_2(y_k) = 1 \tag{17}$$

que puede escribirse como

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_j, y_k) = 1 \tag{18}$$

Esto es sencillamente la proposición de que la probabilidad total de todas las entradas es 1. El *gran total* de 1 se indica en la esquina inferior a la derecha de la tabla.

La *función de distribución conjunta* de X, Y se define por

$$F(x,y) = P(X \leqq x, Y \leqq y) = \sum_{u \leqq x} \sum_{v \leqq y} f(u,v) \tag{19}$$

En la Tabla 2-3, $F(x,y)$ es la suma de todas las entradas para las que $x_j \leqq x$ y $y_k \leqq y$.

2. **Caso continuo.**

El caso donde ambas variables son continuas se obtiene fácilmente por analogía con el caso discreto al remplazar las sumas por integrales. Así la *función de probabilidad conjunta* para las variables aleatorias X, Y (o, como más comúnmente se llama, la *función de densidad conjunta* de X, Y) se define por

1. $f(x,y) \geqq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1$

Gráficamente $z = f(x, y)$ representa una superficie, llamada la *superficie de probabilidad*, como se indica en la Fig. 2-6. El volumen total limitado por esta superficie y el plano xy es igual a 1 de acuerdo con la propiedad 2 anterior. La probabilidad de que X esté entre a y b en tanto que Y esté entre c y d está dada gráficamente por el volumen sombreado de la Fig. 2-6 y matemáticamente por

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} f(x,y)\, dx\, dy \tag{20}$$

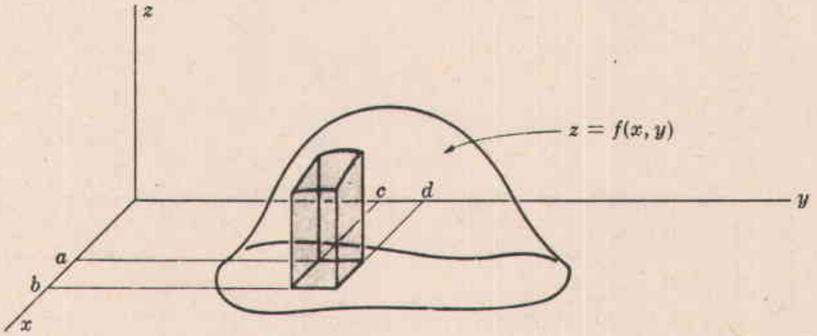


Fig. 2-6

Generalizando, si A representa cualquier suceso existirá una región $\mathcal{R}_A$ del plano xy que corresponde a él. En tal caso podemos hallar la probabilidad de A efectuando la integración sobre $\mathcal{R}_A$, es decir

$$P(A) = \iint_{\mathcal{R}_A} f(x,y)\,dx\,dy \tag{21}$$

La *función de distribución conjunta* de X, Y en este caso se define por

$$F(x,y) = P(X \leqq x, Y \leqq y) = \int_{u=-\infty}^{x} \int_{v=-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv \tag{22}$$

Se deduce en analogía con (*10*), página 42, que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = f(x,y) \tag{23}$$

es decir, la función de densidad se obtiene derivando la función de distribución con respecto a x, y.

De (*22*) obtenemos

$$P(X \leqq x) = F_1(x) = \int_{u=-\infty}^{x} \int_{v=-\infty}^{\infty} f(u,v)\,du\,dv \tag{24}$$

$$P(Y \leqq y) = F_2(y) = \int_{u=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv \tag{25}$$

Llamamos a (*24*) y (*25*) las *funciones de distribución marginal*, o simplemente las *funciones de distribución*, de X y Y, respectivamente. Las derivadas de (*24*) y (*25*) con respecto a x, y se llaman las *funciones de densidad marginal*, o simplemente las *funciones de densidad*, de X y Y y están dadas por

$$f_1(x) = \int_{v=-\infty}^{\infty} f(x,v)\,dv \qquad f_2(y) = \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u,y)\,du \tag{26}$$

VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES

Supóngase que X, Y son variables aleatorias discretas. Si los sucesos $X = x$, $Y = y$ son sucesos independientes para todo x, y, entonces decimos que X, Y son *variables aleatorias independientes*. En ese caso

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x)\,P(Y=y) \tag{27}$$

o lo que es igual

$$f(x,y) = f_1(x)\,f_2(y) \tag{28}$$

Inversamente, si para todo x, y la función de probabilidad conjunta $f(x, y)$ puede expresarse como el producto de una función de x y una función de y (que son entonces las funciones de probabilidad marginal de X, Y), X y Y son independientes. Si $f(x, y)$ no puede expresarse así entonces X y Y son *dependientes*.

Si X, Y son variables aleatorias continuas decimos que son *variables aleatorias independientes* si los sucesos $X \leqq x$, $Y \leqq y$ son sucesos independientes para todo x, y. En tal caso podemos escribir

$$P(X \leqq x, Y \leqq y) = P(X \leqq x)\,P(Y \leqq y) \tag{29}$$

o lo que es igual

$$F(x,y) = F_1(x)\,F_2(y) \tag{30}$$

donde $F_1(x)$ y $F_2(y)$ son las funciones de probabilidad (marginal) de X y Y respectivamente. Inversamente, X, Y son variables aleatorias independientes si para todo x, y su función de distribución conjunta $F(x, y)$ puede expresarse como el producto de una función de x y una función de y (las cuales son las distribuciones marginales de X, Y). Si $F(x, y)$ no puede expresarse así, entonces X y Y son dependientes.

Para variables aleatorias independientes continuas también es cierto que la función de densidad conjunta $f(x, y)$ es el producto de una función de $x, f_1(x)$, por una función de y, $f_2(y)$, y estas son las funciones de densidad (marginal) de X, Y respectivamente.

CAMBIO DE VARIABLES

Dadas las distribuciones de probabilidad de una o más variables aleatorias con frecuencia estamos interesados en hallar las distribuciones de otras variables aleatorias que depende de ellas en alguna manera determinada. Los procedimientos para obtener estas distribuciones se presentan en los teoremas siguientes para el caso de las variables discretas y continuas.

1. Variables discretas.

Teorema 2-1: Sea X una variable aleatoria discreta cuya función de probabilidad es $f(x)$. Supóngase que se define una variable aleatoria discreta U en términos de X por $U = \phi(X)$, donde a cada valor de X corresponde uno y solamente un valor de U e inversamente, así que $X = \psi(U)$. Entonces la función de probabilidad para U está dada por

$$g(u) = f[\psi(u)] \tag{31}$$

Teorema 2-2: Sean X, Y variables aleatorias discretas que tienen una función de probabilidad conjunta $f(x, y)$. Supóngase que se definen dos variables aleatorias discretas U y V en términos de X, Y por $U = \phi_1(X, Y)$, $V = \phi_2(X, Y)$, donde a cada pareja de valores de X, Y corresponde una y solamente una pareja de valores U, V e inversamente, así que $X = \psi_1(U, V)$, $Y = \psi_2(U, V)$. Entonces la función de probabilidad conjunta de U y V está dada por

$$g(u, v) = f[\psi_1(u, v), \psi_2(u, v)] \tag{32}$$

2. Variables continuas.

Teorema 2-3: Sea X una variable aleatoria continua con densidad de probabilidad $f(x)$. Definamos $U = \phi(X)$ donde $X = \psi(U)$ como en el Teorema 2-1. Entonces la densidad de probabilidad de U está dada por $g(u)$ donde

$$g(u)\,|du| = f(x)\,|dx| \tag{33}$$

ó

$$g(u) = f(x)\left|\frac{dx}{du}\right| = f[\psi(u)]\,|\psi'(u)| \tag{34}$$

Teorema 2-4: Sean X, Y variables aleatorias continuas que tienen una función de densidad conjunta $f(x, y)$. Definamos $U = \phi_1(X, Y)$, $V = \phi_2(X, Y)$ donde $X = \psi_1(U, V)$, $Y = \psi_2(U, V)$ como en el Teorema 2-2. Entonces la función de densidad conjunta de U y V está dada por $g(u, v)$ donde

$$g(u, v)\,|du\,dv| = f(x, y)\,|dx\,dy| \tag{35}$$

ó

$$g(u, v) = f(x, y)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = f[\psi_1(u, v), \psi_2(u, v)]\,|J \tag{36}$$

En (*36*) el *determinante Jacobiano*, o sencillamente el *Jacobiano*, está dado por

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{37}$$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE FUNCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS

Los Teoremas 2-2 y 2-4 específicamente incluyen funciones de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias. En la práctica con frecuencia se necesita hallar la distribución de probabilidad de alguna o varias variables aleatorias determinadas. Cualquiera de los teoremas siguientes es frecuentemente útil para este propósito.

Teorema 2-5: Sean X, Y variables aleatorias continuas y sea $U = \phi_1(X, Y)$, $V = X$ (la segunda selección es arbitraria). Entonces la función de densidad para U es la densidad marginal obtenida de la densidad conjunta de U y V tal como se halló en el Teorema 2-4. Un resultado análogo es válido para las funciones de probabilidad de las variables discretas.

Teorema 2-6: Sea $f(x, y)$ la función de densidad conjunta de X, Y. Entonces la función de densidad $g(u)$ de la variable aleatoria $U = \phi_1(X, Y)$ se encuentra derivando con respecto a u la función de distribución dada por

$$G(u) = P[\phi_1(X,Y) \leqq u] = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dx\,dy \tag{38}$$

donde $\mathcal{R}$ es la región para la cual $\phi_1(x,y) \leqq u$.

CONVOLUCIONES

Como consecuencia particular de los teoremas anteriores podemos demostrar (véase Problema 2.23) que la suma de dos variables aleatorias continuas X, Y, es decir de $U = X + Y$, que tengan como función de densidad conjunta a $f(x, y)$ está dada por

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, u-x)\,dx \tag{39}$$

En el caso especial donde X, Y son independientes, $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ y (*39*) se reduce a

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,f_2(u-x)\,dx \tag{40}$$

que se conoce como la *convolución* de f_1 y f_2, abreviado $f_1 * f_2$.

Las siguientes son algunas propiedades importantes de la convolución:

1. $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$
2. $f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3$
3. $f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$

Estos resultados demuestran que f_1, f_2, f_3, obedecen las *leyes conmutativa, asociativa* y *distributiva* del álgebra con respecto a la operación de la convolución.

DISTRIBUCIONES CONDICIONALES

Con anterioridad sabemos que si $P(A) > 0$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{41}$$

Si X, Y son variables aleatorias discretas y tenemos los sucesos (A: $X = x$), (B: $Y = y$), entonces (*41*) se convierte en

$$P(Y = y \mid X = x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \tag{42}$$

donde $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$ es la función de probabilidad conjunta y $f_1(x)$ es la función de probabilidad discreta para X. Definimos

$$f(y \mid x) \equiv \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \tag{43}$$

y la llamamos ***función de probabilidad condicional de Y dada X***. Análogamente la función de probabilidad condicional de X dada Y es

$$f(x \mid y) \equiv \frac{f(x, y)}{f_2(y)} \tag{44}$$

Algunas veces denotaremos a $f(x \mid y)$ y $f(y \mid x)$ por $f_1(x \mid y)$ y $f_2(y \mid x)$ respectivamente.

Estas ideas se amplían fácilmente al caso en que X, Y son variables aleatorias continuas. Por ejemplo, la ***función de densidad condicional de Y dada X*** es

$$f(y \mid x) \equiv \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \tag{45}$$

donde $f(x, y)$ es la función de densidad conjunta de X, Y, $f_1(x)$ es la función de densidad marginal de X. Utilizando (*45*) podemos por ejemplo hallar que la probabilidad de que Y esté entre c y d dado que $x < X < x + dx$ es

$$P(c < Y < d \mid x < X < x + dx) = \int_c^d f(y \mid x)\, dy \tag{46}$$

También se dispone de la generalización de estos resultados.

APLICACIONES A LA PROBABILIDAD GEOMETRICA

Varios problemas en probabilidad surgen de las consideraciones geométricas o tienen interpretaciones geométricas. Por ejemplo, supóngase que tenemos un objetivo en la forma de una región plana de área K y una porción de ella con área K_1. Entonces es razonable suponer que la probabilidad de pegar a la región de área K_1 es proporcional a K_1. Por tanto definimos

$$P(\text{pegar en la región de área } K_1) = \frac{K_1}{K} \tag{47}$$

donde se supone que la probabilidad de pegar al objetivo es 1. Lógicamente pueden plantearse otras suposiciones. Por ejemplo, puede ser menos probable pegar a áreas externas, etc. El tipo de suposición empleado define la función de distribución de probabilidad.

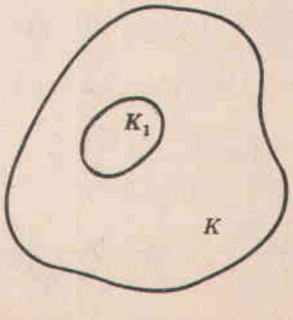


Fig. 2-7

Problemas resueltos

VARIABLES ALEATORIAS Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETAS

2.1. Supóngase que se lanza un par de dados honrados y que la variable aleatoria X denote la suma de los puntos. (*a*) Obtener la distribución de probabilidad para X. (*b*) Construir una gráfica para esta distribución de probabilidad.

(*a*) Los puntos muestrales para los lanzamientos de un par de dados están dados en la Fig. 1-17, página 18. La variable aleatoria X es la suma de las coordenadas para cada punto. Así para (3,2) tenemos $X = 5$. Utilizando el hecho de que los 36 puntos muestrales son igualmente probables, así que cada punto muestral tiene probabilidad 1/36, obtenemos la Tabla 2-4. Por ejemplo, para $X = 5$ corresponden los cuatro puntos muestrales (1,4), (2,3), (3,2), (4,1) así que la probabilidad asociada es 4/36.

Tabla 2-4

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

(*b*) Podemos emplear un espectro o un histograma como los dados en la Fig. 2-8 o en la Fig. 2-9, de acuerdo con si deseamos considerar a X como variable discreta o continua. Nótese que en la Fig. 2-8 la suma de las *ordenadas* es 1 en tanto que en la Fig. 2-9 la suma de todas las *áreas* rectangulares es 1.

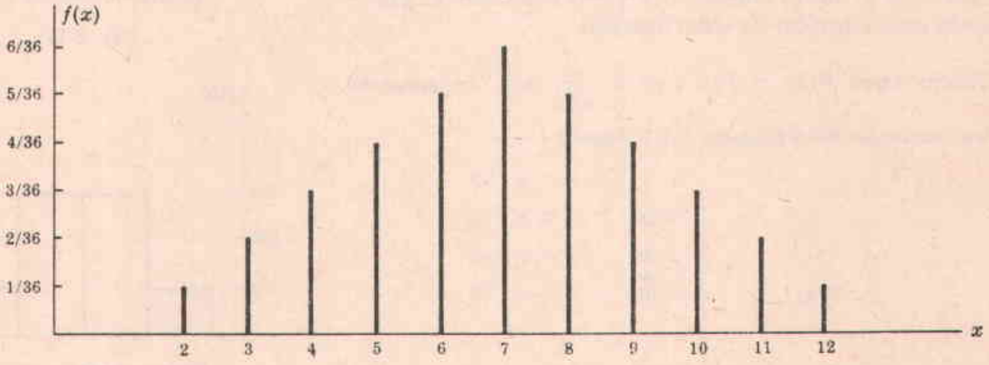


Fig. 2-8

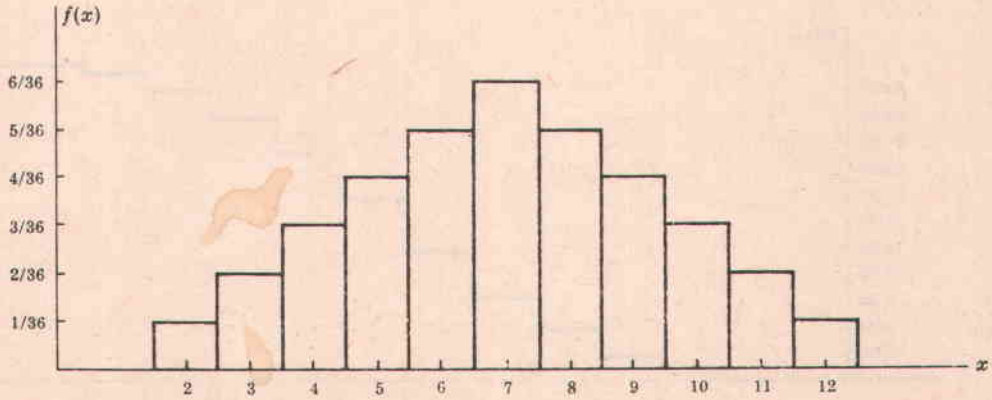


Fig. 2-9

2.2. (*a*) Hallar la distribución de probabilidad de niños y niñas en familias con 3 hijos, suponiendo iguales probabilidades para niños y niñas. (*b*) Representar gráficamente la distribución en (*a*).

(*a*) El Problema 1.46 trató el caso de n intentos mutuamente independientes, donde cada intento tenía dos resultados posibles, A y A', con probabilidades p y $q = 1 - p$ respectivamente. Se encontró que la probabilidad de obtener exactamente x veces A en los n intentos es ${}_nC_x p^x q^{n-x}$. Este resultado se aplica a este problema bajo la suposición de que los nacimientos sucesivos (los "intentos") son independientes en cuanto se refiere al sexo del hijo. Por tanto, si A es el suceso "niño", $n = 3$, y $p = q = 1/2$, tenemos

$$P(\text{exactamente } x \text{ niños}) = P(X = x) = {}_3C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} = {}_3C_x\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

donde la variable aleatoria X representa el número de niños en la familia. (Obsérvese que X se define sobre el espacio muestral de tres intentos). La función de probabilidad para X,

$$f(x) = {}_3C_x\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

se indica en la Tabla 2-5.

Tabla 2-5

x	0	1	2	3
$f(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

(*b*) La gráfica puede representarse como en la Fig. 2-10 o en la Fig. 2-11, dependiendo sobre si deseamos considerar a la variable X como discreta o continua. Obsérvese que el cero del eje x se ha desplazado.

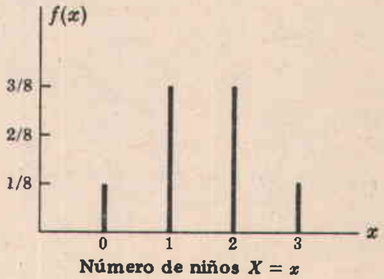


Fig. 2-10

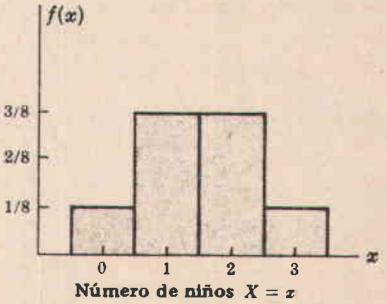


Fig. 2-11

FUNCIONES DE DISTRIBUCION DISCRETA

2.3. (*a*) Hallar la función de distribución $F(x)$ para la variable aleatoria X del Problema 2.1 y (*b*) representar gráficamente esta función de distribución.

(*a*) Tenemos que $F(x) = P(X \leqq x) = \sum_{u \leqq x} f(u)$. Entonces de los resultados del Problema 2.1 hallamos

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 2 \\ 1/36 & 2 \leqq x < 3 \\ 3/36 & 3 \leqq x < 4 \\ 6/36 & 4 \leqq x < 5 \\ \vdots & \vdots \\ 35/36 & 11 \leqq x < 12 \\ 1 & 12 \leqq x < \infty \end{cases}$$

(*b*) Véase Fig. 2-12.

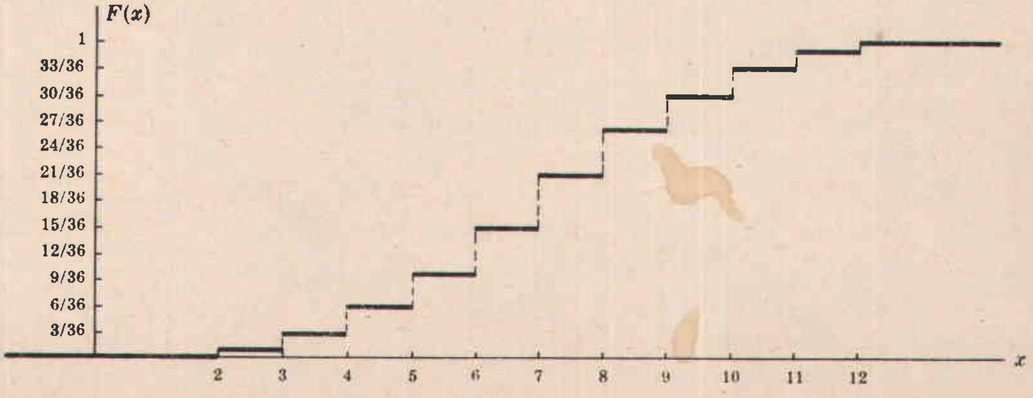


Fig. 2-12

2.4. (*a*) Hallar la función de distribución $F(x)$ para la variable aleatoria X del Problema 2.2 y (*b*) representar gráficamente esta función de distribución.

(*a*) Utilizando la Tabla 2-5 del Problema 2.2 obtenemos

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ 1/8 & 0 \leqq x < 1 \\ 1/2 & 1 \leqq x < 2 \\ 5/8 & 2 \leqq x < 3 \\ 1 & 3 \leqq x < \infty \end{cases}$$

(*b*) La gráfica de la función de distribución de (*a*) se muestra en la Fig. 2-13.

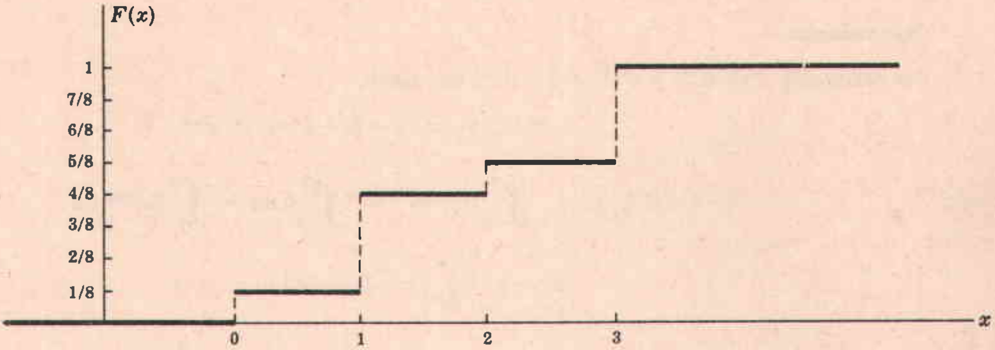


Fig. 2-13

VARIABLES ALEATORIAS Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CONTINUAS

2.5. Una variable aleatoria X tiene la función de densidad $f(x) = c/(x^2+1)$, donde $-\infty < x < \infty$. (*a*) Hallar el valor de la constante c. (*b*) Hallar la probabilidad de que X^2 esté entre 1/3 y 1.

(*a*) Debemos tener que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c\,dx}{x^2+1} = c\tan^{-1} x \Big|_{-\infty}^{\infty} = c\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1$$

así que $c = 1/\pi$.

(*b*) Si $\frac{1}{3} \leqq X^2 \leqq 1$, entonces $\frac{\sqrt{3}}{3} \leqq X \leqq 1$ ó $-1 \leqq X \leqq -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Por tanto la probabilidad pedida es

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-\sqrt{3}/3} \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{\pi}\int_{\sqrt{3}/3}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{3}/3}^{1} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

2.6. Hallar la función de distribución correspondiente a la función de densidad del Problema 2.5.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\pi}\left[\tan^{-1} u \Big|_{-\infty}^{x}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}[\tan^{-1} x - \tan^{-1}(-\infty)] = \frac{1}{\pi}\left[\tan^{-1} x + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1} x$$

2.7. La función de distribución para una variable aleatoria X es

$$F(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 - e^{-2x} & x \geqq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Hallar (*a*) la función de densidad, (*b*) la probabilidad de que $X > 2$, y (*c*) la probabilidad de que $-3 < X \leqq 4$.

(*a*)
$$f(x) \quad = \quad \frac{d}{dx}F(x) \quad = \quad \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

(*b*)
$$P(X > 2) \quad = \quad \int_2^\infty 2e^{-2u}\,du \quad = \quad -e^{-2u}\Big|_2^\infty \quad = \quad e^{-4}$$

Otro método.

Por definición $P(X \leqq 2) = F(2) = 1 - e^{-4}$. Por tanto,

$$P(X > 2) \;=\; 1 - (1 - e^{-4}) \;=\; e^{-4}$$

(*c*)
$$P(-3 < X \leqq 4) \quad = \quad \int_{-3}^4 f(u)\,du \quad = \quad \int_{-3}^0 0\,du \;+\; \int_0^4 2e^{-2u}\,du$$

$$= \quad -e^{-2u}\Big|_0^4 \quad = \quad 1 - e^{-8}$$

Otro método.

$$\begin{aligned} P(-3 < X \leqq 4) \quad &= \quad P(X \leqq 4) \;-\; P(X \leqq -3) \\ &= \quad F(4) \;-\; F(-3) \\ &= \quad (1 - e^{-8}) \;-\; (0) \quad = \quad 1 - e^{-8} \end{aligned}$$

DISTRIBUCIONES CONJUNTAS Y VARIABLES INDEPENDIENTES

2.8. La función de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias discretas X, Y está dada por $f(x,y) = c(2x + y)$, donde x, y pueden tomar todos los valores enteros tales que $0 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq 3$, y $f(x,y) = 0$ de otra forma.

(*a*) Hallar el valor de la constante c.

(*b*) Hallar $P(X = 2,\ Y = 1)$.

(*c*) Hallar $P(X \geqq 1,\ Y \leqq 2)$.

(*a*) Los puntos muestrales (x, y) para los cuales las probabilidades son diferentes a cero se indican en la Fig. 2-14. Las probabilidades asociadas con esos puntos, dadas por $c(2x + y)$, se indican en la Tabla 2-6. Puesto que el gran total, $42c$, debe ser igual a 1, tenemos que $c = 1/42$.

Tabla 2-6

X \ Y	0	1	2	3	Totales ↓
0	0	c	$2c$	$3c$	$6c$
1	$2c$	$3c$	$4c$	$5c$	$14c$
2	$4c$	$5c$	$6c$	$7c$	$22c$
Totales→	$6c$	$9c$	$12c$	$15c$	$42c$

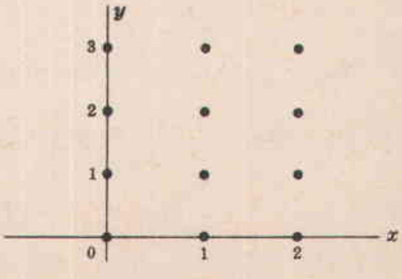


Fig. 2-14

(*b*) De la Tabla 2-6 determinamos que

$$P(X=2,\ Y=1) \ = \ 5c \ = \ \frac{5}{42}$$

(*c*) De la Tabla 2-6 determinamos que

$$\begin{aligned} P(X \geqq 1,\ Y \leqq 2) &= \sum_{x \geqq 1} \sum_{y \leqq 2} f(x,y) \\ &= (2c+3c+4c) + (4c+5c+6c) \\ &= 24c = \frac{24}{42} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

como se indica por las entradas sombreadas en la tabla.

2.9. Hallar las funciones de probabilidad marginal (*a*) de X y (*b*) de Y para las variables aleatorias del Problema 2.8.

(*a*) La función de probabilidad marginal para X está dada por $P(X=x) = f_1(x)$ y puede obtenerse de los totales del margen en la columna derecha de la Tabla 2-6. De estos vemos que

$$P(X=x) \ = \ f_1(x) \ = \ \begin{cases} 6c = 1/7 & x=0 \\ 14c = 1/3 & x=1 \\ 22c = 11/21 & x=2 \end{cases}$$

Verificación: $\frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{11}{21} = 1$

(*b*) La función de probabilidad marginal para Y está dada por $P(Y=y) = f_2(y)$ y puede obtenerse de los totales del margen en la última fila de la Tabla 2-6. De estos vemos que

$$P(Y=y) \ = \ f_2(y) \ = \ \begin{cases} 6c = 1/7 & y=0 \\ 9c = 3/14 & y=1 \\ 12c = 2/7 & y=2 \\ 15c = 5/14 & y=3 \end{cases}$$

Verificación: $\frac{1}{7} + \frac{3}{14} + \frac{2}{7} + \frac{5}{14} = 1$

2.10. Demostrar que las variables aleatorias X, Y del Problema 2.8 son dependientes.

Si las variables aleatorias X, Y son independientes debemos tener, para todo x, y,

$$P(X=x,\ Y=y) \ = \ P(X=x)\,P(Y=y)$$

Pero, como se determina de los Problemas 2.8 (*b*) y 2.9,

$$P(X=2,\ Y=1) = \frac{5}{42} \qquad P(X=2) = \frac{11}{21} \qquad P(Y=1) = \frac{3}{14}$$

así que

$$P(X=2,\ Y=1) \neq P(X=2)\,P(Y=1)$$

El resultado también se deduce del hecho de que la función de probabilidad conjunta, $(2x+y)/42$, no puede expresarse como una función de x veces una función de y.

2.11. La función de densidad conjunta de dos variables aleatorias continuas X, Y es

$$f(x,y) \ = \ \begin{cases} cxy & 0 < x < 4,\ 1 < y < 5 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

(*a*) Hallar el valor de la constante c.

(*b*) Hallar $P(1 < X < 2,\ 2 < Y < 3)$.

(*c*) Hallar $P(X \geqq 3,\ Y \leqq 2)$.

(*a*) Debemos tener la probabilidad total igual a 1, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy \ = \ 1$$

Empleando la definición de $f(x, y)$, la integral tiene el valor

$$\int_{x=0}^{4}\int_{y=1}^{5} cxy\,dx\,dy \;=\; c\int_{x=0}^{4}\left[\int_{y=1}^{5} xy\,dy\right]dx$$

$$=\; c\int_{x=0}^{4}\frac{xy^2}{2}\bigg|_{y=1}^{5} dx \;=\; c\int_{x=0}^{4}\left(\frac{25x}{2}-\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\; c\int_{x=0}^{4} 12x\,dx \;=\; c(6x^2)\bigg|_{x=0}^{4} \;=\; 96c$$

Entonces $96c = 1$ y $c = 1/96$.

(*b*) Utilizando el valor de c hallado en (*a*) tenemos

$$P(1 < X < 2,\, 2 < Y < 3) \;=\; \int_{x=1}^{2}\int_{y=2}^{3}\frac{xy}{96}\,dx\,dy$$

$$=\; \frac{1}{96}\int_{x=1}^{2}\left[\int_{y=2}^{3} xy\,dy\right]dx \;=\; \frac{1}{96}\int_{x=1}^{2}\frac{xy^2}{2}\bigg|_{y=2}^{3} dx$$

$$=\; \frac{1}{96}\int_{x=1}^{2}\frac{5x}{2}\,dx \;=\; \frac{5}{192}\left(\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_{1}^{2} \;=\; \frac{5}{128}$$

(*c*)

$$P(X \geqq 3,\, Y \leqq 2) \;=\; \int_{x=3}^{4}\int_{y=1}^{2}\frac{xy}{96}\,dx\,dy$$

$$=\; \frac{1}{96}\int_{x=3}^{4}\left[\int_{y=1}^{2} xy\,dy\right]dx \;=\; \frac{1}{96}\int_{x=3}^{4}\frac{xy^2}{2}\bigg|_{y=1}^{2} dx$$

$$=\; \frac{1}{96}\int_{x=3}^{4}\frac{3x}{2}\,dx \;=\; \frac{7}{128}$$

2.12. Hallar las funciones de distribución marginal (*a*) de X y (*b*) de Y del Problema 2.11.

(*a*) La función de distribución marginal para X si $0 \leqq x < 4$ es

$$F_1(x) \;=\; P(X \leqq x) \;=\; \int_{u=-\infty}^{x}\int_{v=-\infty}^{\infty} f(u, v)\,du\,dv$$

$$=\; \int_{u=0}^{x}\int_{v=1}^{5}\frac{uv}{96}\,du\,dv$$

$$=\; \frac{1}{96}\int_{u=0}^{x}\left[\int_{v=1}^{5} uv\,dv\right]du \;=\; \frac{x^2}{16}$$

Para $x \geqq 4$, $F_1(x) = 1$; para $x < 0$, $F_1(x) = 0$. Por tanto

$$F_1(x) \;=\; \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2/16 & 0 \leqq x < 4 \\ 1 & x \geqq 4 \end{cases}$$

Puesto que $F_1(x)$ es continua en $x = 0$ y $x = 4$, podríamos remplazar en la expresión anterior $<$ por $\leqq$.

(*b*) La función de distribución marginal para Y si $1 \leqq y < 5$ es

$$F_2(y) \;=\; P(Y \leqq y) \;=\; \int_{u=-\infty}^{\infty}\int_{v=1}^{y} f(u, v)\,du\,dv$$

$$=\; \int_{u=0}^{4}\int_{v=1}^{y}\frac{uv}{96}\,du\,dv \;=\; \frac{y^2-1}{24}$$

Para $y \geqq 5$, $F_2(y) = 1$. Para $y < 1$, $F_2(y) = 0$. Por tanto

$$F_2(y) \quad = \quad \begin{cases} 0 & y < 1 \\ (y^2-1)/24 & 1 \leqq y < 5 \\ 1 & y \geqq 5 \end{cases}$$

Puesto que $F_2(y)$ es continua en $y = 1$, $y = 5$, podríamos remplazar en la expresión anterior $<$ por $\leqq$.

2.13. Hallar la función de distribución conjunta para las variables aleatorias X, Y del Problema 2.11.

Del Problema 2.11 se observa que la función de densidad conjunta para X, Y puede escribirse como el producto de una función en x veces una función en y. En efecto, $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, donde

$$f_1(x) \quad = \quad \begin{cases} c_1 x & 0 < x < 4 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \qquad\qquad f_2(y) \quad = \quad \begin{cases} c_2 y & 1 < y < 5 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

y $c_1 c_2 = c = 1/96$. Se deduce que X, Y son independientes, de tal manera que su función de distribución conjunta está dada por $F(x, y) = F_1(x) F_2(y)$. Las distribuciones marginales $F_1(x)$ y $F_2(y)$ se determinaron en el Problema 2.12; la Fig. 2-15 muestra la definición por trazos de $F(x, y)$ resultante.

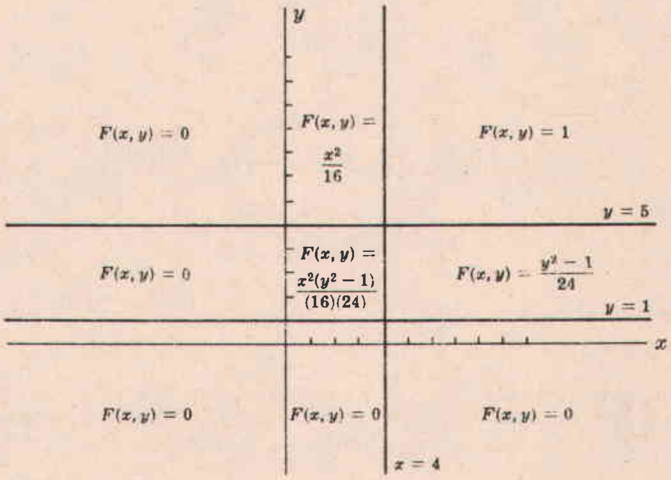


Fig. 2-15

2.14. En el Problema 2.11 hallar $P(X + Y < 3)$.

En la Fig. 2-16 hemos indicado la región cuadrada $0 < x < 4$, $1 < y < 5$ dentro de la cual la función de densidad conjunta de X, Y es diferente de cero. La probabilidad pedida está dada por

$$P(X + Y < 3) \quad = \quad \iint\limits_{\mathcal{R}} f(x, y)\, dx\, dy$$

donde $\mathcal{R}$ es la parte del cuadrado sobre el cual $x + y < 3$, región sombreada en la Fig. 2-16. Puesto que $f(x, y) = xy/96$ sobre $\mathcal{R}$, esta probabilidad está dada por

$$\int_{x=0}^{2} \int_{y=1}^{3-x} \frac{xy}{96}\, dx\, dy$$

$$= \quad \frac{1}{96} \int_{x=0}^{2} \left[\int_{y=1}^{3-x} xy\, dy \right] dx$$

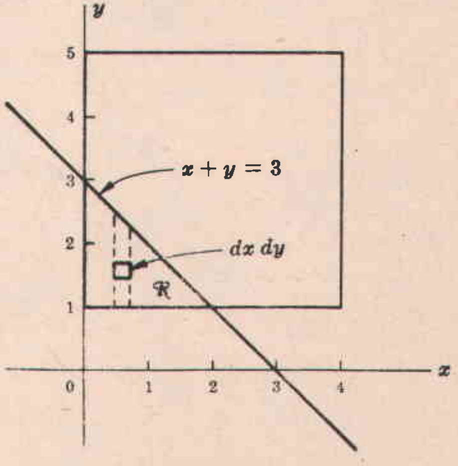


Fig. 2-16

$$= \frac{1}{96}\int_{x=0}^{2} \frac{xy^2}{2}\bigg|_{y=1}^{3-x} dx = \frac{1}{192}\int_{x=0}^{2} [x(3-x)^2 - x]\,dx = \frac{1}{48}$$

CAMBIO DE VARIABLES

2.15. Demostrar el Teorema 2-1, página 46.

La función de probabilidad para U está dada por

$$g(u) = P(U = u) = P[\phi(X) = u] = P[X = \psi(u)] = f[\psi(u)]$$

En una manera análoga puede demostrarse el Teorema 2-2, página 46. Véase Problema 2.66.

2.16. Demostrar el Teorema 2-3, página 46.

Primero considere el caso donde $u = \phi(x)$ ó $x = \psi(u)$ es una función creciente, esto es, u aumenta a medida que x aumenta (Fig. 2-17). Entonces, como puede deducirse de la figura, tenemos

$$(1) \qquad P(u_1 < U < u_2) = P(x_1 < X < x_2)$$

ó

$$(2) \qquad \int_{u_1}^{u_2} g(u)\,du = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

Remplazando $x = \psi(u)$ en la integral al lado derecho, (2) puede escribirse como

$$\int_{u_1}^{u_2} g(u)\,du = \int_{u_1}^{u_2} f[\psi(u)]\psi'(u)\,du$$

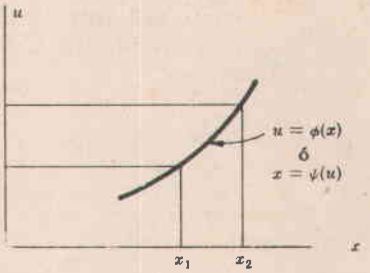


Fig. 2-17

Esto es válido para todo u_1 y u_2 solamente si los integrandos son idénticos, es decir

$$g(u) = f[\psi(u)]\psi'(u)$$

Este es un caso especial de (34), página 46, donde $\psi'(u) > 0$ (es decir la pendiente es positiva). Para el caso donde $\psi'(u) \leqq 0$, esto es, u es una función decreciente de x, también podemos demostrar que (34) se cumple (véase Problema 2.67). El teorema también se puede demostrar si $\psi'(u) \geqq 0$ ó $\psi'(u) < 0$.

2.17. Demostrar el Teorema 2-4, página 46.

Primero suponemos que a medida que x, y crecen, u y v también crecen. Igual que en el Problema 2.16 podemos demostrar que

$$P(u_1 < U < u_2,\ v_1 < V < v_2) = P(x_1 < X < x_2,\ y_1 < Y < y_2)$$

ó

$$\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} g(u, v)\,du\,dv = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dx\,dy$$

Remplazando $x = \psi_1(u, v)$, $y = \psi_2(u, v)$ en la integral de la derecha tenemos por un teorema de cálculo avanzado que

$$\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} g(u, v)\,du\,dv = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} f[\psi_1(u, v),\ \psi_2(u, v)]J\,du\,dv$$

donde

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

es el *Jacobiano*. Por tanto

$$g(u, v) = f[\psi_1(u, v),\ \psi_2(u, v)]J$$

que es (36), página 46, para el caso donde $J > 0$. Análogamente podemos demostrar (36) para el caso donde $J < 0$.

2.18. La función de probabilidad de una variable aleatoria X es

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} 2^{-x} & x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar la probabilidad para la variable aleatoria $U = X^4 + 1$.

Puesto que $U = X^4 + 1$ la relación entre los valores de u y x de las variables aleatorias U y X está dada por $u = x^4 + 1$ ó $x = \sqrt[4]{u-1}$, donde $u = 2{,}17{,}82, \ldots$ y se ha tomado la raíz real positiva. Entonces la función de probabilidad pedida para U es

$$g(u) \quad = \quad \begin{cases} 2^{-\sqrt[4]{u-1}} & u = 2, 17, 82, \ldots \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

utilizando el Teorema 2-1, página 46, o el Problema 2.15.

2.19. La función de probabilidad de una variable aleatoria X está dada por

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} x^2/81 & -3 < x < 6 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar la densidad de probabilidad para la variable aleatoria $U = \frac{1}{3}(12 - X)$.

Tenemos $u = 1/3\,(12 - x)$ ó $x = 12 - 3u$. Así para cada valor de x hay uno y solamente un valor de u y recíprocamente. Los valores de u que corresponden a $x = -3$ y $x = 6$ son $u = 5$ y $u = 2$ respectivamente. Puesto que $\psi'(u) = dx/du = -3$ se deduce por el Teorema 2-3, página 46, o por el Problema 2.16 que la función de densidad para U es

$$g(u) \quad = \quad \begin{cases} (12 - 3u)^2/27 & 2 < u < 5 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Verificación:

$$\int_2^5 \frac{(12 - 3u)^2}{27}\,du \quad = \quad -\frac{(12 - 3u)^3}{243}\bigg|_2^5 \quad = \quad 1$$

2.20. Hallar la densidad de probabilidad de la variable aleatoria $U = X^2$ donde X es la variable aleatoria del Problema 2.19.

Tenemos $u = x^2$ ó $x = \pm\sqrt{u}$. Así para cada valor de x corresponde uno y solamente un valor de u pero para cada valor de $u \neq 0$ corresponden *dos* valores de x. Los valores de x para los cuales $-3 < x < 6$ corresponden a los valores para los cuales $0 \leqq u < 36$ como se muestra en la Fig. 2-18.

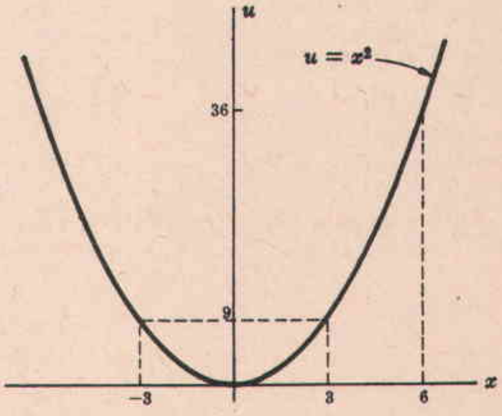


Fig. 2-18

Como se observa en esta figura el intervalo $-3 < x \leqq 3$ corresponde a $0 \leqq u \leqq 9$ en tanto que $3 < x < 6$ corresponde a $9 < u < 36$. En este caso no podemos emplear el Teorema 2-4 directamente pero podemos proceder de la manera siguiente. La función de distribución para U es

$$G(u) \quad = \quad P(U \leqq u)$$

Entonces si $0 \leqq u \leqq 9$ tenemos

$$G(u) \quad = \quad P(U \leqq u) \quad = \quad P(X^2 \leqq u) \quad = \quad P(-\sqrt{u} \leqq X \leqq \sqrt{u})$$
$$= \quad \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} f(x)\,dx$$

Pero si $9 < u < 36$ tenemos

$$G(u) \quad = \quad P(U \leqq u) \quad = \quad P(-3 < X < \sqrt{u}) \quad = \quad \int_{-3}^{\sqrt{u}} f(x)\,dx$$

Puesto que la función de densidad $g(u)$ es la derivada de $G(u)$ tenemos, usando la regla de Leibniz (*12*),

$$g(u) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{f(\sqrt{u}) + f(-\sqrt{u})}{2\sqrt{u}} & 0 \leqq u \leqq 9 \\ \dfrac{f(\sqrt{u})}{2\sqrt{u}} & 9 < u < 36 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Utilizando la definición dada de $f(x)$ esto se convierte en

$$g(u) \quad = \quad \begin{cases} \sqrt{u}/81 & 0 \leqq u \leqq 9 \\ \sqrt{u}/162 & 9.< u < 36 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Verificación:
$$\int_0^9 \frac{\sqrt{u}}{81}\,du + \int_9^{36} \frac{\sqrt{u}}{162}\,du \quad = \quad \left.\frac{2u^{3/2}}{243}\right|_0^9 + \left.\frac{u^{3/2}}{243}\right|_9^{36} \quad = \quad 1$$

2.21. Si las variables aleatorias X, Y tienen función de densidad conjunta

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} xy/96 & 0 < x < 4,\ 1 < y < 5 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

(véase Problema 2.11) hallar la función de densidad de $U = X + 2Y$.

Método 1.

Sea $u = x + 2y$, $v = x$, escogiendo arbitrariamente la segunda relación. Entonces la solución simultánea resulta $x = v$, $y = 1/2\,(u - v)$. Por tanto la región $0 < x < 4$, $1 < y < 5$ corresponde a la región $0 < v < 4$, $2 < u - v < 10$ que se muestra sombreada en la Fig. 2-19.

El Jacobiano está dado por

$$J \quad = \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \quad -\frac{1}{2}$$

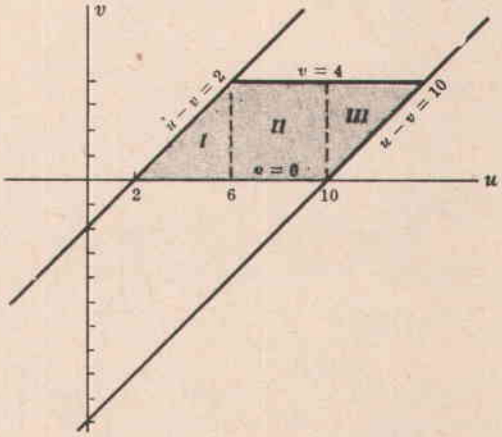


Fig. 2-19

Entonces por el Teorema 2-4 la función de densidad conjunta de U y V es

$$g(u,v) \quad = \quad \begin{cases} v(u-v)/384 & 2 < u - v < 10,\ 0 < v < 4 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

La función de densidad marginal de U está dada por

$$g_1(u) \quad = \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{v=0}^{u-2} \frac{v(u-v)}{384}\,dv & 2 < u < 6 \\ \displaystyle\int_{v=0}^{4} \frac{v(u-v)}{384}\,dv & 6 < u < 10 \\ \displaystyle\int_{v=u-10}^{4} \frac{v(u-v)}{384}\,dv & 10 < u < 14 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

como se determina refiriéndose a las regiones sombreadas *I*, *II*, *III* de la Fig. 2-19. Desarrollando las integraciones encontramos

$$g_1(u) \quad = \quad \begin{cases} (u-2)^2(u+4)/2304 & 2 < u < 6 \\ (3u-8)/144 & 6 < u < 10 \\ (348u - u^3 - 2128)/2304 & 10 < u < 14 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Puede efectuarse una verificación al demostrar que la integral de $g_1(u)$ es igual a 1.

Método 2.

La función de distribución de la variable aleatoria $X + 2Y$ está dada por

$$P(X+2Y \leqq u) \quad = \quad \iint\limits_{x+2y \leqq u} f(x,y)\,dx\,dy \quad = \quad \iint\limits_{\substack{x+2y \leqq u \\ 0<x<4 \\ 1<y<5}} \frac{xy}{96}\,dx\,dy$$

Para $2 < u < 6$ observamos al referirnos a la Fig. 2-20 que la última integral es igual a

$$\int_{x=0}^{u-2} \int_{y=1}^{(u-x)/2} \frac{xy}{96}\,dx\,dy \quad = \quad \int_{x=0}^{u-2} \left[\frac{x(u-x)^2}{768} - \frac{x}{192}\right] dx$$

Al derivarla con respecto a u se encuentra $(u-2)^2\ (u+4)/2304$. De una manera análoga podemos obtener el resultado del método 1 para $6 < u < 10$, etc.

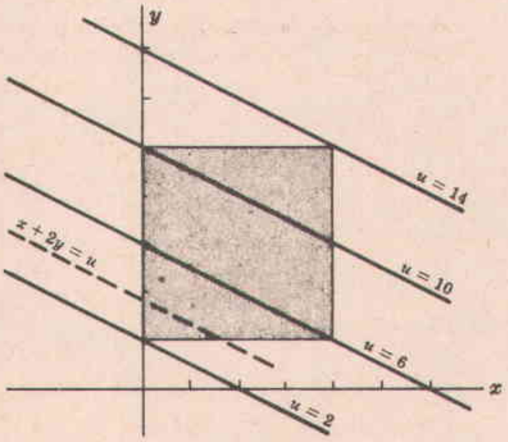


Fig. 2-20

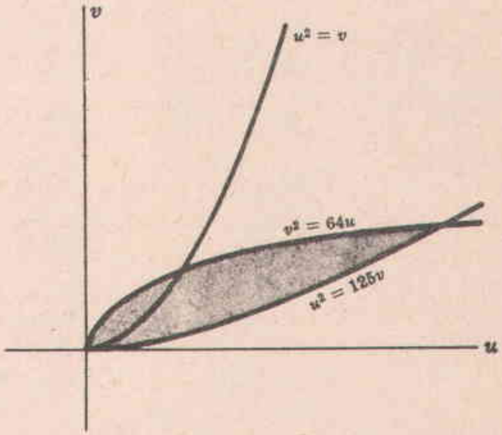


Fig. 2-21

2.22. Si las variables aleatorias X, Y tienen la función de densidad conjunta

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} xy/96 & 0 < x < 4,\ 1 < y < 5 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

(véase Problema 2.11) hallar la función de densidad conjunta de $U = XY^2$, $V = X^2Y$.

Considérese $u = xy^2$, $v = x^2y$. Al dividir estas ecuaciones obtenemos $y/x = u/v$ así que $y = ux/v$. Esto nos conduce a la solución simultánea $x = v^{2/3}u^{-1/3}$, $y = u^{2/3}v^{-1/3}$. La imagen de $0 < x < 4$, $1 < y < 5$ en el plano uv está dada por

$$0 \ < \ v^{2/3}u^{-1/3} \ < \ 4 \qquad\qquad 1 \ < \ u^{2/3}v^{-1/3} \ < \ 5$$

que son equivalentes a

$$v^2 \ < \ 64u \qquad\qquad v \ < \ u^2 \ < \ 125v$$

Esta región se muestra sombreada en la Fig. 2.21.

El Jacobiano está dado por

$$J \quad = \quad \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}v^{2/3}u^{-4/3} & \frac{2}{3}v^{-1/3}u^{-1/3} \\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} & -\frac{1}{3}u^{2/3}v^{-4/3} \end{vmatrix} \quad = \quad -\frac{1}{3}u^{-2/3}v^{-2/3}$$

Así la función de densidad conjunta de U y V es, por el Teorema 2-4,

$$g(u,v) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{(v^{2/3}u^{-1/3})(u^{2/3}v^{-1/3})}{96}\,(\frac{1}{3}u^{-2/3}v^{-2/3}) & v^2 < 64u, \ v < u^2 < 125v \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

ó

$$g(u,v) \quad = \quad \begin{cases} u^{-1/3}v^{-1/3}/288 & v^2 < 64u, \ v < u^2 < 125v \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

CONVOLUCIONES

2.23. Sean X, Y variables aleatorias que tienen una función de densidad conjunta $f(x, y)$. Demostrar que la función de densidad de $U = X + Y$ es

$$g(u) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(v, u-v)\,dv$$

Método 1.

Sea $U = X + Y$, $V = X$, donde arbitrariamente hemos agregado la segunda ecuación. A estas ecuaciones corresponden $u = x + y$, $v = x$ ó $x = v$, $y = u - v$. El Jacobiano de la transformación está dado por

$$J \quad = \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad = \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \quad = \quad -1$$

Así por el Teorema 2-4, página 46, la función de densidad conjunta de U y V es

$$g(u, v) \quad = \quad f(v, u-v)$$

Se deduce de *(26)*, página 45, que la función de densidad marginal de U es

$$g(u) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(v, u-v)\,dv$$

Método 2.

La función de distribución de $U = X + Y$ es igual a la integral doble de $f(x, y)$ tomada sobre la región definida por $x + y \leqq u$, esto es

$$G(u) \quad = \quad \iint\limits_{x+y \leqq u} f(x,y)\,dx\,dy$$

Puesto que la región está por debajo de la línea $x + y = u$, como se indica por la parte sombreada en la Fig. 2-22, vemos que

$$G(u) \quad = \quad \int_{x=-\infty}^{\infty} \left[\int_{y=-\infty}^{u-x} f(x,y)\,dy \right] dx$$

La función de densidad de U es la derivada de $G(u)$ con respecto a u está dada por

$$g(u) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x, u-x)\,dx$$

utilizando la regla de Leibniz *(12)* primero en la integral de x y luego en la integral de y.

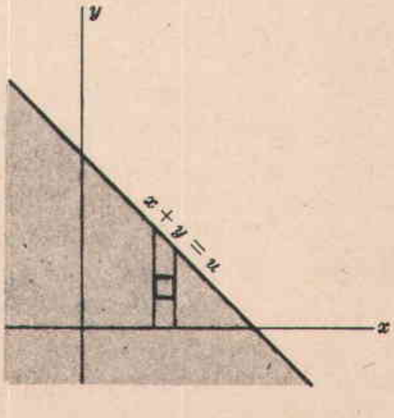


Fig. 2-22

2.24. Resolver el Problema 2.23 si X, Y son variables aleatorias independientes que tienen funciones de densidad $f_1(x)$, $f_2(y)$ respectivamente.

En este caso la función de densidad conjunta es $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, así que por el Problema 2.23 la función de densidad de $U = X + Y$ es

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(v) f_2(u-v)\, dv = f_1 * f_2$$

que es la *convolución* de f_1 y f_2.

2.25. Si X, Y son variables aleatorias independientes que tienen funciones de densidad

$$f_1(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \geqq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 3e^{-3y} & y \geqq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

hallar la función de densidad de su suma, $U = X + Y$.

Por el Problema 2.24 la función de densidad pedida es la convolución de f_1 y f_2 y está dada por

$$g(u) = f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(v) f_2(u-v)\, dv$$

En el integrando f_1 se anula cuando $v < 0$ y f_2 se anula cuando $v < u$. Por tanto

$$\begin{aligned} g(u) &= \int_0^u (2e^{-2v})(3e^{-3(u-v)})\, dv \\ &= 6e^{-3u} \int_0^u e^v\, dv = 6e^{-3u}(e^u - 1) = 6(e^{-2u} - e^{-3u}) \end{aligned}$$

si $u \geqq 0$ y $g(u) = 0$ si $u < 0$.

Verificación: $$\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, du = 6 \int_0^{\infty} (e^{-2u} - e^{-3u})\, du = 6\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1$$

2.26. Demostrar que $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ (Propiedad 1, página 47).

Tenemos

$$f_1 * f_2 = \int_{v=-\infty}^{\infty} f_1(v) f_2(u-v)\, dv$$

Haciendo $w = u - v$ de tal manera que $v = u - w$, $dv = -dw$, obtenemos

$$f_1 * f_2 = \int_{w=\infty}^{-\infty} f_1(u-w) f_2(w)(-dw) = \int_{w=-\infty}^{\infty} f_2(w) f_1(u-w)\, dw = f_2 * f_1$$

DISTRIBUCIONES CONDICIONALES

2.27. Hallar (*a*) $f(y \mid 2)$, (*b*) $P(Y = 1 \mid X = 2)$ para la distribución del Problema 2.8.

(*a*) Empleando los resultados en los Problemas 2.8 y 2.9 tenemos

$$f(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{(2x + y)/42}{f_1(x)}$$

así que con $x = 2$

$$f(y \mid 2) = \frac{(4 + y)/42}{11/21} = \frac{4 + y}{22}$$

(*b*) $$P(Y = 1 \mid X = 2) = f(1 \mid 2) = \frac{5}{22}$$

2.28. Si X, Y tienen la función de densidad conjunta

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \frac{3}{4} + xy & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

hallar (*a*) $f(y \mid x)$, (*b*) $P(Y > \frac{1}{2} \mid \frac{1}{2} < X < \frac{1}{2} + dx)$.

(*a*) Para $0 < x < 1$,

$$f_1(x) \quad = \quad \int_0^1 \left(\frac{3}{4} + xy\right) dy \quad = \quad \frac{3}{4} + \frac{x}{2}$$

y

$$f(y \mid x) \quad = \quad \frac{f(x,y)}{f_1(x)} \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{3 + 4xy}{3 + 2x} & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{otra } y \end{cases}$$

Para otros valores de x, $f(x \mid y)$ no está definida.

(*b*)

$$P(Y > \tfrac{1}{2} \mid \tfrac{1}{2} < X < \tfrac{1}{2} + dx) \quad = \quad \int_{1/2}^{\infty} f(y \mid \tfrac{1}{2})\, dy \quad = \quad \int_{1/2}^{1} \frac{3 + 2y}{4}\, dy \quad = \quad \frac{9}{16}$$

2.29. La función de densidad conjunta de las variables aleatorias X, Y está dada por

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} 8xy & 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar (*a*) la densidad marginal de X, (*b*) la densidad marginal de Y, (*c*) la densidad condicional de X, (*d*) la densidad de Y.

La región sobre la cual $f(x, y)$ es diferente a cero se muestra sombreada en la Fig. 2-23.

(*a*) Para obtener la densidad marginal de X fijamos x e integramos con respecto a y desde 0 hasta x como se indica por la franja vertical en la Fig. 2-23. El resultado es

$$f_1(x) \quad = \quad \int_{y=0}^{x} 8xy\, dy \quad = \quad 4x^3$$

para $0 < x < 1$. Para los otros valores de x, $f_1(x) = 0$.

(*b*) Análogamente, la densidad marginal de Y se obtiene fijando a y e integrando con respecto a x desde $x = y$ hasta $x = 1$, como se indica por la franja horizontal en la Fig. 2-23. El resultado es para $0 < y < 1$,

$$f_2(y) \quad = \quad \int_{x=y}^{1} 8xy\, dx \quad = \quad 4y(1 - y^2)$$

Para los otros valores de y, $f_2(y) = 0$.

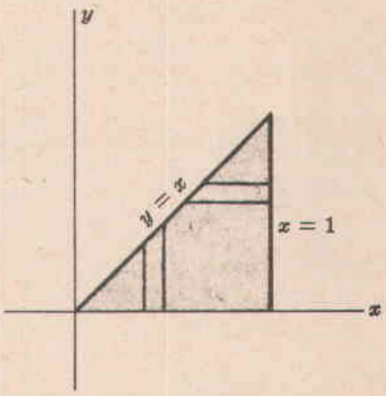


Fig. 2-23

(*c*) La función de densidad condicional de X es, para $0 < y < 1$,

$$f_1(x \mid y) \quad = \quad \frac{f(x,y)}{f_2(y)} \quad = \quad \begin{cases} 2x/(1 - y^2) & y \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{otra } x \end{cases}$$

La función de densidad condicional no está definida cuando $f_2(y) = 0$.

(*d*) La función de densidad condicional de Y es, para $0 < x < 1$,

$$f_2(y \mid x) \quad = \quad \frac{f(x,y)}{f_1(x)} \quad = \quad \begin{cases} 2y/x^2 & 0 \leqq y \leqq x \\ 0 & \text{otra } y \end{cases}$$

La función de densidad condicional no está definida cuando $f_1(x) = 0$.

Verificación: $$\int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 4x^3\,dx = 1, \qquad \int_0^1 f_2(y)\,dy = \int_0^1 4y(1-y^2)\,dy = 1$$

$$\int_y^1 f_1(x \mid y)\,dx = \int_y^1 \frac{2x}{1-y^2}dx = 1$$

$$\int_0^x f_2(y \mid x)\,dy = \int_0^x \frac{2y}{x^2}dy = 1$$

2.30. Determinar si las variables aleatorias del Problema 2,29 son independientes.

En la región sombreada de la Fig. 2-23, $f(x,y) = 8xy$, $f_1(x) = 4x^3$, $f_2(y) = 4y(1-y^2)$. Por tanto $f(x,y) \neq f_1(x)\,f_2(y)$, y así X, Y son dependientes.

Debe anotarse que no puede deducirse a partir de $f(x, y) = 8xy$, que $f(x, y)$ puede expresarse como una función de x por una función de y. Esto se debe a la restricción $0 \leqq y \leqq x$. Si esta se remplazará por alguna restricción en y no dependiente de x (como en el Problema 2.21), tal conclusión sería verdadera.

APLICACIONES A LA PROBABILIDAD GEOMETRICA

2.31. Una persona jugando a los dardos encuentra que la probabilidad de que el dardo caiga entre r y $r + dr$ es

$$P(r \leqq R \leqq r+dr) = c\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]dr$$

Aquí, R es la distancia del impacto desde el centro del objetivo, c es una constante y a es el radio del objetivo (véase Fig. 2-24). Hallar la probabilidad de pegar en el blanco, que se supone tiene radio b. Suponer que siempre se hace impacto en el objetivo.

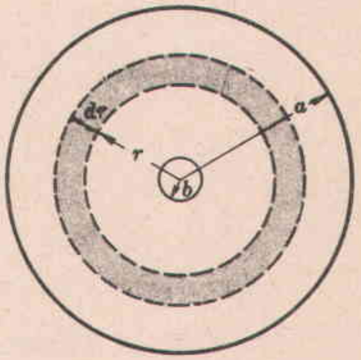


Fig. 2-24

La función de densidad está dada por

$$f(r) = c\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$$

Puesto que siempre se hace impacto en el objetivo, tenemos

$$c\int_0^a \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]dr = 1$$

de lo cual $c = 3/2a$. Entonces la probabilidad de pegar en el blanco es

$$\int_0^b f(r)\,dr = \frac{3}{2a}\int_0^b \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]dr = \frac{b(3a^2-b^2)}{2a^3}$$

2.32. Dos puntos se escogen aleatoriamente en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$. Determinar la probabilidad de que la suma de sus cuadrados sea menor que 1.

Denótense por X, Y las variables asociadas con los puntos dados. Puesto que se supone que intervalos iguales tienen probabilidades iguales, las funciones de densidad de X, Y están dadas respectivamente por

$$(1) \qquad f_1(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Entonces ya que X, Y son independientes, la función de densidad está dada por

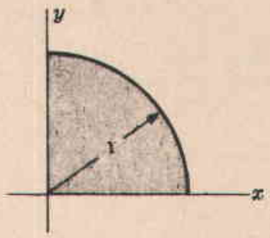


Fig. 2-25

(2)
$$f(x,y) \;=\; f_1(x)\,f_2(y) \;=\; \begin{cases} 1 & 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Se deduce que la probabilidad pedida está dada por

(3)
$$P(X^2 + Y^2 \leqq 1) \;=\; \iint_{\mathcal{R}} dx\,dy$$

donde $\mathcal{R}$ es la región definida por $x^2 + y^2 \leqq 1$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, o sea un cuadrante de una circunferencia de radio 1 (Fig. 2-25). Entonces puesto que (3) representa el área de $\mathcal{R}$ observamos que la probabilidad pedida es $\pi/4$.

PROBLEMAS DIVERSOS

2.33. Supóngase que las variables aleatorias X, Y tienen la función de densidad conjunta

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} c(2x+y) & 2 < x < 6,\ 0 < y < 5 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar (*a*) la constante c, (*b*) las funciones de distribución marginal para X y Y, (*c*) las funciones de densidad marginal para X y Y, (*d*) $P(3 < X < 4,\ Y > 2)$, (*e*) $P(X > 3)$, (*f*) $P(X + Y > 4)$, (*g*) la función de distribución conjunta, (*h*) si X, Y son independientes.

(*a*) La probabilidad total está dada por

$$\int_{x=2}^{6}\int_{y=0}^{5} c(2x+y)\,dx\,dy \;=\; \int_{x=2}^{6} c\left(2xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^5 dx$$
$$= \int_{x=2}^{6} c\left(10x + \frac{25}{2}\right)dx \;=\; 210c$$

Para que esto sea igual a 1, debemos tener $c = 1/210$.

(*b*) La función de distribución marginal para X es

$$F_1(x) \;=\; P(X \leqq x) \;=\; \int_{u=-\infty}^{x}\int_{v=-\infty}^{\infty} f(u,v)\,du\,dv$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{u=-\infty}^{x}\int_{v=-\infty}^{\infty} 0\,du\,dv \;=\; 0 & x < 2 \\ \displaystyle\int_{u=2}^{x}\int_{v=0}^{5} \frac{2u+v}{210}\,du\,dv \;=\; \frac{2x^2+5x-18}{84} & 2 \leqq x < 6 \\ \displaystyle\int_{u=2}^{6}\int_{v=0}^{5} \frac{2u+v}{210}\,du\,dv \;=\; 1 & x \geqq 6 \end{cases}$$

La función de distribución marginal para Y es

$$F_2(y) \;=\; P(Y \leqq y) \;=\; \int_{u=-\infty}^{\infty}\int_{v=-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{u=-\infty}^{\infty}\int_{v=-\infty}^{y} 0\,du\,dv \;=\; 0 & y < 0 \\ \displaystyle\int_{u=2}^{6}\int_{v=0}^{y} \frac{2u+v}{210}\,du\,dv \;=\; \frac{y^2+16y}{105} & 0 \leqq y < 5 \\ \displaystyle\int_{u=2}^{6}\int_{v=0}^{5} \frac{2u+v}{210}\,du\,dv \;=\; 1 & y \geqq 5 \end{cases}$$

(*c*) La función de densidad marginal para X es, de la parte (*b*),

$$f_1(x) \quad = \quad \frac{d}{dx}F_1(x) \quad = \quad \begin{cases} (4x+5)/84 & 2 < x < 6 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

La función de densidad marginal para Y es, de la parte (*b*),

$$f_2(y) \quad = \quad \frac{d}{dy}F_2(y) \quad = \quad \begin{cases} (2y+16)/105 & 0 < y < 5 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

(*d*)

$$P(3 < X < 4,\ Y > 2) \quad = \quad \frac{1}{210}\int_{x=3}^{4}\int_{y=2}^{5}(2x+y)\,dx\,dy \quad = \quad \frac{3}{20}$$

(*e*)

$$P(X > 3) \quad = \quad \frac{1}{210}\int_{x=3}^{6}\int_{y=0}^{5}(2x+y)\,dx\,dy \quad = \quad \frac{23}{28}$$

(*f*)

$$P(X+Y > 4) \quad = \quad \iint\limits_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dx\,dy$$

donde $\mathcal{R}$ es la región sombreada de la Fig. 2-26. Aunque se puede encontrar de esta forma, es más fácil utilizar el hecho de que

$$P(X+Y > 4) \quad = \quad 1 - P(X+Y \leqq 4) \quad = \quad 1 - \iint\limits_{\mathcal{R}'} f(x,y)\,dx\,dy$$

donde $\mathcal{R}'$ es la región doblemente rayada de la Fig. 2-26. Tenemos

$$P(X+Y \leqq 4) \quad = \quad \frac{1}{210}\int_{x=2}^{4}\int_{y=0}^{4-x}(2x+y)\,dx\,dy \quad = \quad \frac{2}{35}$$

Por tanto $P(X+Y > 4) = 33/35$.

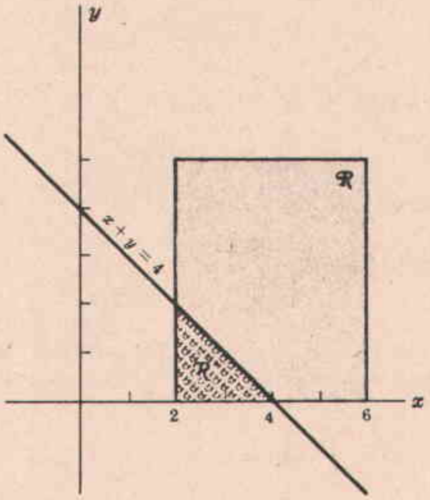


Fig. 2-26

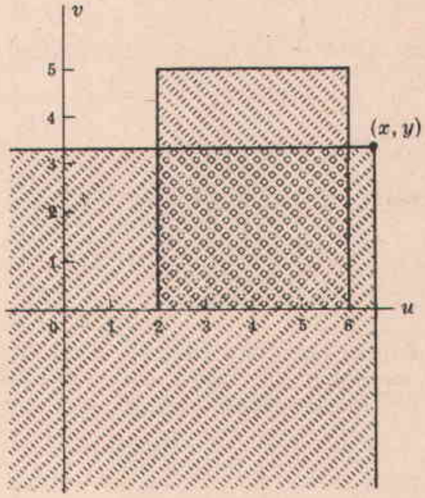


Fig. 2-27

(*g*) La función de distribución conjunta es

$$F(x,y) \quad = \quad P(X \leqq x,\ Y \leqq y) \quad = \quad \int_{u=-\infty}^{x}\int_{v=-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

En el plano uv (Fig. 2-27) la región de integración es la intersección del plano en el primer cuadrante $u \leqq x$, $v \leqq y$ y el rectángulo $2 < u < 6$, $0 < v < 5$ [en el cual $f(u, v)$ no es cero]. Para la localización de (x, y) como se muestra en la figura, tenemos

$$F(x,y) \quad = \quad \int_{u=2}^{6}\int_{v=0}^{y}\frac{2u+v}{210}\,du\,dv \quad = \quad \frac{16y+y^2}{105}$$

Cuando (x, y) se encuentra dentro del rectángulo, obtenemos otra expresión, etc. Los resultados completos se muestran en la Fig. 2-28.

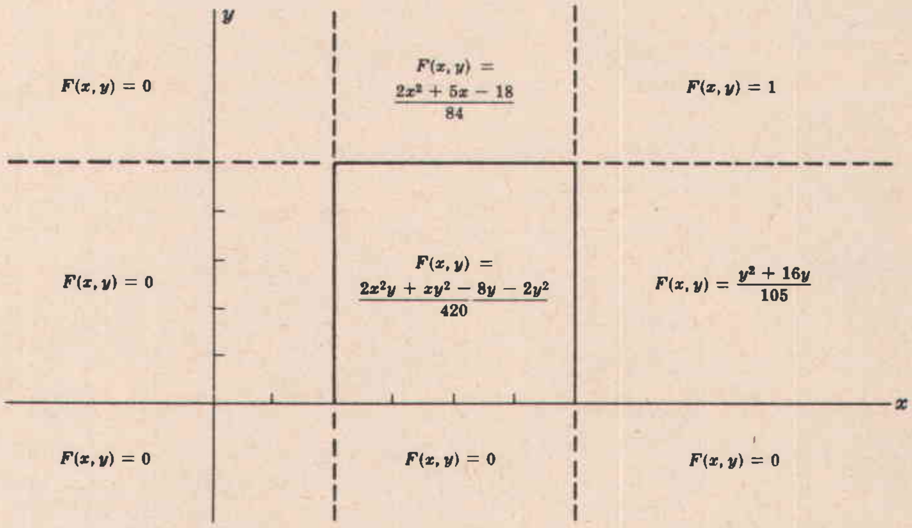


Fig. 2-28

(*h*) Las variables aleatorias son dependientes ya que

$$f(x, y) \neq f_1(x)\, f_2(y)$$

o, lo que es equivalente $F(x, y) \neq F_1(x)\, F_2(y)$.

2.34. Si X tiene la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar la función $Y = h(X)$ que tenga la función de densidad

$$g(y) = \begin{cases} 12y^3(1-y^2) & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Suponemos que la función desconocida h es tal que los intervalos $X \leqq x$, $Y \leqq y = h(x)$ tienen una correspondencia uno a uno en una forma continua. Entonces $P(X \leqq x) = P(Y \leqq y)$, es decir las funciones de distribución deben ser iguales. Por tanto, para $0 < x,y < 1$,

$$\int_0^x 6u(1-u)\, du = \int_0^y 12v^3(1-v^2)\, dv$$

ó

$$3x^2 - 2x^3 = 3y^4 - 2y^6$$

Por inspección, $x = y^2$ ó $y = h(x) = +\sqrt{x}$ es una solución, y esta solución tiene las propiedades deseadas. Por tanto $Y = +\sqrt{X}$.

2.35. Hallar la función de densidad de $U = XY$ si la función de densidad conjunta de X, Y es $f(x, y)$.

Método 1.

Sea $U = XY$, $V = X$, a las cuales corresponde $u = xy$, $v = x$ ó $x = v$, $y = u/v$. Entonces el Jacobiano está dado por

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ v^{-1} & -uv^{-2} \end{vmatrix} = -v^{-1}$$

Por tanto la función de densidad conjunta de U, V es

$$g(u, v) = \frac{1}{|v|} f\left(v, \frac{u}{v}\right)$$

a partir de la cual se obtiene la función de densidad marginal de U.

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u, v)\, dv = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|v|} f\left(v, \frac{u}{v}\right) dv$$

Método 2.

La función de distribución de U es

$$G(u) = \iint\limits_{xy \leqq u} f(x, y)\, dx\, dy$$

Para $u \geqq 0$ la región de integración se muestra sombreada en la Fig. 2-29. Observamos que

$$G(u) = \int_{-\infty}^{0} \left[\int_{u/x}^{\infty} f(x, y)\, dy \right] dx + \int_{0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{u/x} f(x, y)\, dy \right] dx$$

Derivando con respecto a u utilizando la regla de Leibniz, obtenemos

$$g(u) = \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{-1}{x}\right) f\left(x, \frac{u}{x}\right) dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{u}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{u}{x}\right) dx$$

El mismo resultado se obtiene para $u < 0$, cuando la región de integración está limitada por la hipérbola a trazos en la Fig. 2-29.

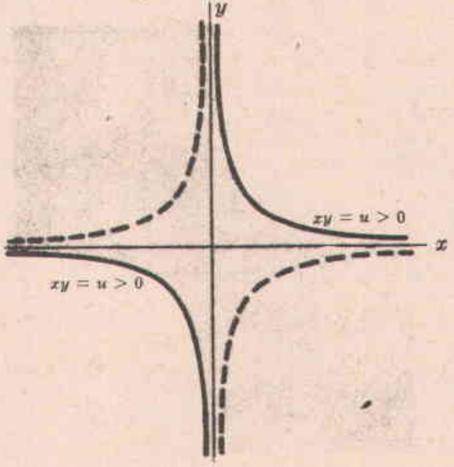


Fig. 2-29

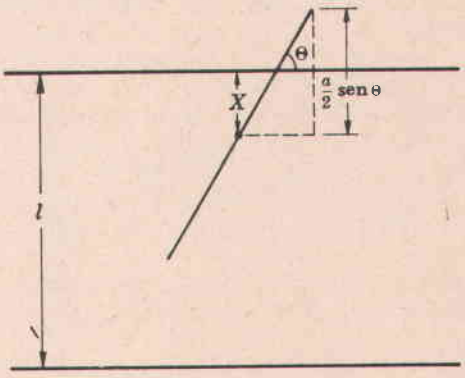


Fig. 2-30

2.36. Un piso tiene líneas paralelas a distancias iguales l entre sí. Una aguja de longitud $a < l$ cae aleatoriamente al piso. Hallar la probabilidad de que la aguja intersecte una línea. (Este problema es conocido como el *problema de la aguja de Buffon*).

Sea X una variable aleatoria que da la distancia del punto medio de la aguja a la línea más cercana (Fig. 2-30). Sea Θ una variable aleatoria que da el ángulo agudo entre la aguja (o su prolongación) y la línea. Denotamos por x y θ cualquier valor determinado de X y Θ. Se observa que X puede tomar cualquier valor entre 0 y $l/2$, así que $0 \leqq x \leqq l/2$. También Θ puede tomar cualquier valor entre 0 y $\pi/2$. Se deduce que

$$P(x < X \leqq x + dx) \;=\; \frac{2}{l}\,dx$$

$$P(\theta < \Theta \leqq \theta + d\theta) \;=\; \frac{2}{\pi}\,d\theta$$

es decir, las funciones de densidad de X y Θ están dadas por $f_1(x) = 2/l$, $f_2(\theta) = 2/\pi$. Como verificación notamos que

$$\int_0^{l/2} \frac{2}{l}\,dx \;=\; 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi}\,d\theta \;=\; 1$$

Puesto que X y Θ son independientes la función de densidad conjunta es

$$f(x,\theta) \;=\; \frac{2}{l}\cdot\frac{2}{\pi} \;=\; \frac{4}{l\pi}$$

De la Fig. 2-30 se observa que la aguja realmente toca la línea cuando $X \leqq (a/2)$ sen Θ. La probabilidad de este suceso está dada por

$$\frac{4}{l\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{x=0}^{(a/2)\,\mathrm{sen}\,\theta} dx\,d\theta \;=\; \frac{2a}{l\pi}$$

Cuando la expresión anterior se iguala a la frecuencia de caídas observadas en experimentos reales, se obtienen valores precisos de π Esto indica que el modelo de probabilidad descrito es apropiado.

2.37. Dos personas acuerdan encontrarse entre las 2:00 P. M. y las 3:00 P. M. con el convenio de que no se esperarán más de 15 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren?

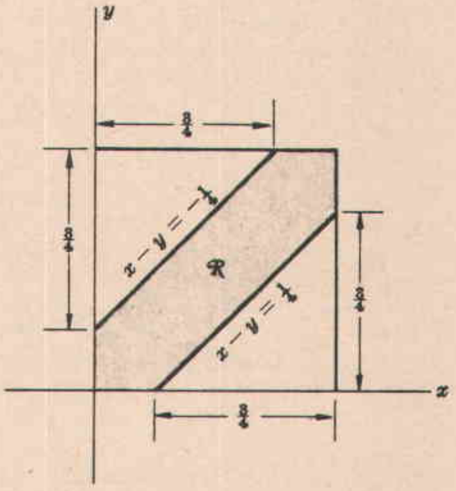


Fig. 2-31

Sean X, Y las variables aleatorias que representan el instante de llegada, medido en fracciones de hora después de las 2:00 P. M., de las dos personas. Suponiendo que a intervalos de tiempo iguales corresponden probabilidades de llegada iguales las funciones de densidad de X, Y están dadas respectivamente por

$$f_1(x) \;=\; \begin{cases} 1 & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

$$f_2(y) \;=\; \begin{cases} 1 & 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Entonces, puesto que X, Y son independientes, la función de densidad conjunta es

$$(1) \qquad f(x,y) \;=\; f_1(x)\,f_2(y) \;=\; \begin{cases} 1, & 0 \leqq x \leqq 1,\; 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Puesto que 15 minutos = 1/4 de hora, la probabilidad pedida es

$$(2) \qquad P\left(|X - Y| \leqq \frac{1}{4}\right) \;=\; \iint_{\mathcal{R}} dx\,dy$$

donde $\mathcal{R}$ es la región sombreada que se muestra en la Fig. 2-31. El lado derecho de (2) es el área de esta región, que es igual a $1 - (\frac{3}{4})(\frac{3}{4}) = \frac{7}{16}$, ya que el cuadrado tiene área 1, en tanto que los dos triángulos de las esquinas tienen áreas $\frac{1}{2}(\frac{3}{4})(\frac{3}{4})$ cada uno. Por tanto la probabilidad pedida es 7/16.

Problemas suplementarios

VARIABLES ALEATORIAS Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETAS

2.38. Una moneda se lanza tres veces. Si X es la variable aleatoria que indica el número de caras que resultan, (*a*) construir una tabla que muestre la distribución de probabilidad de X y (*b*) representar gráficamente la distribución.

2.39. Una urna tiene 5 bolas blancas y 3 negras. Si se extraen dos bolas aleatoriamente sin remplazamiento y X denota el número de bolas blancas, (*a*) hallar la distribución de probabilidad para X y (*b*) representar gráficamente la distribución.

2.40. Resolver el Problema 2.39 si se extraen las bolas con remplazamiento.

2.41. Sea Z la variable aleatoria que representa el número de caras menos el número de sellos en dos lanzamientos de una moneda honrada. Hallar la distribución de probabilidad de Z. Comparar los resultados con los Ejemplos 2.1 y 2.2.

2.42. Sea X la variable aleatoria que representa el número de ases extraídos aleatoriamente en 4 cartas de una baraja de 52 cartas. (*a*) Construir una tabla que muestre la distribución de probabilidad de X y (*b*) representar gráficamente la distribución.

FUNCIONES DE DISTRIBUCION DISCRETA

2.43. La función de probabilidad de una variable aleatoria X se muestra en la Tabla 2-7. (*a*) Construir una tabla que indique la función de distribución de X y (*b*) representar gráficamente esta función de distribución.

Tabla 2-7

x	1	2	3
$f(x)$	1/2	1/3	1/6

Tabla 2-8

x	1	2	3	4
$F(x)$	1/8	3/8	3/4	1

2.44. Obtener la función de distribución y su gráfica para el (*a*) Problema 2.38, (*b*) Problema 2.39, (*c*) Problema 2.40.

2.45. Obtener la función de distribución y su gráfica para el (*a*) Problema 2.41, (*b*) Problema 2.42.

2.46. La Tabla 2-8 muestra la función de distribución de la variable aleatoria X. Determinar (*a*) la función de probabilidad, (*b*) $P(1 \leqq X \leqq 3)$, (*c*) $P(X \geqq 2)$, (*d*) $P(X < 3)$, (*e*) $P(X > 1.4)$.

VARIABLES ALEATORIAS Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CONTINUAS

2.47. Una variable aleatoria X tiene función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-3x} & x > 0 \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases}$$

Hallar (*a*) la constante *c*, (*b*) $P(1 < X < 2)$, (*c*) $P(X \geqq 3)$, (*d*) $P(X < 1)$.

2.48. Hallar la función de distribución para la variable aleatoria del Problema 2.47. Representar gráficamente las funciones de densidad y distribución, describiendo la relación entre ellas.

2.49. Una variable aleatoria X tiene función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 1 \leqq x \leqq 2 \\ cx & 2 < x < 3 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar (*a*) la constante c, (*b*) $P(X > 2)$, (*c*) $P(1/2 < X < 3/2)$.

2.50. Hallar la función de distribución para la variable aleatoria X del Problema 2.49.

2.51. La función de distribución de una variable aleatoria X está dada por

$$F(x) = \begin{cases} cx^3 & 0 \leqq x < 3 \\ 1 & x \geqq 3 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Si $P(X = 3) = 0$ hallar (*a*) la constante c, (*b*) la función de densidad, (*c*) $P(X > 1)$, (*d*) $P(1 < X < 2)$.

2.52. ¿Puede ser la función

$$F(x) = \begin{cases} c(1 - x^2) & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

una función de distribución? Explicar.

2.53. Sea X una variable aleatoria que tiene una función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \leqq x \leqq 2 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar (*a*) el valor de la constante c, (*b*) $P(1/2 < X < 3/2)$, (*c*) $P(X > 1)$, (*d*) la función de distribución.

DISTRIBUCIONES CONJUNTAS Y VARIABLES INDEPENDIENTES

2.54. La función de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias discretas X, Y está dada por $f(x, y) = cxy$ para $x = 1, 2, 3$, $y = 1, 2, 3$, cero de otra forma. Hallar (*a*) la constante c, (*b*) $P(X = 2, Y = 3)$, (*c*) $P(1 \leqq X \leqq 2, Y \leqq 2)$, (*d*) $P(X \geqq 2)$, (*e*) $P(Y < 2)$, (*f*) $P(X = 1)$, (*g*) $P(Y = 3)$.

2.55. Hallar las funciones de probabilidad marginal de (*a*) X y (*b*) Y para las variables aleatorias del Problema 2.54, (*c*) Determinar si X, Y son independientes.

2.56. Demostrar que las variables aleatorias discretas X, Y son independientes solo si *para todos los valores de* x, y su función de probabilidad conjunta puede expresarse por el producto de una función en x y una función en y.

2.57. Sean X, Y variables aleatorias continuas que tienen función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + y^2) & 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Determinar (*a*) la constante c, (*b*) $P(X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{2})$, (*c*) $P(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4})$, (*d*) $P(Y < \frac{1}{2})$, (*e*) si X, Y son independientes.

2.58. Hallar las funciones de distribución marginal (*a*) de X, (*b*) de Y para la función de densidad del Problema 2.57.

2.59. Demostrar el resultado del Problema 2.56 para el caso donde las variables son continuas.

DISTRIBUCIONES CONDICIONALES Y FUNCIONES DE DENSIDAD

2.60. Hallar la función de probabilidad condicional (*a*) de X dada Y, (*b*) de Y dada X, para la distribución del Problema 2.54.

2.61. Si
$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar la función de densidad condicional de (*a*) X dada Y, (*b*) Y dada X.

2.62. Hallar la densidad condicional de (*a*) X dada Y, (*b*) Y dada X, para la distribución del Problema 2.57.

2.63. Sea
$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x \geqq 0,\ y \geqq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

la función de densidad conjunta de X, Y. Hallar la función de densidad condicional de (*a*) X dada Y, (*b*) Y dada X.

CAMBIO DE VARIABLES

2.64. Si X tiene función de densidad
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases}$$

Hallar la función de densidad de $Y = X^2$.

2.65. (*a*) Si la función de densidad de X es $f(x)$ hallar la función de densidad de X^3. (*b*) Ilustrar el resultado en la parte (*a*) escogiendo
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-2x} & x \geqq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

y verificar la solución.

2.66. Demostrar el Teorema 2-2, página 46.

2.67. Demostrar el Teorema 2-3, página 46, para los casos (*a*) $\psi'(u) < 0$, (*b*) $\psi'(u) \geqq 0$, (*c*) $\psi'(u) \leqq 0$.

2.68. Si X tiene función de densidad $f(x) = (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$, $-\infty < x < \infty$, hallar la función de densidad de $Y = X^2$.

2.69. Verificar que la integral de $g_1(u)$ en el método 1 del Problema 2.21 es igual a 1.

2.70. Si la densidad de X es $f(x) = 1/\pi(x^2+1)$, $-\infty < x < \infty$, hallar la densidad de $Y = \tan^{-1} X$.

2.71. Completar la labor necesaria para hallar $g_1(u)$ en el método 2 del Problema 2.21 y verificar su respuesta.

2.72. Sea la densidad de X
$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar la densidad de (*a*) $3X - 2$, (*b*) $X^3 + 1$.

2.73. Verificar por medio de integración directa la función de densidad conjunta hallada en el Problema 2.22.

2.74. Si X, Y tienen función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x \geqq 0,\ y \geqq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

y $U = X/Y$, $V = X + Y$, hallar la función de densidad conjunta de U y V.

2.75. Emplear el Problema 2.22 para hallar la función de densidad de (a) $U = XY^2$. (b) $V = X^2Y$.

2.76. Sean X, Y variables aleatorias que tienen función de densidad conjunta $f(x,y) = (2\pi)^{-1}e^{-(x^2+y^2)}$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Si R y Θ son nuevas variables aleatorias tales que $X = R\cos\Theta$, $Y = R\,\text{sen}\,\Theta$ demostrar que la función de densidad de R es

$$g(r) = \begin{cases} re^{-r^2/2} & r \geqq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases}$$

2.77. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

la función de densidad conjunta de X, Y. Hallar la función de densidad de $Z = XY$.

CONVOLUCIONES

2.78. Sean X, Y variables aleatorias independientes distribuidas idénticamente con función de densidad

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq t \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar la función de densidad de $X + Y$ y verificar su solución.

2.79. Sean X, Y variables aleatorias independientes distribuidas idénticamente con función de densidad

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geqq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar la función de densidad de X, Y y verificar su solución.

2.80. Demostrar que (a) $f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$. (b) $f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3$.

2.81. Resolver el Problema 2.21 primero efectuando la transformación $2Y = Z$ y luego utilizando convoluciones para hallar la función de densidad de $U = X + Z$.

2.82. Si las variables aleatorias independientes X_1 y X_2 están distribuidas idénticamente con función de densidad

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t} & t \geqq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

hallar la función de densidad de $X_1 + X_2$.

APLICACIONES A LA PROBABILIDAD GEOMETRICA

2.83. Dos puntos se seleccionan aleatoriamente sobre un segmento de línea cuya longitud es $a > 0$. Hallar la probabilidad de que los tres segmentos de línea formados de esta manera puedan ser los lados de un triángulo.

2.84. Se sabe que un bus llega a una estación determinada entre las 3:00 P. M. y las 3:30 P. M. Una persona decide ir a esta estación entre estos tiempos aleatoriamente y esperar por el bus máximo 5 minutos. Si no lo toma, tomará el metro. ¿Cuál es la probabilidad de que tome el metro?

2.85. Dos segmentos de línea, AB y CD tienen longitudes de 8 y 6 unidades respectivamente. Dos puntos P y Q se escogen aleatoriamente sobre AB y CD respectivamente. Demostrar que la probabilidad de que el área de un triángulo de altura AP y base CQ sea mayor que 12 unidades cuadradas es igual a $(1 - \ln 2)/2$.

PROBLEMAS DIVERSOS

2.86. Supóngase que $f(x) = c/3^x$, $x = 1, 2, \ldots$, es la función de probabilidad para una variable aleatoria X. (*a*) Determinar c. (*b*) Hallar la función de distribución. (*c*) Representar gráficamente la función de probabilidad y la función de distribución. (*d*) Hallar $P(2 \leqq X < 5)$. (*e*) Hallar $P(X > 3)$.

2.87. Supóngase que

$$f(x) = \begin{cases} cxe^{-2x} & x \geqq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

es la función de densidad para una variable aleatoria X. (*a*) Determinar c. (*b*) Hallar la función de distribución. (*c*) Representar gráficamente la función de densidad y la función de distribución. (*d*) Hallar $P(X \geqq 1)$. (*e*) Hallar $P(2 \leqq X < 3)$.

2.88. La función de probabilidad de una variable aleatoria X está dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2p & x = 1 \\ p & x = 2 \\ 4p & x = 3 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde p es una constante. Hallar (*a*) $P(0 \leqq X < 3)$, (*b*) $P(X > 1)$.

2.89. (*a*) Demostrar que para una constante c apropiada,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqq 0 \\ c(1 - e^{-x})^2 & x > 0 \end{cases}$$

es la función de distribución para una variable aleatoria X, encontrar c. (*b*) Determinar $P(1 < X < 2)$.

2.90. Una variable aleatoria X tiene función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - x^2) & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar la función de densidad de la variable aleatoria $Y = X^2$ y verificar su solución.

2.91. Dos variables aleatorias independientes, X, Y tienen funciones de densidad respectivas

$$f(x) = \begin{cases} c_1 e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} c_2 y e^{-3y} & y > 0 \\ 0 & y \leqq 0 \end{cases}$$

Hallar (*a*) c_1 y c_2, (*b*) $P(X + Y > 1)$, (*c*) $P(1 < X < 2, Y \geqq 1)$, (*d*) $P(1 < X < 2)$, (*e*) $P(Y \geqq 1)$.

2.92. En el Problema 2.91 ¿cuál es la relación entre las soluciones (*c*), (*d*) y (*e*)? Justificar su respuesta.

2.93. Sean X, Y variables aleatorias que tienen función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} c(2x+y) & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar (*a*) la constante c. (*b*) $P(X > 1/2,\ Y < 3/2)$, (*c*) la función de densidad (marginal) de X, (*d*) la función de densidad (marginal) de Y.

2.94. En el Problema 2.93 se cumple que $P(X > \frac{1}{2},\ Y < \frac{3}{2}) = P(X > \frac{1}{2})\, P(Y < \frac{3}{2})$. ¿Por qué?

2.95. En el Problema 2.91 hallar la función de densidad de (*a*) X^2, (*b*) $X + Y$.

2.96. Si X, Y tienen función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/y & 0 < x < y,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

(*a*) Determinar si X, Y son independientes. (*b*) Hallar $P(X > 1/2)$. (*c*) Hallar $P(X < 1/2, Y > 1/3)$. (*d*) Hallar $P(X + Y > 1/2)$.

2.97. Generalizar (*a*) el Problema 2.78 y (*b*) el Problema 2.79 a tres o más variables.

2.98. Sean X, Y variables aleatorias independientes distribuidas idénticamente y con función de densidad $f(u) = (2\pi)^{-1/2} e^{-u^2/2}$, $-\infty < u < \infty$. Hallar la función de densidad de $Z = X^2 + Y^2$.

2.99. La función de probabilidad conjunta para las variables X, Y está dada en la Tabla 2-9. (*a*) Hallar las funciones de probabilidad marginal de X y Y. (*b*) Hallar $P(1 \leqq X < 3,\ Y \geqq 1)$. (*c*) Determinar si X y Y son independientes.

Tabla 2-9

Y X	0	1	2
0	1/18	1/9	1/6
1	1/9	1/18	1/9
2	1/6	1/6	1/18

2.100. Supóngase que la función de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X, Y está dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy & 0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq x \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

(*a*) Determinar si X, Y son independientes. (*b*) Hallar $P(1/2 < X < 1)$. (*c*) Hallar $P(Y \geqq 1)$. (*d*) Hallar $P(1/2 < X < 1,\ Y \geqq 1)$.

2.101. Sean X, Y variables aleatorias independientes cada una con función de densidad

$$f(u) = \frac{\lambda^u e^{-\lambda}}{u!} \qquad u = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $\lambda > 0$. Demostrar que la función de densidad de $X + Y$ es

$$g(u) = \frac{(2\lambda)^u e^{-2\lambda}}{u!} \qquad u = 0, 1, 2, \ldots$$

2.102. ¿Cuál es el análogo del teorema de la convolución para variables aleatorias discretas? Ilustrarlo usando el Problema 2.101.

2.103. Una estaca de longitud L se rompe en dos partes. ¿Cuál es la probabilidad de que una parte tenga una longitud mayor que el doble de la otra? Indicar claramente qué suposiciones se hicieron. Estudiar si considera que estas suposiciones son realistas y cómo podría mejorarlas si no lo son.

2.104. Un piso está construido de cuadrados de lado l. Una aguja de longitud $a < l$ se lanza al piso. Demostrar que la probabilidad de que la aguja intersecte al menos un lado, es igual a $a(4l - a)/\pi l^2$.

2.105. Para una aguja de longitud dada ¿cuál debe ser el lado del cuadrado en el Problema 2.104 para que la probabilidad de intersección sea máxima? Explicar su solución.

2.106. Si

$$f(x, y, z) = \begin{cases} xy^2z^3 & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

es la función de densidad conjunta de tres variables aleatorias X, Y, Z. Hallar (a) $P(X > \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2}, Z > \frac{1}{2})$, (b) $P(Z < X + Y)$.

2.107. Un haz cilíndrico de partículas de radio a, se dirige hacia un objetivo hemisférico ABC con centro en O como se indica en la Fig. 2-32. Supóngase que la distribución de las partículas está dada por

$$f(r) = \begin{cases} 1/a & 0 < r < a \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde r es la distancia desde el eje OB. Demostrar que la distribución de las partículas a lo largo del objetivo está dada por

$$g(\theta) = \begin{cases} \cos\theta & 0 < \theta < \pi/2 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde θ es el ángulo que la línea OP (desde O a cualquier punto P del objetivo) forma con el eje.

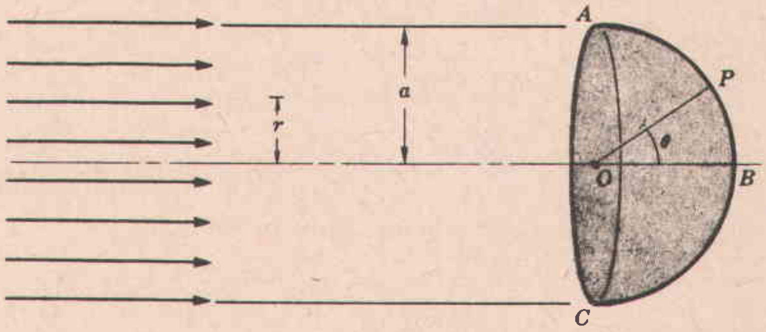


Fig. 2-32

2.108. En el Problema 2.107 hallar la probabilidad de que una partícula pegue al objetivo entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi/4$.

2.109. Supóngase que las variables aleatorias X, Y, Z tienen función de densidad conjunta

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - \cos\pi x \cos\pi y \cos\pi z & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Demostrar que aunque cualesquiera dos de estas variables aleatorias son independientes, es decir sus factores función de densidad marginal, las tres no son independientes.

Capítulo 3

Esperanza matemática

DEFINICION DE LA ESPERANZA MATEMATICA

Un concepto muy importante en probabilidad y estadística es el de la *esperanza matemática, valor esperado* o brevemente *esperanza* de una variable aleatoria. Para una variable aleatoria discreta X que puede tener los valores $x_1, \ldots, x_n$ la esperanza de X se define como

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + \cdots + x_n P(X = x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j P(X = x_j) \tag{1}$$

o igualmente, si $P(X = x_j) = f(x_j)$,

$$E(X) = x_1 f(x_1) + \cdots + x_n f(x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(x_j) = \sum x\, f(x) \tag{2}$$

donde la última suma se toma sobre todos los valores apropiados de x. Para el caso especial de (*2*) cuando las probabilidades son iguales, tenemos

$$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \tag{3}$$

que se llama la *media aritmética* o simplemente la *media* de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Para una variable aleatoria continua X que tiene una función de densidad $f(x)$ la esperanza de X se define como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \tag{4}$$

donde debe notarse la analogía con (*2*).

A la esperanza de X frecuentemente se le llama la *media* de X y se denota por μ_X, o simplemente μ cuando se sobreentiende la variable aleatoria determinada.

La media o esperanza de X da un valor típico o promedio de los valores de X y por esta razón se le llama *medida de centralización.* Otras medidas se consideran en la página 84.

EJEMPLO 3.1. Supóngase un juego con un dado. En este juego el jugador gana \$20 si obtiene 2, \$40 si obtiene 4, pierde \$30 si obtiene 6; en tanto que ni pierde ni gana si obtiene otro resultado. Hallar la suma esperada de dinero ganado.

Sea X la variable aleatoria que representa la cantidad de dinero ganada en cualquier lanzamiento. Las posibles cantidades de dinero ganado cuando el dado resulta 1, 2, . . . , 6 son $x_1, x_2, \ldots, x_6$ respectivamente con probabilidades $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_6)$. La función de probabilidad para X se indica en la Tabla 3-1. Así el valor esperado o esperanza es

$$E(X) = (0)\left(\frac{1}{6}\right) + (20)\left(\frac{1}{6}\right) + (0)\left(\frac{1}{6}\right) + (40)\left(\frac{1}{6}\right) + (0)\left(\frac{1}{6}\right) + (-30)\left(\frac{1}{6}\right) = 5$$

Tabla 3-1

x_j	0	+20	0	+40	0	−30
$f(x_j)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Se deduce que el jugador puede esperar una ganancia de $5. Por tanto en un juego honrado es de esperarse pagar $5 por jugar.

EJEMPLO 3.2. La función de densidad de una variable aleatoria X está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

El valor esperado de X es

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \int_0^2 x\left(\frac{1}{2}x\right)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}\,dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2 = \frac{4}{3}$$

FUNCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS

Sea X una variable aleatoria. Entonces $Y = g(X)$ también es una variable aleatoria y se deduce que

$$P(Y = y) = \sum_{\{x \mid g(x)=y\}} P(X = x)$$

1. Si X es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $f(x)$, entonces

$$E[g(X)] = g(x_1)\,f(x_1) + g(x_2)\,f(x_2) + \cdots + g(x_n)\,f(x_n)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} g(x_j)\,f(x_j) = \sum g(x)\,f(x) \tag{5}$$

2. Si X es una variable aleatoria con función de densidad $f(x)$, entonces

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)\,dx \tag{6}$$

Generalizaciones a funciones de dos o más variables aleatorias se hacen fácilmente. Así por ejemplo si X, Y son dos variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta $f(x, y)$, entonces la esperanza de $g(X, Y)$ se obtiene por

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\,f(x,y)\,dx\,dy \tag{7}$$

EJEMPLO 3.3. Si X es la variable aleatoria del Ejemplo 3.2,

$$E(3X^2 - 2X) = \int_{-\infty}^{\infty} (3x^2 - 2x)\,f(x)\,dx = \int_0^2 (3x^2 - 2x)\left(\frac{1}{2}x\right)dx = \frac{10}{3}$$

ALGUNOS TEOREMAS SOBRE ESPERANZA

Teorema 3-1: Si c es cualquier constante, entonces

$$E(cX) = cE(X) \tag{8}$$

Teorema 3-2: Si X, Y son variables aleatorias, entonces

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \tag{9}$$

Teorema 3-3: Si X, Y son variables aleatorias independientes, entonces

$$E(XY) = E(X)\,E(Y) \tag{10}$$

Generalizaciones de estos teoremas se hacen fácilmente.

LA VARIANZA Y LA DESVIACION TIPICA

Anteriormente en la página 76, anotamos que la esperanza de una variable aleatoria X frecuentemente se le llama la *media* y se le denota por μ. Otra cantidad de gran importancia en probabilidad y estadística se llama la *varianza* y se define por

$$\operatorname{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] \tag{11}$$

La varianza es un número no negativo. A la raíz cuadrada positiva se le llama la *desviación típica* y está dada por

$$\sigma_X = \sqrt{\operatorname{Var}(X)} = \sqrt{E[(X-\mu)^2]} \tag{12}$$

Donde no exista lugar a confusión, la desviación típica se denota por σ en cambio de σ_X, y la varianza por σ^2.

Si X es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $f(x)$, entonces la varianza es

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_{j=1}^{n} (x_j-\mu)^2 f(x_j) = \sum (x-\mu)^2 f(x) \tag{13}$$

En el caso especial de (*13*) donde las probabilidades son todas iguales, tenemos

$$\sigma^2 = [(x_1-\mu)^2 + (x_2-\mu)^2 + \cdots + (x_n-\mu)^2]/n \tag{14}$$

que es la varianza de un conjunto de n números $x_1, \ldots, x_n$.

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$, entonces la varianza es

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx \tag{15}$$

La varianza (o la desviación típica) es una medida de la *dispersión* o *variación* de los valores de la variable aleatoria alrededor de μ. Si los valores tienden a concentrarse alrededor de la media, la varianza es pequeña; en tanto que si los valores tienden a distribuirse lejos de la media, la varianza es grande. La situación se representa gráficamente en la Fig. 3-1, para el caso de dos distribuciones continuas con la misma μ.

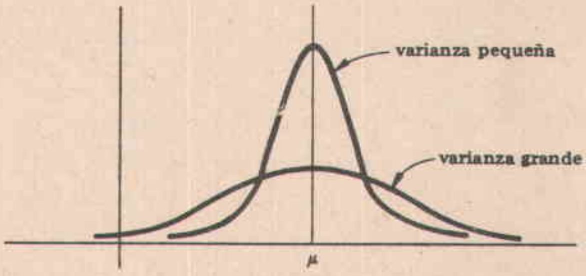


Fig. 3-1

EJEMPLO 3.4. Hallar la varianza y la desviación típica de la variable aleatoria del Ejemplo 3.2.

De acuerdo con el Ejemplo 3.2 la media es $\mu = E(X) = 4/3$. Entonces la varianza se encuentra por

$$\sigma^2 = E\left[\left(X-\frac{4}{3}\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 f(x)\,dx = \int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}x\right)dx = \frac{2}{9}$$

y la desviación típica es

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Obsérvese que si X tiene ciertas *dimensiones* o *unidades*, por ejemplo *centímetros* (cm), entonces la varianza de X tiene unidades cm² en tanto que la desviación típica tiene las mismas unidades que X, es decir cm. Es por esta razón que con frecuencia se utiliza la desviación típica.

ALGUNOS TEOREMAS SOBRE VARIANZA

Teorema 3-4:

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{16}$$

donde $\mu = E(X)$.

Teorema 3-5: Si c es una constante

$$\mathrm{Var}(cX) = c^2\,\mathrm{Var}(X) \tag{17}$$

Teorema 3-6: La cantidad $E[(X-a)^2]$ es mínima cuando $a = \mu = E(X)$.

Teorema 3-7: Si X, Y son variables aleatorias independientes,

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \quad \text{ó} \quad \sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y \tag{18}$$

$$\mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \quad \text{ó} \quad \sigma^2_{X-Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y \tag{19}$$

Generalizaciones del Teorema 3-7 a más de dos variables independientes se hacen fácilmente. En palabras, la varianza de la suma de variables independientes es igual a la suma de sus varianzas.

VARIABLES ALEATORIAS NORMALIZADAS

Sea X una variable aleatoria con media μ y desviación típica σ $(\sigma > 0)$. Entonces podemos definir una *variable aleatoria normalizada* como

$$X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \tag{20}$$

Una propiedad importante de X^* es que tiene media cero y varianza 1, así teniendo en cuenta el nombre de *normalizada*, es decir

$$E(X^*) = 0 \qquad \mathrm{Var}(X^*) = 1 \tag{21}$$

Otra propiedad importante de X^* es que es una *cantidad adimensional* o *sin dimensiones*, esto es, no tiene unidades aunque X las tenga.

Los valores de una variable normalizada se denominan algunas veces *referencias tipificadas* y X se dice está expresada en *unidades tipificadas* (es decir, σ se toma como unidad al medir $X - \mu$).

Las variables normalizadas son útiles para comparar diferentes distribuciones.

MOMENTOS

El *momento r de una variable aleatoria X alrededor de la media* μ, también conocido como el *momento central r*, se define como

$$\mu_r = E[(X-\mu)^r] \tag{22}$$

donde $r = 1, 2, \ldots$. Se deduce que $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = \sigma^2$, es decir el segundo momento central o segundo momento alrededor de la media es la varianza. Tenemos

$$\mu_r = \sum_{j=1}^{n} (x_j-\mu)^r f(x_j) = \sum (x-\mu)^r f(x) \quad \text{(variables discretas)} \tag{23}$$

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f(x)\,dx \quad \text{(variables continuas)} \tag{24}$$

El *momento r de X alrededor del origen* se define como

$$\mu'_r = E(X^r) \tag{25}$$

donde $r = 0, 1, 2, \ldots$ y en este caso hay fórmulas análogas a (*23*) y (*24*) en las cuales $\mu = 0$.

La relación entre estos momentos se expresa por

$$\mu_r = \mu'_r - \binom{r}{1}\mu'_{r-1}\mu + \cdots + (-1)^j\binom{r}{j}\mu'_{r-j}\mu^j + \cdots + (-1)^r\mu'_0\mu^r \tag{26}$$

Como casos especiales tenemos, utilizando $\mu'_1 = \mu$ y $\mu'_0 = 1$,

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu'_2 - \mu^2 \\ \mu_3 &= \mu'_3 - 3\mu'_2\mu + 2\mu^3 \\ \mu_4 &= \mu'_4 - 4\mu'_3\mu + 6\mu'_2\mu^2 - 3\mu^4 \end{aligned} \tag{27}$$

FUNCION GENERATRIZ DE MOMENTOS

La *función generatriz de momentos* se define como

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \tag{28}$$

es decir

$$M_X(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{tx_j} f(x_j) = \sum e^{tx} f(x) \quad \text{(variables discretas)} \tag{29}$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx \quad \text{(variables continuas)} \tag{30}$$

Podemos demostrar que la expansión en serie de Taylor es [Problema 3.15 (a)]

$$M_X(t) = 1 + \mu t + \mu'_2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + \mu'_r \frac{t^r}{r!} + \cdots \tag{31}$$

Puesto que los coeficientes en esta expansión nos permiten hallar los momentos, la justificación del nombre *función generatriz de momentos* es lógica. De la expansión podemos demostrar que [Problema 3.15(b)]

$$\mu'_r = \frac{d^r}{dt^r} M_X(t)\bigg|_{t=0} \tag{32}$$

es decir, μ'_r es la r-ésima derivada de $M_X(t)$ evaluada en $t = 0$. Donde no exista lugar a confusión escribimos $M(t)$ por $M_X(t)$.

ALGUNOS TEOREMAS SOBRE LA FUNCION GENERATRIZ DE MOMENTOS

Teorema 3-8: Si $M_X(t)$ es la función generatriz de momentos de la variable aleatoria X y a y b ($b \neq 0$) son constantes, entonces la función generatriz de momentos de $(X + a)/b$ es

$$M_{(X+a)/b}(t) = e^{at/b} M_X\left(\frac{t}{b}\right) \tag{33}$$

Teorema 3-9: Si X, Y son variables aleatorias con funciones generatrices de momentos $M_X(t)$ y $M_Y(t)$ respectivamente, entonces

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)\, M_Y(t) \tag{34}$$

Generalizaciones del Teorema 3-9 a más de dos variables aleatorias independientes se hacen fácilmente. En palabras, la función generatriz de la suma de variables aleatorias independientes es igual al producto de sus funciones generatrices de momentos.

Teorema 3-10 (Teorema de la unicidad): Supóngase que X, Y son variables aleatorias con funciones generatrices de momentos $M_X(t)$ y $M_Y(t)$ respectivamente. Entonces X, Y tienen la misma distribución de probabilidad solo si $M_X(t) = M_Y(t)$ idénticamente.

FUNCIONES CARACTERISTICAS

Si remplazamos $t = i\omega$, donde i es la unidad imaginaria, en la función generatriz de momentos obtenemos una función importante llamada la *función característica*. La denotamos por

$$\phi_X(\omega) = M_X(i\omega) = E(e^{i\omega X}) \tag{35}$$

Se deduce que

$$\phi_X(\omega) = \sum_{j=1}^{n} e^{i\omega x_j} f(x_j) = \sum e^{i\omega x} f(x) \quad \text{(variables discretas)} \tag{36}$$

$$\phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\, dx \quad \text{(variables continuas)} \tag{37}$$

Los resultados correspondientes a *(31)* y *(32)* son

$$\phi_X(\omega) = 1 + i\mu\omega - \mu_2'\frac{\omega^2}{2!} + \cdots + i^r\mu_r'\frac{\omega^r}{r!} + \cdots \tag{38}$$

donde

$$\mu_r' = (-1)^r i^r \frac{d^r}{d\omega^r}\phi_X(\omega)\bigg|_{\omega=0} \tag{39}$$

Cuando no exista lugar a confusión escribimos $\phi(\omega)$ por $\phi_X(\omega)$.

Los teoremas para las funciones características correspondientes a los Teoremas 3-8, 3-9 y 3-10 son los siguientes.

Teorema 3-11: Si $\phi_X(\omega)$ es la función característica de la variable aleatoria X y a, b ($b \neq 0$) son constantes, entonces la función característica de $(X + a)/b$ es

$$\phi_{(X+a)/b}(\omega) = e^{ai\omega/b}\phi_X\left(\frac{\omega}{b}\right) \tag{40}$$

Teorema 3-12: Si X, Y son variables aleatorias independientes con funciones características $\phi_X(\omega)$ y $\phi_Y(\omega)$ respectivamente, entonces

$$\phi_{X+Y}(\omega) = \phi_X(\omega)\,\phi_Y(\omega) \tag{41}$$

En general, la función característica de la suma de variables aleatorias es igual al producto de sus funciones características.

Teorema 3-13 (Teorema de la unicidad): Supóngase que X, Y son variables aleatorias con funciones características $\phi_X(\omega)$, $\phi_Y(\omega)$ respectivamente. Entonces X, Y tienen la misma distribución de probabilidad sólo si $\phi_X(\omega) = \phi_Y(\omega)$ idénticamente.

Una razón importante de introducir la función característica es que *(37)* representa la *transformada de Fourier* de la función de densidad $f(x)$. De la teoría de transformadas de Fourier podemos determinar fácilmente la función de densidad a partir de la función característica. En efecto,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\phi_X(\omega)\, d\omega \tag{42}$$

que con frecuencia se denomina la *fórmula de inversión* o la *transformada inversa de Fourier.* De una manera semejante podemos demostrar en el caso discreto que la función de probabilidad $f(x)$ puede obtenerse de *(36)* empleando la *serie de Fourier*, que es el análogo de la integral de Fourier para el caso discreto. Véase Problema 3.39.

Otra razón para utilizar la función característica es que siempre existe mientras que la función generatriz de momentos puede no existir.

VARIANZA PARA DISTRIBUCIONES CONJUNTAS. COVARIANZA

Los resultados anteriores para una variable pueden ampliarse para dos o más variables. Así, por ejemplo, si X, Y son dos variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta $f(x, y)$, las medias o esperanzas de X, Y son

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y)\,dx\,dy, \qquad \mu_Y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x,y)\,dx\,dy \tag{43}$$

y las varianzas son

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E[(X-\mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f(x,y)\,dx\,dy \\ \sigma_Y^2 &= E[(Y-\mu_Y)^2] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (y-\mu_Y)^2 f(x,y)\,dx\,dy \end{aligned} \tag{44}$$

Otra cantidad que aparece en el caso de dos variables X, Y es la *covarianza* definida por

$$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \tag{45}$$

En términos de la función de densidad conjunta $f(x, y)$ tenemos

$$\sigma_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y)\, f(x,y)\,dx\,dy \tag{46}$$

Consideraciones semejantes pueden hacerse para dos variables aleatorias discretas. En tal caso (*43*) y (*46*) se remplazan por

$$\mu_X = \sum_x \sum_y x\, f(x,y) \qquad \mu_Y = \sum_x \sum_y y\, f(x,y) \tag{47}$$

$$\sigma_{XY} = \sum_x \sum_y (x-\mu_X)(y-\mu_Y)\, f(x,y) \tag{48}$$

donde las sumas se toman sobre todos los valores discretos de X, Y.

Los siguientes son algunos teoremas importantes sobre covarianza.

Teorema 3-14:

$$\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)\,E(Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y \tag{49}$$

Teorema 3-15: Si X, Y son variables aleatorias independientes,

$$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \tag{50}$$

Teorema 3-16:

$$\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) \tag{51}$$

ó

$$\sigma_{X\pm Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \pm 2\sigma_{XY} \tag{52}$$

Teorema 3-17:

$$|\sigma_{XY}| \leqq \sigma_X\sigma_Y \tag{53}$$

El inverso del Teorema 3-15 no es necesariamente cierto. Si X, Y son independientes, el Teorema 3-16 se reduce al Teorema 3-7.

COEFICIENTE DE CORRELACION

Si X, Y son independientes, entonces $\mathrm{Cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = 0$. De otra parte si X, Y son dependientes completamente, por ejemplo $X = Y$, entonces $\mathrm{Cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = \sigma_X\sigma_Y$. De esto llegamos a una *medida de la dependencia* de las variables X, Y dada por

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} \tag{54}$$

que es una cantidad adimensional. Llamamos a ρ el *coeficiente de correlación*. Del Teorema 3-17 observamos que $-1 \leqq \rho \leqq 1$. En el caso donde $\rho = 0$ (es decir, la covarianza es cero) decimos que las variables X, Y *no están relacionadas*. Sin embargo, en este caso las variables pueden ser independientes o no. Estudio posterior de la correlación se amplía en el Capítulo 8.

ESPERANZA, VARIANZA Y MOMENTOS CONDICIONALES

Si X, Y tienen función de densidad conjunta $f(x, y)$, entonces de acuerdo con lo visto en el Capítulo 2 la función de densidad condicional de Y dada X es $f(y \mid x) = f(x, y)/f_1(x)$ donde $f_1(x)$ es la función de densidad marginal de X. Definimos la *esperanza condicional* o *media condicional de* Y dada X por

$$E(Y \mid X=x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y \mid x)\, dy \tag{55}$$

donde "$X = x$" debe entenderse como $x < X \leqq x + dx$ en el caso continuo. Los Teoremas 3-1, 3-2 y 3-3 también son válidos para la esperanza condicional.

Observamos las propiedades siguientes:

1. $E(Y \mid X=x) \; = \; E(Y)$ si X, Y son independientes.
2. $E(Y) \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} E(Y \mid X=x) f_1(x)\, dx$

Con frecuencia es conveniente calcular las esperanzas empleando la Propiedad 2 y no directamente.

EJEMPLO 3.5. El tiempo promedio de viaje a una ciudad lejana es c horas en automóvil o b horas en bus. Una persona no puede decidir si conducir o tomar el bus, así que lanza una moneda. ¿Cuál es su tiempo de viaje esperado?

Aquí estamos considerando la distribución conjunta del resultado del lanzamiento, X, y el tiempo de viaje, Y, donde $Y = Y_{\text{auto}}$ si $X = 0$; $Y = Y_{\text{bus}}$ si $X = 1$. Presuntamente, Y_{auto} y Y_{bus} son independientes de X, así que por la Propiedad 1 anterior

$$E(Y \mid X=0) \; = \; E(Y_{\text{auto}} \mid X=0) \; = \; E(Y_{\text{auto}}) \; = \; c$$

y

$$E(Y \mid X=1) \; = \; E(Y_{\text{bus}} \mid X=1) \; = \; E(Y_{\text{bus}}) \; = \; b$$

Entonces la Propiedad 2 da (con la integral remplazada por una suma), para una moneda honrada,

$$E(Y) \quad = \quad E(Y \mid X=0)\, P(X=0) \; + \; E(Y \mid X=1)\, P(X=1) \quad = \quad \frac{c+b}{2}$$

De una manera semejante podemos definir la *varianza condicional* de Y dada X como

$$E[(Y-\mu_2)^2 \mid X=x] \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} (y-\mu_2)^2 f(y \mid x)\, dy \tag{56}$$

donde $\mu_2 = E(Y \mid X = x)$. También podemos definir el *momento condicional* r de Y dada X alrededor de cualquier valor a como

$$E[(Y-a)^r \mid X=x] \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} (y-a)^r f(y \mid x)\, dy \tag{57}$$

Los teoremas comunes para varianza y momentos se amplían a la varianza y momentos condicionales.

DESIGUALDAD DE CHEBYSHEV

Un teorema importante en probabilidad y estadística que revela una propiedad general de las variables aleatorias discretas con media y varianza finitas se conoce con el nombre de *desigualdad de Chebyshev.*

Teorema 3-18 (Desigualdad de Chebyshev): Supóngase que X es una variable aleatoria (discreta o continua) son media μ y varianza σ^2 finitas. Entonces si ϵ es cualquier número positivo,

$$P(|X-\mu| \geqq \epsilon) \quad \leqq \quad \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \tag{58}$$

o, con $\epsilon =$ ~~k,~~ $K\sigma$

$$P(|X-\mu| \geqq k\sigma) \quad \leqq \quad \frac{1}{k^2} \tag{59}$$

EJEMPLO 3.6. Si $k = 2$ en la desigualdad de Chebyshev (*59*) vemos que

$$P(|X - \mu| \geqq 2\sigma) \leqq 0.25 \qquad ó \qquad P(|X - \mu| < 2\sigma) \geqq 0.75$$

Literalmente, la probabilidad de que X difiera de su media en más de 2 desviaciones típicas es menor que o igual a 0.25; equivalente, la probabilidad de que X se encuentre dentro de 2 desviaciones típicas de su media es mayor que o igual a 0.75. Esto es bastante extraordinario si se tiene en cuenta que aún no se ha especificado la distribución de probabilidad de X.

LEY DE LOS GRANDES NUMEROS

El teorema siguiente, llamado la *ley de los grandes números*, es una consecuencia interesante de la desigualdad de Chebyshev.

Teorema 3.19 (Ley de los grandes números): Sean $X_1, X_2, \ldots,$ variables aleatorias mutuamente independientes (discretas o continuas), cada una con media μ y varianza σ^2 finitas. Entonces si $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geqq \epsilon \right) = 0 \tag{60}$$

Puesto que S_n/n es la media aritmética de $X_1, \ldots, X_n$, este teorema establece que la probabilidad de que la media aritmética S_n/n difiera de su valor esperado μ por más de ϵ, tiende a cero cuando $n \to \infty$. Un resultado más fuerte, que esperamos sea verdadero, es que $\lim\limits_{n \to \infty} S_n/n = \mu$, pero realmente es falso. Sin embargo podemos demostrar que $\lim\limits_{n \to \infty} S_n/n = \mu$ con *probabilidad uno*. Con frecuencia este resultado se denomina *ley de los grandes números en forma fuerte*, y, en contraste, el resultado del Teorema 3-19 se llama *ley de los grandes números en forma débil*. Cuando se hace referencia a la "ley de los grandes números" sin ninguna especificación, se implica la ley débil.

OTRAS MEDIDAS DE CENTRALIZACION

Como hemos visto anteriormente la media o esperanza de una variable aleatoria X provee una medida de centralización para los valores de una distribución. Aunque la media es la más empleada, también se emplean otras dos medidas de centralización. Estas son la *moda* y la *mediana*.

1. **Moda.** La *moda* es el valor que con mayor frecuencia ocurre, o en otras palabras, tiene la mayor probabilidad de ocurrir. En tal valor x, $f(x)$ es máxima. Algunas veces tenemos dos, tres o más valores que tienen relativamente grandes probabilidades de ocurrencia. En tales casos decimos que la distribución es *bimodal*, *trimodal* o *multimodal* respectivamente.

2. **Mediana.** La *mediana* es el valor de x para el cual $P(X \leqq x) = P(X \geqq x) = 1/2$. En el caso de una distribución continua la mediana corresponde a la ordenada que separa una curva de densidad en dos partes que tienen áreas iguales de 1/2 cada una. En el caso de una distribución discreta puede no existir una mediana única (véase Problema 3.34).

PERCENTILAS

Con frecuencia es conveniente subdividir el área bajo una curva de densidad empleando ordenadas de manera que el área a la izquierda de la ordenada sea algún porcentaje del área unidad total. Los valores que corresponden a tales áreas se llaman *valores percentila* o simplemente *percentilas*. Así por ejemplo el área a la izquierda de la ordenada en x_α en la Fig. 3-2 es α. Por ejemplo, el área a la izquierda de $x_{.10}$ sería 0.10 ó 10% y se

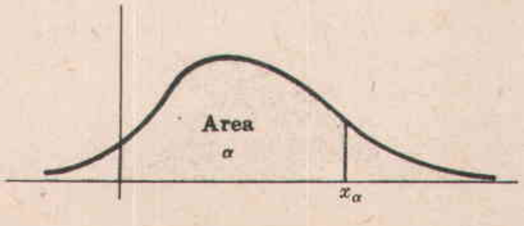


Fig. 3-2

llamaría la *décima percentila* (o la *primera decila*). La mediana sería la *quincuagésima percentila* (o *quinta decila*).

OTRAS MEDIDAS DE DISPERSION

Así como hay varias medidas de centralización además de la media, hay diferentes medidas de dispersión o variación respecto de estas medidas centrales además de la varianza o desviación típica. Algunas de las más comunes son las siguientes.

1. **Recorrido.** El *recorrido* es la diferencia entre los valores más grande y más pequeño de una distribución. Lógicamente, esta medida no tiene sentido si alguno de los valores extremos es infinito.

2. **Recorrido semi-intercuartílico.** Si $x_{.25}$ y $x_{.75}$ representan los valores de la vigésima quinta y la septuagésima quinta percentila la diferencia $x_{.75} - x_{.25}$ se llama el *recorrido intercuartílico* y $1/2\,(x_{.75} - x_{.25})$ es el *recorrido semi-intercuartílico.*

3. **Desviación media.** La *desviación media* (D.M.) de una variable aleatoria X se define como la esperanza de $|X - \mu|$, es decir

$$\text{D. M.}(X) = E[|X-\mu|] = \sum |x-\mu|\, f(x) \quad \text{(variables discretas)} \tag{61}$$

$$\text{D. M.}(X) = E[|X-\mu|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu|\, f(x)\, dx \quad \text{(variables continuas)} \tag{62}$$

SESGO Y CURTOSIS

1. **Sesgo.** Con frecuencia una distribución no es simétrica con respecto a un máximo sino que tiene una "cola" más larga que la otra. Si la cola más larga se extiende a la derecha, como en la Fig. 3-3, se dice que la distribución está *sesgada a la derecha*, mientras que si la cola más larga se extiende a la izquierda, como en la Fig. 3-4, se dice que está *sesgada a la izquierda*. Las medidas que describen esta simetría se denominan los *coeficientes de sesgo* o sencillamente *sesgo*. Una de las medidas es

$$\alpha_3 = \frac{E[(X-\mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \tag{63}$$

que es una cantidad adimensional. La medida α_3 es positiva o negativa si la distribución está sesgada a la derecha o a la izquierda respectivamente. Para una distribución simétrica $\alpha_3 = 0$.

Fig. 3-3

Fig. 3-4

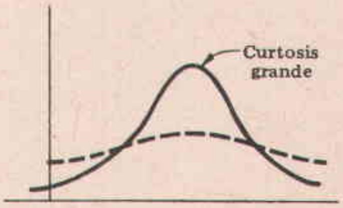


Fig. 3-5

2. **Curtosis.** En algunos casos una distribución puede tener sus valores concentrados cerca de la media así que la distribución tiene un pico grande como se indica por la curva sólida de la Fig. 3-5. En otros casos la distribución puede ser relativamente plana como en la curva a trazos de la Fig. 3-5. Medidas del grado de apuntamiento de una distribución se llaman *coeficientes de curtosis* o simplemente *curtosis*. Una medida empleada frecuentemente está dada por

$$\alpha_4 = \frac{E[(X-\mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \tag{64}$$

que es una cantidad adimensional. Comúnmente se compara con la curva normal (véase Capítulo 4), que tiene un coeficiente de curtosis igual a 3. Véase también Problema 3.41.

Es posible definir coeficientes de sesgo y curtosis utilizando otras medidas de centralización y dispersión, pero los definidos anteriormente se emplean con mucha frecuencia.

Problemas resueltos

ESPERANZA DE VARIABLES ALEATORIAS

3.1. En una lotería hay 200 premios de $150, 20 premios de $750 y 5 premios de $3000 Suponer que se colocan a la venta 10 000 boletos. ¿Cuál es el precio justo que se debe pagar por un boleto?

Sea X la variable aleatoria que denota la cantidad de dinero que se ganará un boleto. Los diferentes valores de X conjuntamente con sus probabilidades se muestran en la Tabla 3-2. Por ejemplo la probabilidad de obtener uno de los 20 boletos que dan un premio de $ 750 es 20/10 000 = 0.002. La esperanza de X en pesos es

Tabla 3-2

x (pesos)	150	750	3000	0
$P(X = x)$	0.02	0.002	0.0005	0.9775

$$E(X) = (150)\,(0.02) + 750\,(0.002) + 3000\,(0.0005) + (0)\,(0.9775) = 6.00$$

ó 6 pesos. El precio justo a pagar por un boleto es 6 pesos. Sin embargo una lotería gana dinero, el precio del boleto sería más alto.

3.2. Hallar la esperanza de la suma de puntos al lanzar un par de dados honrados.

Sean X, Y los puntos que aparecen sobre los dos dados. Tenemos

$$E(X) = E(Y) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + \cdots + 6\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{2}$$

Entonces, por el Teorema 3-2,

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 7$$

3.3. Hallar la esperanza de una variable aleatoria discreta X cuya función de probabilidad está dada por

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad (x = 1, 2, 3, \ldots)$$

Tenemos

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) + \cdots$$

Para hallar esta suma, hágase

$$S = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) + 4\left(\frac{1}{16}\right) + \cdots$$

Entonces $$\frac{1}{2}S = \frac{1}{4} + 2\left(\frac{1}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{16}\right) + \cdots$$

Restando, $$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$$

Por tanto $S = 2$.

3.4. Una variable aleatoria continua X tiene densidad de probabilidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases}$$

Hallar (*a*) $E(X)$, (*b*) $E(X^2)$.

(*a*)
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x(2e^{-2x})\,dx = 2\int_0^{\infty} xe^{-2x}\,dx$$
$$= 2\left[(x)\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right) - (1)\left(\frac{e^{-2x}}{4}\right)\right]\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

(*b*)
$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,f(x)\,dx = 2\int_0^{\infty} x^2e^{-2x}\,dx$$
$$= 2\left[(x^2)\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right) - (2x)\left(\frac{e^{-2x}}{4}\right) + (2)\left(\frac{e^{-2x}}{-8}\right)\right]\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

3.5. La función de densidad conjunta de dos variables aleatorias X, Y está dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy/96 & 0 < x < 4,\ 1 < y < 5 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar (*a*) $E(X)$, (*b*) $E(Y)$, (*c*) $E(XY)$, (*d*) $E(2X+3Y)$.

(*a*)
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{4}\int_{y=1}^{5} x\left(\frac{xy}{96}\right)dx\,dy = \frac{8}{3}$$

(*b*)
$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\,f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{4}\int_{y=1}^{5} y\left(\frac{xy}{96}\right)dx\,dy = \frac{31}{9}$$

(*c*)
$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (xy)\,f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{4}\int_{y=1}^{5} (xy)\left(\frac{xy}{96}\right)dx\,dy = \frac{248}{27}$$

(*d*)
$$E(2X+3Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (2x+3y)\,f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{4}\int_{y=1}^{5} (2x+3y)\left(\frac{xy}{96}\right)dx\,dy = \frac{47}{3}$$

Otro método.

(*c*) Puesto que X, Y son independientes, tenemos utilizando partes (*a*) y (*b*)

$$E(XY) = E(X)\,E(Y) = \left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{31}{9}\right) = \frac{248}{27}$$

(*d*) Por los Teoremas 3-1 y 3-2, página 77, conjuntamente con (*a*) y (*b*)

$$E(2X+3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2\left(\frac{8}{3}\right) + 3\left(\frac{31}{9}\right) = \frac{47}{3}$$

3.6. Demostrar el Teorema 3-2, página 77.

Sea $f(x,y)$ la función de probabilidad conjunta de X, Y, considerada discreta. Entonces

$$E(X+Y) = \sum_x\sum_y (x+y)\,f(x,y)$$
$$= \sum_x\sum_y x\,f(x,y) + \sum_x\sum_y y\,f(x,y)$$
$$= E(X) + E(Y)$$

Si cualquier variable es continua, la demostración se desarrolla de igual manera, con las sumas apropiadas remplazadas por integraciones. Obsérvese que el Teorema se cumple si X, Y son independientes o no.

3.7. Demostrar el Teorema 3-3, página 77.

Sea $f(x, y)$ la función de probabilidad conjunta de X, Y, considerada discreta. Si las variables X, Y son independientes, tenemos $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$. Por tanto

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_x \sum_y xy\, f(x,y) = \sum_x \sum_y xy\, f_1(x)\, f_2(y) \\ &= \sum_x \left[x\, f_1(x) \sum_y y\, f_2(y) \right] \\ &= \sum_x [x\, f_1(x)\, E(y)] \\ &= E(X)\, E(Y) \end{aligned}$$

Si cualquier variable es continua la demostración se desarrolla de igual manera, con las sumas apropiadas remplazadas por integraciones. Obsérvese que la validez de este teorema gira alrededor de si $f(x, y)$ puede expresarse como una función de x multiplicada por una función y, para todo x, y, es decir, de si X, Y son independientes. Para variables dependientes generalmente no se cumple.

VARIANZA Y DESVIACION TIPICA

3.8. Hallar (*a*) la varianza y (*b*) la desviación típica de la suma obtenida al lanzar un par de dados honrados.

(*a*) Del Problema 3.2, tenemos $E(X) = E(Y) = 7/2$. Además,

$$E(X^2) = E(Y^2) = 1^2\left(\frac{1}{6}\right) + 2^2\left(\frac{1}{6}\right) + \cdots + 6^2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{91}{6}$$

Entonces, por el Teorema 3-4,

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

y, puesto que X, Y son independientes, por el Teorema 3-7

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = \frac{35}{6}$$

(*b*)

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\text{Var}(X+Y)} = \sqrt{\frac{35}{6}}$$

3.9. Hallar (*a*) la varianza y (*b*) la desviación típica para la variable aleatoria del Problema 3.4.

(*a*) Como en el Problema 3.4 la media de X es $\mu = E(X) = 1/2$. Entonces la varianza es

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[(X-\mu)^2] = E\left[\left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 f(x)\, dx \\ &= \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (2e^{-2x})\, dx = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Otro método.

Por el Teorema 3-4,

$$\text{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

(*b*)

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

3.10. Demostrar el Teorema 3-4, página 78.

Tenemos

$$\begin{aligned} E[(X-\mu)^2] &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

3.11. Demostrar el Teorema 3-6, página 79.

$$\begin{aligned} E[(X-a)^2] &= E[\{(X-\mu)+(\mu-a)\}^2] \\ &= E[(X-\mu)^2+2(X-\mu)(\mu-a)+(\mu-a)^2] \\ &= E[(X-\mu)^2]+2(\mu-a)E(X-\mu)+(\mu-a)^2 \\ &= E[(X-\mu)^2]+(\mu-a)^2 \end{aligned}$$

puesto que $E(X-\mu)=E(X)-\mu=0$. De esto vemos que el valor mínimo de $E[(X-a)^2]$ ocurre cuando $(\mu-a)^2=0$, es decir cuando $a=\mu$.

3.12. Si $X^*=(X-\mu)/\sigma$ es una variable aleatoria normalizada, demostrar que (*a*) $E(X^*)=0$, (*b*) $\text{Var}(X^*)=1$.

(*a*)
$$E(X^*) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}[E(X-\mu)] = \frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu] = 0$$

puesto que $E(X)=\mu$.

(*b*)
$$\text{Var}(X^*) = \text{Var}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}E[(X-\mu)^2] = 1$$

utilizando el Teorema 3-5, página 79, y el hecho de que $E[(X-\mu)^2]=\sigma^2$

3.13. Demostrar el Teorema 3-7, página 79.

$$\begin{aligned} \text{Var}(X+Y) &= E[\{(X+Y)-(\mu_X+\mu_Y)\}^2] \\ &= E[\{(X-\mu_X)+(Y-\mu_Y)\}^2] \\ &= E[(X-\mu_X)^2+2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)+(Y-\mu_Y)^2] \\ &= E[(X-\mu_X)^2]+2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]+E[(Y-\mu_Y)^2] \\ &= \text{Var}(X)+\text{Var}(Y) \end{aligned}$$

utilizando el hecho de que

$$E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = E(X-\mu_X)\,E(Y-\mu_Y) = 0$$

ya que X, Y y por tanto $X-\mu_X$, $Y-\mu_Y$ son independientes. La demostración de (*19*), página 79, se sigue al remplazar Y por $-Y$ y emplear el Teorema 3-5.

MOMENTOS Y FUNCIONES GENERATRICES DE MOMENTOS

3.14. Demostrar el resultado (*26*), página 79.

$$\begin{aligned} \mu_r &= E[(X-\mu)^r] \\ &= E\left[X^r - \binom{r}{1}X^{r-1}\mu + \cdots + (-1)^j\binom{r}{j}X^{r-j}\mu^j \right. \\ &\qquad \left. + \cdots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}X\mu^{r-1} + (-1)^r\mu^r\right] \\ &= E(X^r) - \binom{r}{1}E(X^{r-1})\mu + \cdots + (-1)^j\binom{r}{j}E(X^{r-j})\mu^j \\ &\qquad + \cdots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}E(X)\mu^{r-1} + (-1)^r\mu^r \\ &= \mu'_r - \binom{r}{1}\mu'_{r-1}\mu + \cdots + (-1)^j\binom{r}{j}\mu'_{r-j}\mu^j \\ &\qquad + \cdots + (-1)^{r-1}r\mu^r + (-1)^{-r}\mu^r \end{aligned}$$

donde al combinar los dos últimos términos resulta $(-1)^{r-1}(r-1)\mu^r$.

3.15. Demostrar (*a*) el resultado (*31*), (*b*) el resultado (*32*), página 80.

(*a*) Utilizando la expansión en serie de potencia de e^u (3., Apéndice A) tenemos

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = E\left(1 + tX + \frac{t^2X^2}{2!} + \frac{t^3X^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= 1 + tE(X) + \frac{t^2}{2!}E(X^2) + \frac{t^3}{3!}E(X^3) + \cdots \\ &= 1 + \mu t + \mu_2'\frac{t^2}{2!} + \mu_3'\frac{t^3}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

(*b*) Se deduce inmediatamente del hecho conocido del cálculo de que si la serie de Taylor de $f(t)$ alrededor de $t = a$ es

$$f(t) = \sum_{n=0} c_n(t-a)^n$$

entonces

$$c_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}f(t)\bigg|_{t=a}$$

3.16. Demostrar el Teorema 3-9, página 80.

Puesto que X, Y son independientes, cualquier función de X y cualquier función de Y son independientes. Por tanto

$$M_{X+Y}(t) = E[e^{t(X+Y)}] = E(e^{tX}e^{tY}) = E(e^{tX})\,E(e^{tY}) = M_X(t)\,M_Y(t)$$

3.17. La variable aleatoria X puede tomar los valores 1 y -1 con probabilidad 1/2 cada uno. Hallar (*a*) la función generatriz de momentos y (*b*) los primeros cuatro momentos alrededor del origen.

(*a*)

$$E(e^{tX}) = e^{t(1)}\left(\frac{1}{2}\right) + e^{t(-1)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$$

(*b*) Tenemos

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots$$

Entonces (*1*)

$$\frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots$$

Pero (*2*)

$$M_X(t) = 1 + \mu t + \mu_2'\frac{t^2}{2!} + \mu_3'\frac{t^3}{3!} + \mu_4'\frac{t^4}{4!} + \cdots$$

Al comparar (*1*) y (*2*), tenemos

$$\mu = 0, \quad \mu_2' = 1, \quad \mu_3' = 0, \quad \mu_4' = 1, \quad \ldots$$

Todos los momentos impares son cero y los pares son uno.

3.18. Una variable aleatoria X tiene función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \geqq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Hallar (*a*) la función generatriz de momentos y (*b*) los primeros cuatro momentos alrededor del origen.

(*a*)

$$\begin{aligned} M(t) &= E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)\,dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{tx}(2e^{-2x})\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{(t-2)x}\,dx \\ &= \frac{2e^{(t-2)x}}{t-2}\bigg|_0^{\infty} = \frac{2}{2-t}, \quad \text{si } t < 2 \end{aligned}$$

(*b*) **Si $|t| < 2$ tenemos**

$$\frac{2}{2-t} = \frac{1}{1-t/2} = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{8} + \frac{t^4}{16} + \cdots$$

Pero $$M(t) = 1 + \mu t + \mu_2' \frac{t^2}{2!} + \mu_3' \frac{t^3}{3!} + \mu_4' \frac{t^4}{4!} + \cdots$$

Por tanto, al comparar términos, $\mu = \frac{1}{2}$, $\mu_2' = \frac{1}{2}$, $\mu_3' = \frac{3}{4}$, $\mu_4' = \frac{3}{2}$.

3.19. Hallar los primeros cuatro momentos (*a*) alrededor del origen, (*b*) alrededor de la media, para una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 4x(9-x^2)/81 & 0 \leqq x \leqq 3 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

(*a*)

$$\mu_1' = E(X) = \frac{4}{81}\int_0^3 x^2(9-x^2)\,dx = \frac{8}{5} = \mu$$

$$\mu_2' = E(X^2) = \frac{4}{81}\int_0^3 x^3(9-x^2)\,dx = 3$$

$$\mu_3' = E(X^3) = \frac{4}{81}\int_0^3 x^4(9-x^2)\,dx = \frac{216}{35}$$

$$\mu_4' = E(X^4) = \frac{4}{81}\int_0^3 x^5(9-x^2)\,dx = \frac{27}{2}$$

(*b*) **Utilizando el resultado (27), página 80, tenemos**

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = 3 - \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{11}{25} = \sigma^2$$

$$\mu_3 = \frac{216}{35} - 3(3)\left(\frac{8}{5}\right) + 2\left(\frac{8}{5}\right)^3 = -\frac{32}{875}$$

$$\mu_4 = \frac{27}{2} - 4\left(\frac{216}{35}\right)\left(\frac{8}{5}\right) + 6(3)\left(\frac{8}{5}\right)^2 - 3\left(\frac{8}{5}\right)^4 = \frac{3693}{8750}$$

FUNCIONES CARACTERISTICAS

3.20. Hallar la función característica de la variable aleatoria X del Problema 3.17.

La función característica está dada por

$$E(e^{i\omega X}) = e^{i\omega(1)}\left(\frac{1}{2}\right) + e^{i\omega(-1)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) = \cos\omega$$

empleando las fórmulas de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$$

con $\theta = \omega$. El resultado también puede obtenerse del Problema 3.17(*a*) al remplazar $t = i\omega$.

3.21. Hallar la función característica de la variable aleatoria X con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/2a & |x| < a \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

La función característica está dada por

$$E(e^{i\omega X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\,dx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{i\omega x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2a}\frac{e^{i\omega x}}{i\omega}\bigg|_{-a}^{a} = \frac{e^{ia\omega} - e^{-ia\omega}}{2ia\omega} = \frac{\operatorname{sen} a\omega}{a\omega}$$

empleando las fórmulas de Euler (véase Problema 3.20) con $\theta = a\omega$.

3.22. Hallar la función característica de la variable aleatoria X con función de densidad $f(x) = ce^{-a|x|}$, $-\infty < x < \infty$, donde $a > 0$ y c es una constante apropiada.

Puesto que $f(x)$ es una función de densidad tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

así que

$$c\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\,dx = c\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-a(-x)}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-a(x)}\,dx\right]$$

$$= c\,\frac{e^{ax}}{a}\bigg|_{-\infty}^{0} + c\,\frac{e^{-ax}}{-a}\bigg|_{0}^{\infty} = \frac{2c}{a} = 1$$

Entonces $c = a/2$. Por tanto, la función característica está dada por

$$E(e^{i\omega X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\,dx$$

$$= \frac{a}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{i\omega x}e^{-a(-x)}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{i\omega x}e^{-a(x)}\,dx\right]$$

$$= \frac{a}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(a+i\omega)x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(a-i\omega)x}\,dx\right]$$

$$= \frac{a}{2}\,\frac{e^{(a+i\omega)x}}{a+i\omega}\bigg|_{-\infty}^{0} + a\,\frac{e^{-(a-i\omega)x}}{-(a-i\omega)}\bigg|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{a}{2(a+i\omega)} + \frac{a}{2(a-i\omega)} = \frac{a^2}{a^2+\omega^2}$$

COVARIANZA Y COEFICIENTE DE CORRELACION

3.23. Demostrar el Teorema 3-14, página 82.

Por definición la covarianza de X, Y es

$$\sigma_{XY} = \operatorname{Cov}(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$$= E[XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X\mu_Y]$$

$$= E(XY) - \mu_X E(Y) - \mu_Y E(X) + E(\mu_X\mu_Y)$$

$$= E(XY) - \mu_X\mu_Y - \mu_Y\mu_X + \mu_X\mu_Y$$

$$= E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

$$= E(XY) - E(X)\,E(Y)$$

3.24. Demostrar el Teorema 3-15, página 82.

Si X, Y son independientes entonces $E(XY) = E(X)\,E(Y)$. Por tanto por el Problema 3.23

$$\sigma_{XY} = \operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y) = 0$$

3.25. **Hallar** (*a*) $E(X)$, (*b*) $E(Y)$, (*c*) $E(XY)$, (*d*) $E(X^2)$, (*e*) $E(Y^2)$, (*f*) $\text{Var}(X)$, (*g*) $\text{Var}(Y)$, (*h*) $\text{Cov}(X,Y)$, (*i*) ρ, **si las variables** X, Y **se definen como en el Problema 2.8, página 52.**

(*a*)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x \sum_y x f(x,y) = \sum_x x\left[\sum_y f(x,y)\right] \\ &= (0)(6c) + (1)(14c) + (2)(22c) = 58c = \frac{58}{42} = \frac{29}{21} \end{aligned}$$

(*b*)

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_x \sum_y y f(x,y) = \sum_y y\left[\sum_x f(x,y)\right] \\ &= (0)(6c) + (1)(9c) + (2)(12c) + (3)(15c) = 78c = \frac{78}{42} = \frac{13}{7} \end{aligned}$$

(*c*)

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_x \sum_y xy\, f(x,y) \\ &= (0)(0)(0) + (0)(1)(c) + (0)(2)(2c) + (0)(3)(3c) \\ &\quad + (1)(0)(2c) + (1)(1)(3c) + (1)(2)(4c) + (1)(3)(5c) \\ &\quad + (2)(0)(4c) + (2)(1)(5c) + (2)(2)(6c) + (2)(3)(7c) \\ &= 102c = \frac{102}{42} = \frac{17}{7} \end{aligned}$$

(*d*)

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_x \sum_y x^2 f(x,y) = \sum_x x^2\left[\sum_y f(x,y)\right] \\ &= (0)^2(6c) + (1)^2(14c) + (2)^2(22c) = 102c = \frac{102}{42} = \frac{17}{7} \end{aligned}$$

(*e*)

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_x \sum_y y^2 f(x,y) = \sum_y y^2\left[\sum_x f(x,y)\right] \\ &= (0)^2(6c) + (1)^2(9c) + (2)^2(12c) + (3)^2(15c) = 192c = \frac{192}{42} = \frac{32}{7} \end{aligned}$$

(*f*)

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{17}{7} - \left(\frac{29}{21}\right)^2 = \frac{230}{441}$$

(*g*)

$$\sigma_Y^2 = \text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{32}{7} - \left(\frac{13}{7}\right)^2 = \frac{55}{49}$$

(*h*)

$$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y) = \frac{17}{7} - \left(\frac{29}{21}\right)\left(\frac{13}{7}\right) = -\frac{20}{147}$$

(*i*)

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-20/147}{\sqrt{230/441}\,\sqrt{55/49}} = \frac{-20}{\sqrt{230}\,\sqrt{55}} = -0.2103 \textbf{ aprox.}$$

3.26. Resolver el Problema 3.25 si las variables aleatorias X, Y se definen como en el Problema 2.3, página 50.

Utilizando $c = 1/210$ tenemos:

(*a*)

$$E(X) = \frac{1}{210}\int_{x=2}^{6}\int_{y=0}^{5} (x)(2x+y)\,dx\,dy = \frac{268}{63}$$

(*b*)

$$E(Y) = \frac{1}{210}\int_{x=2}^{6}\int_{y=0}^{5} (y)(2x+y)\,dx\,dy = \frac{170}{63}$$

(*c*)

$$E(XY) = \frac{1}{210}\int_{x=2}^{6}\int_{y=0}^{5} (xy)(2x+y)\,dx\,dy = \frac{80}{7}$$

(*d*)
$$E(X^2) \;=\; \frac{1}{210}\int_{x=2}^{6}\int_{y=0}^{5}(x^2)(2x+y)\,dx\,dy \;=\; \frac{1220}{63}$$

(*e*)
$$E(Y^2) \;=\; \frac{1}{210}\int_{x=2}^{6}\int_{y=0}^{5}(y^2)(2x+y)\,dx\,dy \;=\; \frac{1175}{126}$$

(*f*)
$$\sigma_X^2 \;=\; \mathrm{Var}\,(X) \;=\; E(X^2) - [E(X)]^2 \;=\; \frac{1220}{63} - \left(\frac{268}{63}\right)^2 \;=\; \frac{5036}{3969}$$

(*g*)
$$\sigma_Y^2 \;=\; \mathrm{Var}\,(Y) \;=\; E(Y^2) - [E(Y)]^2 \;=\; \frac{1175}{126} - \left(\frac{170}{63}\right)^2 \;=\; \frac{16\,225}{7938}$$

(*h*)
$$\sigma_{XY} \;=\; \mathrm{Cov}\,(X,Y) \;=\; E(XY) - E(X)\,E(Y) \;=\; \frac{80}{7} - \left(\frac{268}{63}\right)\left(\frac{170}{63}\right) \;=\; -\frac{200}{3969}$$

(*i*)
$$\rho \;=\; \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} \;=\; \frac{-200/3969}{\sqrt{5036/3969}\,\sqrt{16\,225/7938}} \;=\; \frac{-200}{\sqrt{2518}\,\sqrt{16\,225}} \;=\; -0.03129 \text{ aprox.}$$

ESPERANZA, VARIANZA Y MOMENTOS CONDICIONALES

3.27. Hallar la esperanza condicional de Y dada $X = 2$ en el Problema 2.8, página 52.

Como en el Problema 2.27, página 61, la función de probabilidad condicional de Y dada $X = 2$ es

$$f(y \mid 2) \;=\; \frac{4+y}{22}$$

Entonces la esperanza condicional de Y dada $X = 2$ es

$$E(Y \mid X=2) \;=\; \sum_y y\left(\frac{4+y}{22}\right)$$

donde la suma se toma sobre todo y que corresponde a $X = 2$. Esto está dado por

$$E(Y \mid X=2) \;=\; (0)\left(\frac{4}{22}\right) + 1\left(\frac{5}{22}\right) + 2\left(\frac{6}{22}\right) + 3\left(\frac{7}{22}\right) \;=\; \frac{19}{11}$$

3.28. Hallar la esperanza condicional de (*a*) Y dada X y (*b*) X dada Y en el Problema 2.29, página 62.

(*a*)
$$E(Y \mid X=x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} y\,f_2(y \mid x)\,dy \;=\; \int_0^x y\left(\frac{2y}{x^2}\right)dy \;=\; \frac{2x}{3}$$

(*b*)
$$E(X \mid Y=y) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x\,f_1(x \mid y)\,dx \;=\; \int_y^1 x\left(\frac{2x}{1-y^2}\right)dx$$
$$=\; \frac{2(1-y^3)}{3(1-y^2)} \;=\; \frac{2(1+y+y^2)}{3(1+y)}$$

3.29. Hallar la varianza condicional de Y dada X para el Problema 2.29, página 62.

La varianza pedida (segundo momento alrededor de la media) es

$$E[(Y-\mu_2)^2 \mid X=x] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu_2)^2 f_2(y \mid x)\,dy \;=\; \int_0^x \left(y - \frac{2x}{3}\right)^2\left(\frac{2y}{x^2}\right)dy \;=\; \frac{x^2}{18}$$

donde hemos utilizado el hecho de que $\mu_2 = E(Y \mid X=x) = 2x/3$ del Problema 3.28(*a*).

DESIGUALDAD DE CHEBYSHEV

3.30. Demostrar la desigualdad de Chebyshev.

Presentaremos la demostración para variables aleatorias continuas. La demostración para variables discretas es semejante si se remplazan las integrales por sumas. Si $f(x)$ es la función de densidad de X entonces

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

Puesto que el integrando es no negativo, el valor de la integral solamente puede disminuir cuando el intervalo de integración se reduce. Por tanto

$$\sigma^2 \geqq \int_{|x-\mu| \geqq \epsilon} (x-\mu)^2 f(x)\,dx \geqq \int_{|x-\mu| \geqq \epsilon} \epsilon^2 f(x)\,dx = \epsilon^2 \int_{|x-\mu| \geqq \epsilon} f(x)\,dx$$

Pero la última integral es igual a $P(|X-\mu| \geqq \epsilon)$. Por tanto

$$P(|X-\mu| \geqq \epsilon) \leqq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

3.31. Para la variable aleatoria del Problema 3.18, (*a*) hallar $P(|X-\mu| > 1)$. (*b*) Utilizar la desigualdad de Chebyshev para obtener un límite superior de $P(|X-\mu| > 1)$ y compararlo con el resultado en (*a*).

(*a*) Del Problema 3.18, $\mu = 1/2$. Entonces

$$P(|X-\mu| < 1) = P\left(\left|X - \frac{1}{2}\right| < 1\right) = P\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$$

$$= \int_0^{3/2} 2e^{-2x}\,dx = 1 - e^{-3}$$

Por tanto $$P\left(\left|X - \frac{1}{2}\right| \geqq 1\right) = 1 - (1 - e^{-3}) = e^{-3} = 0.04979$$

(*b*) Del Problema 3.18, $\sigma^2 = \mu_2' - \mu^2 = 1/4$. La desigualdad de Chebyshev

$$P(|X-\mu| \geqq \epsilon) \leqq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

resulta $$P(|X-\mu| \geqq 1) \leqq \sigma^2 = 0.25$$

Comparando con (*a*) observamos que el límite dado por la desigualdad de Chebyshev es bastante crudo. En la práctica la desigualdad de Chebyshev se emplea para dar estimativos cuando es inconveniente o imposible obtener valores exactos.

LEY DE LOS GRANDES NUMEROS

3.32. Demostrar la ley de los grandes números establecida en el Teorema 3-19, página 84.

Tenemos $$E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_n) = \mu$$

$$\text{Var}\,(X_1) = \text{Var}\,(X_2) = \cdots = \text{Var}\,(X_n) = \sigma^2$$

Entonces $$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}[E(X_1) + \cdots + E(X_n)] = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$$

$$\text{Var}\,(S_n) = \text{Var}\,(X_1 + \cdots + X_n) = \text{Var}\,(X_1) + \cdots + \text{Var}\,(X_n) = n\sigma^2$$

así que $$\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\text{Var}\,(S_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

donde hemos empleado el Teorema 3-5 y una extensión del Teorema 3-7.

Así por la desigualdad de Chebyshev con $X = S_n/n$ tenemos

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geqq \epsilon\right) \leqq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$, esto se convierte, como se pide,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geqq \epsilon\right) = 0$$

OTRAS MEDIDAS DE CENTRALIZACION

3.33. La función de densidad de una variable aleatoria continua X es

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 4x(9-x^2)/81 & 0 \leqq x \leqq 3 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

(*a*) Hallar la moda. (*b*) Hallar la mediana. (*c*) Comparar la moda, la mediana y la media.

(*a*) La moda se obtiene hallando donde la densidad $f(x)$ es máxima. El máximo relativo de $f(x)$ ocurre donde la derivada es cero, esto es

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{4x(9-x^2)}{81}\right] \;=\; \frac{36-12x^2}{81} \;=\; 0$$

Entonces $x = \sqrt{3} = 1.73$ aprox., que es la moda pedida. Obsérvese que este valor da el máximo ya que la segunda derivada, $-24x/81$, es negativa para $x = \sqrt{3}$.

(*b*) La mediana es aquel valor de a para el cual $P(X \leqq a) = 1/2$. Ahora para $0 < a < 3$.

$$P(X \leqq a) \;=\; \frac{4}{81}\int_0^a x(9-x^2)\,dx \;=\; \frac{4}{81}\left(\frac{9a^2}{2} - \frac{a^4}{4}\right)$$

Igualando esto a $1/2$ hallamos que

$$2a^4 - 36a^2 + 81 \;=\; 0$$

de donde

$$a^2 \;=\; \frac{36 \pm \sqrt{(36)^2 - 4(2)(81)}}{2(2)} \;=\; \frac{36 \pm \sqrt{648}}{4} \;=\; 9 \pm \frac{9}{2}\sqrt{2}$$

Por tanto la mediana pedida, que debe encontrarse entre 0 y 3, está dada por

$$a^2 \;=\; 9 - \frac{9}{2}\sqrt{2}$$

de donde $a = 1.62$ aprox.

(*c*)

$$E(X) \;=\; \frac{4}{81}\int_0^3 x^2(9-x^2)\,dx \;=\; \frac{4}{81}\left(3x^3 - \frac{x^5}{5}\right)\bigg|_0^3 \;=\; 1.60$$

que prácticamente es igual a la mediana. La moda, la mediana y la media se muestran en la Fig. 3-6.

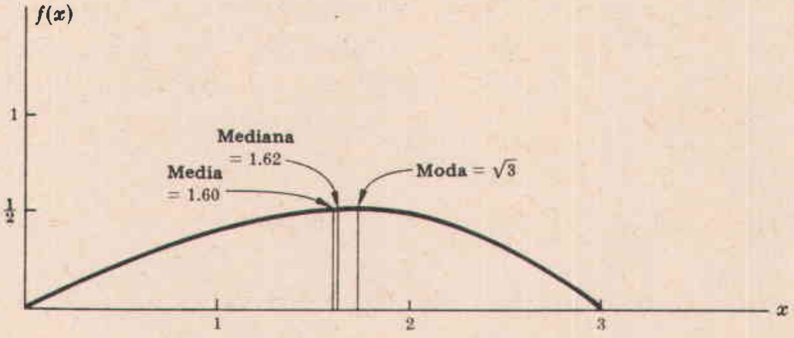


Fig. 3-6

3.34. Una variable aleatoria discreta tiene una función de probabilidad $f(x) = 1/2^x$ donde $x = 1, 2, \ldots$. Hallar (*a*) la moda y (*b*) la mediana, y (*c*) compararlas con la media.

(*a*) La moda es el valor de x asociado con la probabilidad más grande. En este caso es $x = 1$, para el cual la probabilidad es $1/2$.

(*b*) Si x es cualquier valor entre 1 y 2, $P(X \leqq x) = 1/2$ y $P(X \geqq x) = 1/2$. Por tanto *cualquier número* entre 1 y 2 podría representar la mediana. Por consecuencia escogemos el punto medio del intervalo, es decir 3/2.

(*c*) Como se encontró en el Problema 3.3, $\mu = 2$. Por tanto el orden de las tres medidas es contrario al del Problema 3.33.

PERCENTILAS

3.35. Determinar los valores de la (*a*) décima, (*b*) vigésima quinta, (*c*) septuagésima quinta percentilas para la distribución del Problema 3.33.

Del Problema 3.33(*b*) tenemos

$$P(X \leqq a) = \frac{4}{81}\left(\frac{9a^2}{2} - \frac{a^4}{4}\right) = \frac{18a^2 - a^4}{81}$$

(*a*) La décima percentila es el valor de a para el cual $P(X \leqq a) = 0.10$, es decir la solución de $(18a^2 - a^4)/81 = 0.10$. Empleando el método del Problema 3.33 hallamos que $a = 0.68$ aprox.

(*b*) La vigésima quinta percentila es el valor de a tal que $(18a^2 - a^4)/81 = 0.25$, o sea $a = 1.098$ aprox.

(*c*) La septuagésima quinta percentila es el valor de a tal que $(18a^2 - a^4)/81 = 0.75$, o sea $a = 2.121$ aprox.

OTRAS MEDIDAS DE DISPERSION

3.36. Determinar (*a*) el recorrido, (*b*) el recorrido semi-intercuartílico y (*c*) la desviación media para la distribución del Problema 3.33.

(*a*) Puesto que todos los valores $x > 3$ tienen probabilidad cero, tomamos el *valor máximo* de $x = 3$. En forma análoga puesto que todos los valores $x < 0$ tienen probabilidad cero, tomamos el *valor mínimo* de $x = 0$. Entonces el recorrido es $3 - 0 = 3$.

(*b*) Por el Problema 3.35 los valores de la vigésima quinta y septuagésima quinta percentilas son 1.098 y 2.121 respectivamente. Por tanto

$$\text{Recorrido semi-intercuartílico} = \frac{2.121 - 1.098}{2} = 0.51 \text{ aprox.}$$

(*c*) Del Problema 3.33 la media es $\mu = 1.60 = 8/5$. Entonces

$$\begin{aligned}\text{Desviación media} = \text{D. M.} = E(|X-\mu|) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu|\, f(x)\, dx \\ &= \int_0^3 \left|x - \frac{8}{5}\right| \left[\frac{4x}{81}(9-x^2)\right] dx \\ &= \int_0^{8/5} \left(\frac{8}{5} - x\right)\left[\frac{4x}{81}(9-x^2)\right] dx + \int_{8/5}^{3} \left(x - \frac{8}{5}\right)\left[\frac{4x}{81}(9-x^2)\right] dx \\ &= 0.555 \text{ aprox.}\end{aligned}$$

SESGO Y CURTOSIS

3.37. Hallar el coeficiente de (*a*) sesgo y (*b*) curtosis para la distribución del Problema 3.19.

Del Problema 3.19 tenemos

$$\sigma^2 = \frac{11}{25} \qquad \mu_3 = -\frac{32}{875} \qquad \mu_4 = \frac{3693}{8750}$$

(*a*) Coeficiente de sesgo $= \alpha_3 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3} = -0.1253$

(*b*) **Coeficiente de curtosis** $= \alpha_4 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} = 2.172$

Se deduce que hay un sesgo moderado a la izquierda, como se indica en la Fig. 3-6. También la distribución es algo menos apunteada que la distribución normal, que tiene una curtosis de 3.

PROBLEMAS DIVERSOS

3.38. Si $M(t)$ es la función generatriz de momentos para una variable aleatoria X demostrar que la media es $\mu = M'(0)$ y la varianza es $\sigma^2 = M''(0) - [M'(0)]^2$.

De (*32*), página 80, tenemos remplazando $r = 1$ y $r = 2$,

$$\mu_1' = M'(0) \qquad \mu_2' = M''(0)$$

Entonces de (*27*)

$$\mu = M'(0) \qquad \mu_2 = \sigma^2 = M''(0) - [M'(0)]^2$$

3.39. Sea X una variable aleatoria que toma los valores $x_k = k$ con probabilidades p_k donde $k = \pm 1, \ldots, \pm n$. (*a*) Hallar la función característica $\phi(\omega)$ de X y (*b*) obtener p_k en términos de $\phi(\omega)$.

(*a*) **La función característica es**

$$\phi(\omega) = E(e^{i\omega X}) = \sum_{k=-n}^{n} e^{i\omega x_k} p_k = \sum_{k=-n}^{n} p_k e^{ik\omega}$$

(*b*) **Multiplicar ambos lados de la expresión en (*a*) por $e^{-ij\omega}$ e integrar con respecto a ω desde 0 hasta 2π. Entonces**

$$\int_{\omega=0}^{2\pi} e^{-ij\omega}\phi(\omega)\,d\omega = \sum_{k=-n}^{n} p_k \int_{\omega=0}^{2\pi} e^{i(k-j)\omega}\,d\omega = 2\pi p_j$$

puesto que

$$\int_{\omega=0}^{2\pi} e^{i(k-j)\omega}\,d\omega = \begin{cases} \dfrac{e^{i(k-j)\omega}}{i(k-j)}\Bigg|_0^{2\pi} = 0 & k \neq j \\ 2\pi & k = j \end{cases}$$

Por tanto

$$p_j = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=0}^{2\pi} e^{-ij\omega}\phi(\omega)\,d\omega$$

o, remplazando j por k,

$$p_k = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=0}^{2\pi} e^{-ik\omega}\phi(\omega)\,d\omega$$

Con frecuencia llamamos $\sum_{k=-n}^{n} p_k e^{ik\omega}$ (donde teóricamente n puede ser infinito) la *serie de Fourier* de $\phi(\omega)$ y p_k los *coeficientes de Fourier*. Para una variable aleatoria continua, la serie de Fourier se remplaza por la integral de Fourier (véase página 81).

3.40. Utilizar el Problema 3.39 para obtener la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X cuya función característica es $\phi(\omega) = \cos\omega$.

Del Problema 3.39

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=0}^{2\pi} e^{-ik\omega}\cos\omega\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=0}^{2\pi} e^{-ik\omega}\left[\frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{2}\right]d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\omega=0}^{2\pi} e^{i(1-k)\omega}\,d\omega + \frac{1}{4\pi}\int_{\omega=0}^{2\pi} e^{-i(1+k)\omega}\,d\omega \end{aligned}$$

Si $k = 1$ hallamos $p_1 = \frac{1}{2}$; si $k = -1$ hallamos $p_{-1} = \frac{1}{2}$. Para los otros valores de k tenemos $p_k = 0$.

Por tanto la variable aleatoria está dada por

$$X = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } 1/2 \\ -1 & \text{con probabilidad } 1/2 \end{cases}$$

Como una verificación véase Problema 3.20.

3.41. Hallar el coeficiente de (*a*) sesgo y (*b*) curtosis de la distribución definida por la *curva normal*, con densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad -\infty < x < \infty$$

(*a*) La distribución tiene la apariencia de la Fig. 3-7. Por simetría, $\mu_1' = \mu_1 = 0$ y $\mu_3' = 0$. Por tanto el coeficiente de sesgo es cero.

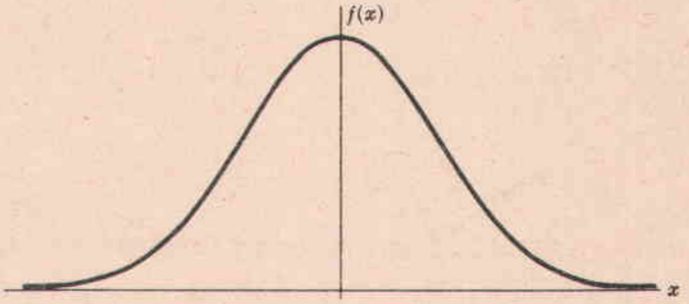


Fig. 3-7

(*b*) Tenemos

$$\begin{aligned} \mu_2' = E(X^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}\, dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} v^{1/2} e^{-v}\, dv \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

donde hemos efectuado la transformación $x^2/2 = v$ y utilizando las propiedades de la función gama dadas en (*2*) y (*5*) del Apéndice A. Análogamente obtenemos

$$\begin{aligned} \mu_4' = E(X^4) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2/2}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2/2}\, dx \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} v^{3/2} e^{-v}\, dv \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \end{aligned}$$

Entonces

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) = \mu_2' = 1$$

$$\mu_4 = E[(X-\mu)^4] = E(X^4) = \mu_4' = 3$$

Por tanto el coeficiente de curtosis es

$$\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$$

3.42. Demostrar que $-1 \leqq \rho \leqq 1$ (véase página 82).

Para cualquier constante real c tenemos

$$E[\{Y - \mu_Y - c(X - \mu_X)\}^2] \geqq 0$$

Entonces el lado izquierdo puede escribirse

$$\begin{aligned} E[(Y-\mu_Y)^2] + c^2E[(X-\mu_X)^2] - 2cE[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] &= \sigma_Y^2 + c^2\sigma_X^2 - 2c\sigma_{XY} \\ &= \sigma_Y^2 + \sigma_X^2\left(c^2 - \frac{2c\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}\right) \\ &= \sigma_Y^2 + \sigma_X^2\left(c - \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}\right)^2 - \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2} \\ &= \frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2 - \sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2} + \sigma_X^2\left(c - \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}\right)^2 \end{aligned}$$

Para que la última cantidad sea mayor o igual que cero para cada valor de c debemos tener

$$\sigma_X^2\sigma_Y^2 - \sigma_{XY}^2 \geqq 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2} \leqq 1$$

que es equivalente a $\rho^2 \leqq 1$ ó $-1 \leqq \rho \leqq 1$.

Problemas suplementarios

ESPERANZA DE VARIABLES ALEATORIAS

3.43. Una variable aleatoria X se define por $X = \begin{cases} -2 & \text{prob. } 1/3 \\ 3 & \text{prob. } 1/2 \\ 1 & \text{prob. } 1/6 \end{cases}$. Hallar (*a*) $E(X)$, (*b*) $E(2X+5)$, (*c*) $E(X^2)$.

3.44. Sea X una variable aleatoria definida por la función de densidad $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$

Hallar (*a*) $E(X)$, (*b*) $E(3X-2)$, (*c*) $E(X^2)$.

3.45. La función de densidad de una variable aleatoria X es $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geqq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$

Hallar (*a*) $E(X)$, (*b*) $E(X^2)$, (*c*) $E[(X-1)^2]$.

3.46. ¿Cuál es el número esperado de puntos que resultan en 3 lanzamientos sucesivos de un dado honrado? ¿Parece razonable su solución? Explicar.

3.47. Una variable aleatoria X tiene la función de densidad $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geqq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$. Hallar $E(e^{2X/3})$.

3.48. Sean X, Y variables aleatorias independientes cada una con función de densidad

$$f(u) = \begin{cases} 2e^{-2u} & u \geqq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar (*a*) $E(X+Y)$, (*b*) $E(X^2+Y^2)$, (*c*) $E(XY)$.

3.49. ¿Se cumple que (*a*) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$, (*b*) $E(XY) = E(X)\,E(Y)$, en el Problema 3.48? Explicar.

3.50. Sean X, Y variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}x(x+y) & 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar (*a*) $E(X)$, (*b*) $E(Y)$, (*c*) $E(X+Y)$, (*d*) $E(XY)$.

3.51. ¿Se cumple que (*a*) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$, (*b*) $E(XY) = E(X)\,E(Y)$, en el Problema 3.50? Explicar.

3.52. Sean X, Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar (*a*) $E(X)$, (*b*) $E(Y)$, (*c*) $E(X+Y)$, (*d*) $E(XY)$.

3.53. ¿Se cumple que (*a*) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$, (*b*) $E(XY) = E(X)\,E(Y)$, en el Problema 3.52? Explicar.

3.54. Si $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2x+y) & 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$. Hallar (*a*) $E(X)$, (*b*) $E(Y)$, (*c*) $E(X^2)$, (*d*) $E(Y^2)$, (*e*) $E(X+Y)$, (*f*) $E(XY)$.

3.55. Sean X, Y variables aleatorias independientes tales que

$$X = \begin{cases} 1 & \text{prob. } 1/3 \\ 0 & \text{prob. } 2/3 \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 2 & \text{prob. } 3/4 \\ -3 & \text{prob. } 1/4 \end{cases}$$

Hallar (*a*) $E(3X+2Y)$, (*b*) $E(2X^2-Y^2)$, (*c*) $E(XY)$, (*d*) $E(X^2Y)$.

3.56. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aleatorias que están distribuidas idénticamente tal que

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{prob. } 1/2 \\ 2 & \text{prob. } 1/3 \\ -1 & \text{prob. } 1/6 \end{cases}$$

Hallar (*a*) $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$, (*b*) $E(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2)$.

VARIANZA Y DESVIACION TIPICA

3.57. Hallar (*a*) la varianza y (*b*) la desviación típica del número de puntos que resultan en un sólo lanzamiento de un dado honrado.

3.58. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & -2 \leqq x \leqq 2 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar (*a*) Var (X), (*b*) σ_X.

3.59. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geqq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar (*a*) Var (X), (*b*) σ_X.

3.60. Hallar la varianza y la desviación típica para la variable aleatoria X del (*a*) Problema 3.43, (*b*) Problema 3.44.

3.61. Una variable aleatoria X tiene $E(X) = 2$, $E(X^2) = 8$. Hallar (*a*) Var (X), (*b*) σ_X.

3.62. Si una variable aleatoria X es tal que $E[(X-1)^2] = 10$, $E[(X-2)^2] = 6$ hallar (*a*) $E(X)$, (*b*) Var (X), (*c*) σ_X.

3.63. Demostrar el Teorema 3-1, página 77.

MOMENTOS Y FUNCIONES GENERATRICES DE MOMENTOS

3.64. Hallar (*a*) la función generatriz de momentos de la variable aleatoria

$$X = \begin{cases} 1/2 & \text{prob. } 1/2 \\ -1/2 & \text{prob. } 1/2 \end{cases}$$

y (*b*) los primeros cuatro momentos alrededor del origen.

3.65. (*a*) Hallar la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & 0 \leqq x \leqq 2 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

(*b*) Emplear la función generatriz de (*a*) para hallar los primeros cuatro momentos alrededor del origen.

3.66. Hallar los primeros cuatro momentos alrededor de la media en el (*a*) Problema 3.43, (*b*) Problema 3.44.

3.67. (*a*) Hallar la función generatriz de momentos de una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geqq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

y (*b*) determinar los primeros cuatro momentos alrededor del origen.

3.68. En el Problema 3.67 hallar los primeros cuatro momentos alrededor de la media.

3.69. Si X tiene función de densidad $f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & a \leqq x \leqq b \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$. Hallar el k-ésimo momento alrededor (*a*) del origen, (*b*) de la media.

3.70. Si $M(t)$ es la función generatriz de momentos de la variable aleatoria X, demostrar que el 3o. y 4o. momentos alrededor de la media están dados por

$$\mu_3 = M'''(0) - 3M''(0)\,M'(0) + 2[M'(0)]^3$$

$$\mu_4 = M^{(\text{iv})}(0) - 4M'''(0)\,M'(0) + 6M''(0)[M'(0)]^2 - 3[M'(0)]^4$$

FUNCIONES CARACTERISTICAS

3.71. Demostrar el Teorema 3-11, página 81.

3.72. Hallar la función característica de la variable aleatoria $X = \begin{cases} a & \text{prob. } p \\ b & \text{prob. } q = 1-p \end{cases}$

3.73. Hallar la función característica de la variable aleatoria X que tiene función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1/2a & |x| \leqq a \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

3.74. Hallar la función característica de la variable aleatoria X con función de densidad

$$f x) = \begin{cases} x/2 & 0 \leqq x \leqq 2 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

3.75. Sean $X_k = \begin{cases} 1 & \text{prob. } 1/2 \\ -1 & \text{prob. } 1/2 \end{cases}$ variables aleatorias independientes ($k = 1, 2, \ldots, n$). Demostrar que la función característica de la variable aleatoria

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$$

es $[\cos(\omega/\sqrt{n})]^n$.

3.76. Demostrar que cuando $n \to \infty$ la función característica del Problema 3.75 tiende a $e^{-\omega^2/2}$. (*Sugerencia:* Tomar el logaritmo de la función característica y emplear la regla de L'Hospital).

COVARIANZA Y COEFICIENTE DE CORRELACION

3.77. Sean X, Y variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 \leqq x \leqq 1, \ 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar (*a*) $\text{Var}(X)$, (*b*) $\text{Var}(Y)$, (*c*) σ_X, (*d*) σ_Y, (*e*) σ_{XY}, (*f*) ρ.

3.78. Resolver el Problema 3.77 si la función de densidad conjunta es $f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x \geqq 0, \ y \geqq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$

3.79. Hallar (*a*) $\text{Var}(X)$, (*b*) $\text{Var}\ Y$, (*c*) σ_X, (*d*) σ_Y, (*e*) σ_{XY}, (*f*) ρ, para las variables aleatorias del Problema 2.57.

3.80. Resolver el Problema 3.79 para las variables aleatorias del Problema 2.99.

3.81. Hallar (*a*) la covarianza y (*b*) el coeficiente de correlación de las dos variables aleatorias X, Y si $E(X) = 2$, $E(Y) = 3$, $E(XY) = 10$, $E(X^2) = 9$, $E(Y^2) = 16$.

3.82. El coeficiente de correlación de las dos variables aleatorias X, Y es $-1/4$ en tanto que sus varianzas son 3 y 5. Hallar la covarianza.

ESPERANZA, VARIANZA Y MOMENTOS CONDICIONALES

3.83. Si X, Y tienen función de densidad

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 \leqq x \leqq 1, \ 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar la esperanza condicional de (*a*) Y dada X, (*b*) X dada Y.

3.84. Resolver el Problema 3.83 si $f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)} & x \geqq 0, \ y \geqq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$

3.85. Si X, Y tienen la función de probabilidad conjunta dada en la Tabla 2-9, página 74. Hallar la esperanza condicional de (*a*) Y dada X, (*b*) X dada Y.

3.86. Si X, Y son variables aleatorias independientes continuas demostrar que las densidades condicionales de X dada Y y de Y dada X son las mismas respectivamente que las densidades marginales de X y Y.

3.87. Establecer y demostrar un resultado para variables aleatorias discretas análogo al del Problema 3.86.

3.88. Ilustrar por medio de un ejemplo el resultado del (*a*) Problema 3.36, (*b*) Problema 3.87.

3.89. Hallar la varianza condicional de (*a*) Y dada X, (*b*) X dada Y para la distribución del Problema 3.83.

3.90. Resolver el Problema 3.89 para la distribución del Problema 3.84.

3.91. Resolver el Problema 3.89 para la distribución del Problema 2.99.

DESIGUALDAD DE CHEBYSHEV

3.92. Una variable aleatoria X tiene media 3 y varianza 2. Utilizar la desigualdad de Chebyshev para obtener un límite superior para (*a*) $P(|X-3| \geqq 2)$, (*b*) $P(|X-3| \geqq 1)$.

3.93. Demostrar la desigualdad de Chebyshev para una variable discreta X. (*Sugerencia:* Véase Problema 3.30).

3.94. Una variable aleatoria X tiene la función de densidad $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$. (*a*) Hallar $P(|X-\mu| > 2)$. Emplear la desigualdad de Chebyshev para obtener un límite superior de $P(|X-\mu| > 2)$ y compararlo con el resultado en (*a*).

3.95. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aleatorias independientes cada una con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & -1 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Si $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ demostrar que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqq \epsilon\right) \leqq \frac{1}{3n\epsilon^2}$$

LEY DE LOS GRANDES NUMEROS

3.96. Demostrar que la ley de los grandes números (en forma débil) puede establecerse como

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| < \epsilon\right) = 1$$

e interpretarla.

3.97. Sean X_k ($k = 1, \ldots, n$) n variables aleatorias independientes tales que

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{prob. } p \\ 0 & \text{prob. } q = 1-p \end{cases}$$

(*a*) Si X_k representa el número de caras en el k-ésimo lanzamiento de una moneda, ¿qué interpretación puede darse a $S_n = X_1 + \cdots + X_n$?

(*b*) Demostrar que la ley de los grandes números para este caso se reduce a

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqq \epsilon\right) = 0$$

e interpretar este resultado.

3.98. Sean X_k, $k = 1, 2, \ldots$, variables aleatorias independientes cada una con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad -\infty < x < \infty$$

Demostrar que la ley de los grandes números no es válida en este caso.

3.99. (*a*) ¿Sería válida la ley de los grandes números si la función de densidad del Problema 3.98 se remplaza por $f(x) = c/(1+x^4)$?

(*b*) ¿Es necesario que existan todos los momentos de una distribución para que la ley de los grandes números sea válida? Justificar su respuesta.

OTRAS MEDIDAS DE CENTRALIZACION

3.100. Hallar (*a*) la moda y (*b*) la mediana de una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geqq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

y (*c*) compararlas con la media.

3.101. Resolver el Problema 3.100 si la función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 4x(1-x^2) & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

3.102. Hallar (*a*) la mediana y (*b*) la moda para la variable aleatoria definida por

$$X = \begin{cases} 2 & \text{prob. } 1/3 \\ -1 & \text{prob. } 2/3 \end{cases}$$

y compararlas con la media.

3.103. Hallar (*a*) la mediana y (*b*) la moda del conjunto de números 1, 3, 2, 1, 5, 6, 3, 3 y compararlas con la media.

PERCENTILAS

3.104. Hallar los valores de la (*a*) vigésima quinta y (*b*) septuagésima quinta percentilas para la variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

3.105. Hallar los valores de la (*a*) décima, (*b*) vigésima quinta, (*c*) septuagésima quinta, (*d*) nonagésima percentila para una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} c(x-x^3) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde c es una constante apropiada.

3.106. Una variable aleatoria X tiene función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geqq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Demostrar que la percentila $100p$ tiene el valor $-\ln(1-p)$ donde $0 \leqq p < 1$.

3.107. Una variable aleatoria X tiene función de densidad $f(x) = 1/\pi(1+x^2)$, $-\infty < x < \infty$. Demostrar que el valor de la percentila es $\tan(p - 1/2)\pi$ donde $0 < p < 1$.

OTRAS MEDIDAS DE DISPERSION

3.108. Hallar (*a*) el recorrido, (*b*) el recorrido semi-intercuartílico y (*c*) la desviación media para la variable aleatoria del Problema 3.104.

3.109. Resolver el Problema 3.108 para la variable aleatoria del Problema 3.105.

3.110. Explicar por qué el recorrido no es una medida de dispersión útil en el (*a*) Problema 3.106, (*b*) Problema 3.107.

3.111. Demostrar que el recorrido semi-intercuartílico para la variable aleatoria del Problema 3.106 es $1/2 \ln 3$.

3.112. Demostrar que el recorrido semi-intercuartílico para la variable aleatoria del Problema 3.107 es 1.

3.113. Hallar la desviación media de a variable aleatoria X en el (*a*) Problema 3.106, (*b*) Problema 3.107.

3.114. Obtener la probabilidad de que la variable aleatoria X difiera de su media por más que el recorrido semi-intercuartílico en el caso del (*a*) Problema 3.104, (*b*) Problema 3.106.

SESGO Y CURTOSIS

3.115. Sea $f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & -1 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$, donde c es una constante apropiada, la función de densidad de la variable aleatoria X. Hallar el coeficiente de (*a*) sesgo, (*b*) curtosis.

3.116. Hallar el coeficiente de (*a*) sesgo y (*b*) curtosis para la distribución del Problema 3.106.

3.117. ¿Puede definirse un coeficiente de curtosis para la distribución del Problema 3.107? Justificar su respuesta.

3.118. Si

$$f(x) = \begin{cases} c\left(1 - \dfrac{|x|}{a}\right) & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

donde c es una constante apropiada, es la función de densidad de X, hallar el coeficiente de (*a*) sesgo, (*b*) curtosis.

3.119. Hallar el coeficiente de (*a*) sesgo, (*b*) curtosis, para la distribución con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geqq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

PROBLEMAS DIVERSOS

3.120. Sea X una variable aleatoria que puede tomar los valores 2, 1, 3 con probabilidades 1/3, 1/6 y 1/2 respectivamente. Hallar (*a*) la media, (*b*) la varianza, (*c*) la función generatriz de momentos, (*d*) la función característica, (*e*) el tercer momento alrededor de la media.

3.121. Resolver el Problema 3.120 si X tiene función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde c es una constante apropiada.

3.122. Se lanzan tres dados honrados sucesivamente. Hallar (*a*) la media y (*b*) la varianza de la suma.

3.123. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \leqq x \leqq 2 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde c es una constante apropiada. Hallar (*a*) la media, (*b*) la varianza, (*c*) la función generatriz de momentos, (*d*) la función característica, (*e*) el coeficiente de sesgo, (*f*) el coeficiente de curtosis.

3.124. Refiriéndose al Problema 1.156, página 37, determinar el número de cartas esperado que llegarán al destino apropiado.

3.125. Si X, Y tienen función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar (*a*) $E(X^2 + Y^2)$, (*b*) $E(\sqrt{X^2 + Y^2})$.

3.126. Resolver el Problema 3.125 si X, Y son variables aleatorias independientes distribuidas idénticamente con funciones de densidad $f(u) = (2\pi)^{-1/2}e^{-u^2/2}$, $-\infty < u < \infty$.

3.127. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

y sea $Y = X^2$. Hallar (*a*) $E(X)$, (*b*) $E(Y)$, (*c*) $E(XY)$.

3.128. Utilizar el resultado del Problema 3.127 para demostrar que podemos tener $E(XY) = E(X)\,E(Y)$ sin que X, Y sean independientes.

3.129. Demostrar que si X, Y son variables aleatorias independientes, entonces $E[f(X)\,g(Y)] = E[f(X)] \cdot E[g(Y)]$ donde $f(X)$ y $g(Y)$ son funciones de estas variables. ¿Hay alguna restricción sobre estas funciones? Explicar.

3.130. Si X, Y son variables aleatorias con función de densidad conjunta $f(x, y)$ la función generatriz de momentos de X, Y se define como

$$M(t, u) = E[e^{tX+uY}] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx+uy} f(x, y)\,dx\,dy$$

(*a*) Hallar la función generatriz de momentos para la distribución del Problema 3.125. (*b*) ¿Es la función generatriz de momentos de X, Y en este caso igual al producto de las funciones generatrices de momentos de X y Y por separado? Explicar su respuesta y decidir si este es el caso para todas las funciones de densidad conjunta.

3.131. Demostrar cómo puede emplearse la función generatriz de momentos del Problema 3.130 para hallar $E(X^m Y^n)$ donde m y n son enteros positivos.

3.132. De acuerdo con el Problema 3.130, ¿cómo definiría la función característica de X y Y? Ilustrar por medio de un ejemplo.

3.133. Un juego consiste en lanzar una moneda hasta que aparezca una cara. Si esto sucede en el k-ésimo lanzamiento un jugador recibe 2^k dólares. Hallar la esperanza suponiendo que la moneda es honrada y discutir el significado de su respuesta. (Este juego se conoce como la *paradoja de San Petersburgo*).

3.134. Resolver el Problema 3.133 si la moneda está cargada.

3.135. Demostrar que si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias entonces

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}(X_k) + \sum_{j\neq k} \operatorname{Cov}(X_j, X_k)$$

3.136. Sea $M(t)$ la función generatriz de momentos de la variable aleatoria X. Demostrar que si $K(t) = \ln M(t)$ entonces (*a*) $K'(0) = \mu = E(X)$, (*b*) $K''(0) = \sigma^2 = \operatorname{Var}(X)$.

3.137. Refiriéndose al Problema 3.136, expresar (*a*) el tercero y (*b*) el cuarto momentos en términos de K y sus derivadas evaluadas en $t = 0$.

3.138. Obtener resultados correspondientes a los Problemas 3.136 y 3.137 para la función característica.

3.139. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes distribuidas idénticamente con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1/2a & |x| \leqq a \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde $a > 0$. Hallar la función característica de

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$$

3.140. (*a*) Demostrar que cuando $n \to \infty$ la función característica del Problema 3.139 tiende a $e^{-\omega^2/2}$. Comparar con los Problemas 3.75 y 3.76. (*b*) ¿Qué conclusiones puede extraer acerca de los límites de las distribuciones en los dos casos?

Capítulo 4

Distribuciones de probabilidad con nombre propio

DISTRIBUCION BINOMIAL O DE BERNOULLI

Supóngase que tenemos un experimento como lanzar una moneda o un dado repetidamente, escoger una bola de una urna repetidamente, etc. Cada lanzamiento o escogencia se denomina una *prueba*. Con cada prueba hay una probabilidad asociada con un suceso particular como la cara en la moneda, el 4 en el dado o la selección de una bola roja. En algunos casos la probabilidad no cambia de una prueba a la siguiente (como en el lanzamiento de la moneda o del dado). A estas pruebas se les llama *independientes* y se conocen como las *pruebas de Bernoulli* en memoria de James Bernoulli quien las investigó a finales del siglo XVII.

Sea p la probabilidad de que un suceso ocurra en una sola prueba de Bernoulli (llamada la probabilidad de *éxito*). Entonces $q = 1 - p$ es la probabilidad de que el suceso no ocurra en una sola prueba (llamada la probabilidad de *fracaso*). La probabilidad de que el suceso ocurra x veces en n pruebas (es decir que ocurran x éxitos y $n - x$ fracasos) está dada por la función de probabilidad

$$f(x) \;=\; P(X=x) \;=\; \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \;=\; \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^x q^{n-x} \tag{1}$$

donde la variable aleatoria X denota el número de éxitos en n pruebas y $x = 0, 1, \ldots, n$.

EJEMPLO 4.1. La probabilidad de obtener exactamente 2 caras en 6 lanzamientos de una moneda honrada es

$$P(X=2) \;=\; \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} \;=\; \frac{6!}{2!\,4!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} \;=\; \frac{15}{64}$$

La función de probabilidad discreta (*1*) con frecuencia se denomina *distribución binomial* puesto que para $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ corresponde a los términos sucesivos en la *expansión binomial*

$$(q+p)^n \;=\; q^n + \binom{n}{1} q^{n-1}p + \binom{n}{2} q^{n-2}p^2 + \cdots + p^n \;=\; \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \tag{2}$$

También se llama *distribución de Bernoulli*. Una variable aleatoria con la distribución (*1*) se dice que está *distribuida binomialmente* o es de la *distribución de Bernoulli*.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL

Algunas de las propiedades importantes de la distribución binomial se presentan en la Tabla 4-1.

EJEMPLO 4.2. En 100 lanzamientos de una moneda honrada el número esperado o media de caras es $\mu = (100)(\frac{1}{2}) = 50$ en tanto que la desviación típica es $\sigma = \sqrt{(100)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = 5$.

Tabla 4-1

Media	$\mu = np$
Varianza	$\sigma^2 = npq$
Desviación típica	$\sigma = \sqrt{npq}$
Coeficiente de sesgo	$\alpha_3 = \dfrac{q-p}{\sqrt{npq}}$
Coeficiente de curtosis	$\alpha_4 = 3 + \dfrac{1-6pq}{\sqrt{npq}}$
Función generatriz de momentos	$M(t) = (q + pe^t)^n$
Función característica	$\phi(\omega) = (q + pe^{i\omega})^n$

LA LEY DE LOS GRANDES NUMEROS PARA LAS PRUEBAS DE BERNOULLI

La ley de los grandes números, página 84, tiene una interpretación interesante en el caso de las pruebas de Bernoulli y se presenta en el teorema siguiente.

Teorema 4-1 (Ley de los grandes números para las pruebas de Bernoulli): Sea X la variable aleatoria que da el número de éxitos en n pruebas de Bernoulli, así que X/n es la proporción de éxitos. Entonces si p es la probabilidad de éxito y ϵ es cualquier número positivo,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqq \epsilon\right) = 0 \tag{3}$$

En otras palabras: a la larga se hace extremadamente factible que la proporción de éxitos, X/n, sea tan próxima como se desee a la probabilidad de éxito en una sola prueba, p. Esta ley en un sentido justifica el empleo de la definición de probabilidad en la página 6. Un resultado más fuerte lo suministra la ley de los grandes números en *forma fuerte* (página 84) que establece que con probabilidad uno $\lim\limits_{n\to\infty} X/n = p$, es decir X/n realmente *converge a p* excepto en un caso despreciable de casos.

DISTRIBUCION NORMAL

Uno de los más importantes ejemplos de una distribución de probabilidad continua es la *distribución normal*, algunas veces denominada la *distribución gaussiana*. La función de densidad para la distribución está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < \infty \tag{4}$$

donde μ y σ son la media y la desviación típica respectivamente. La función de distribución correspondiente está dada por

$$F(x) = P(X \leqq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(v-\mu)^2/2\sigma^2}\, dv \tag{5}$$

En este caso decimos que la variable aleatoria X está *normalmente distribuida* con media μ y varianza σ^2.

Si hacemos que Z sea la variable normalizada correspondiente a X, es decir si hacemos

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \tag{6}$$

entonces la media o el valor esperado de Z es 0 y la varianza es 1. En este caso la función de densidad para Z puede obtenerse a partir de (*4*) al remplazar $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, resultando

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \tag{7}$$

Este resultado se conoce frecuentemente como *la función* o la *distribución de densidad normal tipificada.* La función de distribución correspondiente está dada por

$$F(z) = P(Z \leqq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\,du = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{z} e^{-u^2/2}\,du \tag{8}$$

Algunas veces llamamos al valor z de la variable tipificada el *valor tipificado*. La función $F(z)$ se encuentra relacionada con la *función error*, erf (z). Tenemos

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-u^2}\,du \quad \text{y} \quad F(z) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right] \tag{9}$$

En la Fig. 4-1 se muestra una representación gráfica de la función de densidad (*7*), algunas veces conocida como la *curva normal tipificada.* En esta representación gráfica hemos indicado las áreas dentro de 1, 2 y 3 desviaciones típicas de la media (es decir entre $z = -1$ y $+1$, $z = -2$ y $+2$, $z = -3$ y $+3$) las cuales son iguales al 68.27%, 95.45% y 99.73% del área total, que es uno. Esto quiere decir que

$$P(-1 \leqq Z \leqq 1) = 0.6827, \quad P(-2 \leqq Z \leqq 2) = 0.9545, \quad P(-3 \leqq Z \leqq 3) = 0.9973 \tag{10}$$

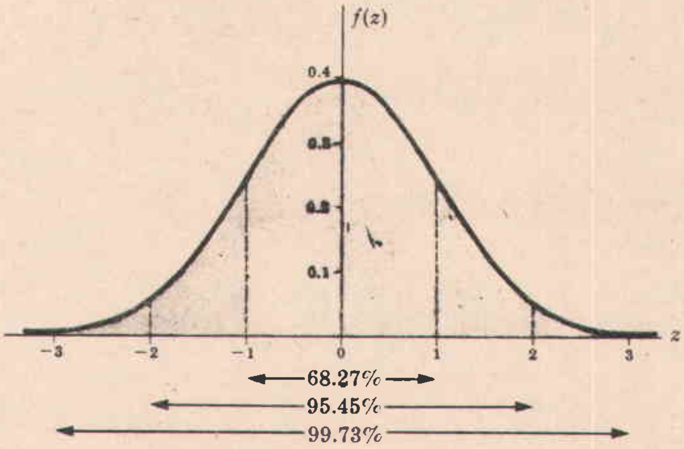


Fig. 4-1

En el Apéndice C se presenta una tabla que da las áreas bajo esta curva limitada por la ordenada $z = 0$ y cualquier valor positivo de z. A partir de esta tabla se pueden encontrar las áreas entre dos ordenadas cualesquiera utilizando la simetría de la curva alrededor de $z = 0$.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCION NORMAL

Algunas de las propiedades importantes de la distribución normal general se presentan en la tabla siguiente.

Tabla 4-2

Media	μ
Varianza	σ^2
Desviación típica	σ
Coeficiente de sesgo	$\alpha_3 = 0$
Coeficiente de curtosis	$\alpha_1 = 3$
Función generatriz de momentos	$M(t) = e^{\mu t + (\sigma^2 t^2/2)}$
Función característica	$\phi(\omega) = e^{i\mu\omega - (\sigma^2\omega^2/2)}$

RELACION ENTRE LAS DISTRIBUCIONES BINOMIAL Y NORMAL

Si n es muy grande y ni p ni q están muy próximas a cero, la distribución binomial puede aproximarse estrechamente a la distribución normal con variable tipificada dada por

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \tag{11}$$

Aquí X es la variable aleatoria que da el número de éxitos en n pruebas de Bernoulli y p es la probabilidad de éxitos. La aproximación es tanto mejor conforme aumenta n, y en el límite es total. (Véase Problema 4.17). En la práctica la aproximación es muy buena si ambos np y nq son superiores a 5. El hecho de que la distribución binomial tiende a la distribución normal puede describirse al escribir

$$\lim_{n \to \infty} P\left(a \leqq \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leqq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2}\, du \tag{12}$$

Literalmente, decimos que la variable aleatoria tipificada $(X - np)/\sqrt{npq}$ es *normal asintóticamente.*

DISTRIBUCION DE POISSON

Sea X una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores 0, 1, 2, . . . tal que la función de probabilidad de X esté dada por

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

donde λ es una constante positiva dada. Esta distribución se llama la *distribución de Poisson* (en memoria de S.D. Poisson, quien la descubrió a comienzos del Siglo XIX) y una variable aleatoria con esta distribución se dice que está distribuida de acuerdo con la distribución de Poisson.

Los valores de $f(x)$ en (*13*) pueden obtenerse empleando el Apéndice H, que da los valores de $e^{-\lambda}$ para diferentes valores de λ, o utilizando logaritmos.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCION DE POISSON

Algunas de las propiedades importantes de la distribución de Poisson se presentan en la tabla siguiente.

Tabla 4-3

Media	$\mu = \lambda$
Varianza	$\sigma^2 = \lambda$
Desviación típica	$\sigma = \sqrt{\lambda}$
Coeficiente de sesgo	$\alpha_3 = 1/\sqrt{\lambda}$
Coeficiente de curtosis	$\alpha_4 = 3 + (1/\lambda)$
Función generatriz de momentos	$M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$
Función característica	$\phi(\omega) = e^{\lambda(e^{i\omega} - 1)}$

RELACION ENTRE LAS DISTRIBUCIONES BINOMIAL Y DE POISSON

En la distribución binomial (*1*) si n es grande mientras que la probabilidad p de ocurrencia de un suceso está cerca de cero, de modo que $q = 1 - p$ está cerca de 1, el suceso se llama *suceso raro*. En la práctica consideramos que un suceso es raro si el número de pruebas es al menos 50 ($n \geqq 50$) mientras que np es menor que 5. En tales casos la distribución binomial (*1*) se aproxima mucho a la distribución de Poisson (*13*) con $\lambda = np$. Esto se ve comparando las Tablas 4-1 y 4-3, ya que al remplazar $\lambda = np$, $q \approx 1$ y $p \approx 0$ en la Tabla 4-1 obtenemos los resultados de la Tabla 4-3.

RELACION ENTRE LAS DISTRIBUCIONES DE POISSON Y NORMAL

Puesto que existe una relación entre las distribuciones binomial y normal y entre las distribuciones binomial y de Poisson, se deduce que hay también una relación entre las distribuciones de Poisson y normal. Efectivamente esto sucede. Podemos demostrar que si X es la variable aleatoria de Poisson de (*13*) y $(X - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ es la variable aleatoria tipificada correspondiente, entonces

$$\lim_{\lambda \to \infty} P\left(a \leqq \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2}\, du \tag{14}$$

esto es, la distribución de Poisson tiende a la distribución normal a medida que $\lambda \to \infty$ ó $(X - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ es *normal asintóticamente.*

TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL

La semejanza entre (*12*) y (*14*) naturalmente nos conduce a preguntarnos si existen otras distribuciones además de la binomial y la de Poisson que tengan la distribución normal como caso límite. El extraordinario teorema siguiente revela que realmente una gran clase de distribuciones tienen esta propiedad.

Teorema 4-2 (Teorema del límite central): Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes que están distribuidas idénticamente (es decir todas tienen la *misma* función de probabilidad en el caso discreto o función de densidad en el caso continuo) y tienen media μ y varianza σ^2 finitas. Entonces si $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

$$\lim_{n \to \infty} P\left(a \leqq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2}\, du \tag{15}$$

es decir, la variable aleatoria $(S_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n}$, que es la variable tipificada a S_n, es normal asintóticamente.

El teorema también es verdadero bajo condiciones más generales; por ejemplo, se cumple cuando $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes con la misma media y la misma varianza pero no necesariamente distribuidas idénticamente.

DISTRIBUCION MULTINOMIAL

Si los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ pueden ocurrir con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_k$ donde $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$. Si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son las variables aleatorias respectivamente que dan el número de veces que $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ocurre en un total de n pruebas, de modo que $X_1 + X_2 + \cdots + X_k = n$, entonces

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k} \tag{16}$$

donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, es la función de probabilidad conjunta para las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_k$.

Esta distribución, que es una generalización de la distribución binomial, se llama la *distribución multinomial* puesto que (*16*) es el término general en la expansión multinomial de $(p_1 + p_2 + \cdots + p_k)^n$.

EJEMPLO 4.3. Si un dado honrado se lanza 12 veces, la probabilidad de obtener 1, 2, 3, 4, 5 y 6 exactamente dos veces cada uno es

$$P(X_1 = 2, X_2 = 2, \ldots, X_6 = 2) = \frac{12!}{2!\,2!\,2!\,2!\,2!\,2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1925}{559\,872} = 0.00344$$

El número esperado de veces que $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ocurra en n pruebas son $np_1, np_2, \ldots, np_k$ respectivamente, esto es

$$E(X_1) = np_1, \quad E(X_2) = np_2, \quad \ldots, \quad E(X_k) = np_k \tag{17}$$

DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA

Suponga que una caja contiene b bolas blancas y r rojas. Efectuemos n pruebas de un experimento en el cual se escoge una bola aleatoriamente, se observa su color y se regresa la bola a la caja. Este tipo de experimento se conoce como *muestreo con remplazamiento*. En tal caso si X es la variable aleatoria para el número de bolas blancas escogidas (éxitos) en n pruebas, entonces empleando la distribución binomial (*1*) vemos que la probabilidad de x éxitos es

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \frac{b^x r^{n-x}}{(b+r)^n} \tag{18}$$

ya que $p = b/(b+r)$, $q = 1 - p = r/(b+r)$.

Si modificamos el experimento anterior de modo que el *muestreo sea sin remplazamiento*, es decir las bolas no se regresan a la caja después de seleccionarse, entonces

$$P(X = x) = \frac{\binom{b}{x}\binom{r}{n-x}}{\binom{b+r}{n}} \tag{19}$$

Esta es la *distribución hipergeométrica*. La media y la varianza para esta distribución son

$$\mu = \frac{nb}{b+r} \qquad \sigma^2 = \frac{nbr(b+r-n)}{(b+r)^2(b+r-1)} \tag{20}$$

Si consideramos que el número total de bolas blancas y rojas es N, en tanto que las proporciones de bolas blancas y rojas son p y $q = 1 - p$ respectivamente, entonces

$$p = \frac{b}{b+r} = \frac{b}{N}, \quad q = \frac{r}{b+r} = \frac{r}{N} \qquad \text{ó} \qquad b = Np, \quad r = Nq \tag{21}$$

de modo que (*19*) y (*20*) se conviertan respectivamente en

$$P(X=x) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{22}$$

$$\mu = np \qquad \sigma^2 = \frac{npq(N-n)}{N-1} \tag{23}$$

Obsérvese que cuando $N \to \infty$ (ó N es grande comparada con n), (*22*) se reduce a (*18*), que puede escribirse como

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \tag{24}$$

y (*23*) se reduce a

$$\mu = np \qquad \sigma^2 = npq \tag{25}$$

de acuerdo con las primeras dos entradas de la Tabla 4-1, página 109. Los resultados son los que esperábamos, ya que para N grande el muestreo sin remplazamiento realmente es idéntico al muestreo con remplazamiento.

DISTRIBUCION UNIFORME

Una variable aleatoria X está *distribuida uniformemente* en $a \leqq x \leqq b$ si su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & a \leqq x \leqq b \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \tag{26}$$

y la distribución se llama *distribución uniforme.*

La función de distribución está dada por

$$F(x) = P(X \leqq x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ (x-a)/(b-a) & a \leqq x < b \\ 1 & x \geqq b \end{cases} \tag{27}$$

La media y la varianza son respectivamente

$$\mu = \frac{1}{2}(a+b) \qquad \sigma^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2 \tag{28}$$

DISTRIBUCION DE CAUCHY

Una variable X tiene la *distribución de Cauchy,* si la función de densidad de X es

$$f(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)} \qquad a > 0, \; -\infty < x < \infty \tag{29}$$

Esta función de densidad es simétrica con respecto a $x = 0$ así que su media puede tomarse como cero. Sin embargo no existen la varianza y otros momentos superiores. Análogamente no existe la función generatriz de momentos. Sin embargo la función característica existe y está dada por

$$\phi(\omega) = e^{-a\omega} \tag{30}$$

DISTRIBUCION GAMMA

Una variable aleatoria tiene la *distribución gamma* si la función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} & x > 0 \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases} \qquad (\alpha, \beta > 0) \tag{31}$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es la *función gamma* (véase Apéndice A). La media y la varianza están dadas por

$$\mu = \alpha\beta \qquad \sigma^2 = \alpha\beta^2 \tag{32}$$

La función generatriz de momentos y la función característica están dadas respectivamente por

$$M(t) = (1-\beta t)^{-\alpha} \qquad \phi(\omega) = (1-\beta i\omega)^{-\alpha} \tag{33}$$

DISTRIBUCION BETA

Una variable aleatoria X tiene la *distribución beta* si la función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \qquad (\alpha, \beta > 0) \tag{34}$$

donde $B(\alpha, \beta)$ es la *función beta* (véase Apéndice A). En vista de la relación (*9*), Apéndice A, entre las funciones beta y gamma la distribución beta también puede definirse por la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \tag{35}$$

donde α, β son positivos. La media y la varianza son

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \tag{36}$$

Para $\alpha > 1$, $\beta > 1$ hay una única moda en el valor

$$x_{\text{moda}} = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2} \tag{37}$$

DISTRIBUCION CHI-CUADRADO

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ ν variables aleatorias independientes distribuidas normalmente con media cero y varianza 1. Considérese la variable aleatoria

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_\nu^2 \tag{38}$$

donde χ^2 se llama *chi-cuadrado.* Entonces podemos demostrar que para $x \geqq 0$,

$$P(\chi^2 \leqq x) \;=\; \frac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)} \int_0^x u^{(\nu/2)-1} e^{-u/2}\,du \tag{39}$$

y $P(\chi^2 \leqq x) = 0$ para $x < 0$.

La distribución definida por (*39*) es la *distribución chi-cuadrado* y ν es el *número de grados de libertad.* La distribución definida por (*39*) tiene la función de densidad correspondiente dada por

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)}\, x^{(\nu/2)-1}\, e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases} \tag{40}$$

Se observa que la distribución chi-cuadrado es un caso especial de la distribución gamma con $\alpha = \nu/2$, $\beta = 2$. Por tanto

$$\mu = \nu, \quad \sigma^2 = 2\nu, \quad M(t) = (1-2t)^{-\nu/2}, \quad \phi(\omega) = (1-2i\omega)^{-\nu/2} \tag{41}$$

Para ν grande ($\nu \geqq 30$) podemos demostrar que $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}$ está casi distribuida normalmente con media 0 y varianza 1.

Las consideraciones anteriores se sintetizan en el teorema siguiente.

Teorema 4-3: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con media 0 y varianza 1. Entonces $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_\nu^2$ tiene distribución chi-cuadrado con ν grados de libertad.

Otros dos teoremas que son útiles en el estudio posterior son:

Teorema 4-4: Sean $U_1, U_2, \ldots, U_k$ variables aleatorias independientes con distribución chi-cuadrado y $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ grados de libertad respectivamente. Entonces su suma $W = U_1 + U_2 + \cdots + U_k$ tiene distribución chi-cuadrado con $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k$ grados de libertad.

Teorema 4-5: Sean V_1 y V_2 variables aleatorias independientes. Si V_1 tiene distribución chi-cuadrado con ν_1 grados de libertad mientras que $V = V_1 + V_2$ tiene distribución chi-cuadrado con ν grados de libertad, donde $\nu > \nu_1$. Entonces V_2 tiene distribución chi-cuadrado con $\nu - \nu_1$ grados de libertad.

En conexión con la distribución chi-cuadrado, la distribución t (más adelante), la distribución F (página 117), y otras, es común en el estudio estadístico emplear el *mismo símbolo* para la variable aleatoria y el valor de esa variable aleatoria. Así, los valores de las percentilas de la distribución chi-cuadrado para ν grados de libertad se denotan por $\chi^2_{p,\nu}$, o simplemente χ^2_p si ν se sobreentiende y no por $x_{p,\nu}$ ó x_p. (Véase Apéndice E). Esta es una notación ambigua y el lector debe emplearla con cuidado, especialmente cuando cambie de variables en las funciones de densidad.

DISTRIBUCION t DE STUDENT

Si una variable aleatoria tiene la función de densidad

$$f(t) \;=\; \frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{\nu}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} \qquad -\infty < t < \infty \tag{42}$$

se dice que tiene la *distribución t de Student*, o simplemente la *distribución t*, con ν grados de libertad. Si ν es grande ($\nu \geqq 30$) la gráfica de $f(t)$ se aproxima estrechamente a la curva de la distribución normal como se indica en la Fig. 4-2 (véase Problema 4.161). Los valores de las percentilas de la distribución t para ν grados de libertad se denotan por $t_{p,\nu}$, o sencillamente t_p si se sobreentiende ν. Para una tabla que da tales valores véase el Apéndice D. Puesto que la distribución es simétrica, $t_{1-p} = -t_p$; por ejemplo $t_{.05} = -t_{.95}$.

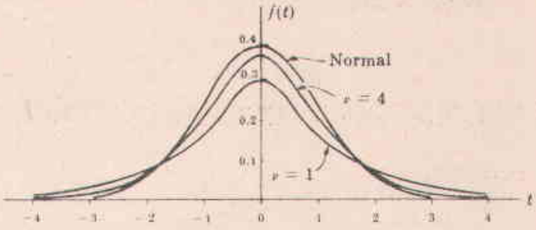


Fig. 4-2

Para la distribución t tenemos

$$\mu = 0 \qquad \text{y} \qquad \sigma^2 = \frac{\nu}{\nu - 2} \quad (\nu > 2) \tag{43}$$

El teorema siguiente es importante en el estudio posterior.

Teorema 4-6: Sean Y y Z variables aleatorias independientes, donde Y está normalmente distribuida con media 0 y varianza 1 mientras que Z tiene distribución chi-cuadrado con ν grados de libertad. Entonces la variable aleatoria

$$T = \frac{Y}{\sqrt{Z/\nu}} \tag{44}$$

tiene la distribución t con ν grados de libertad.

DISTRIBUCION F

Una variable aleatoria tiene *distribución F* (en memoria de R.A. Fisher) *con ν_1 y ν_2 grados de libertad* si su función de densidad está dada por

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_2}{2}\right)} \nu_1^{\nu_1/2}\nu_2^{\nu_2/2}u^{(\nu_1/2)-1}(\nu_2 + \nu_1 u)^{-(\nu_1+\nu_2)/2} & u > 0 \\ 0 & u \leqq 0 \end{cases} \tag{45}$$

Los valores de las percentillas de la distribución F para ν_1, ν_2 grados de libertad se denotan por F_{p,ν_1,ν_2}, o sencillamente por F_p si se sobreentienden ν_1, ν_2. Una tabla que da tales valores en el caso donde $p = 0.95$ y $p = 0.99$ se incluye en el Apéndice F.

La media y la varianza están dadas respectivamente por

$$\mu = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \quad (\nu_2 > 2) \qquad \text{y} \qquad \sigma^2 = \frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 4)(\nu_2 - 2)^2} \quad (\nu_2 > 4) \tag{46}$$

La distribución tiene una moda única en el valor

$$u_{\text{moda}} = \left(\frac{\nu_1 - 2}{\nu_1}\right)\left(\frac{\nu_2}{\nu_2 + 2}\right) \quad (\nu_1 > 2) \tag{47}$$

Los teoremas siguientes son importantes en el estudio posterior.

Teorema 4-7: Sean V_1 y V_2 variables aleatorias independientes con distribución chi-cuadrado y ν_1, ν_2 grados de libertad respectivamente. Entonces la variable aleatoria

$$V = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2} \tag{48}$$

tiene distribución F con ν_1 y ν_2 grados de libertad.

Teorema 4-8:

$$F_{1-p,\nu_2,\nu_1} = 1/F_{p,\nu_1,\nu_2}$$

RELACIONES ENTRE LAS DISTRIBUCIONES CHI-CUADRADO, *t* Y *F*

Teorema 4.9:

$$F_{1-p,1,\nu} = t^2_{1-(p/2),\nu}$$

Teorema 4-10:

$$F_{p,\nu,\infty} = \frac{\chi^2_{p,\nu}}{\nu}$$

DISTRIBUCION NORMAL BIDIMENSIONAL

Una generalización de la distribución normal a dos variables aleatorias continuas X, Y está dada por la función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right] \Big/ 2(1-\rho^2)\right\} \tag{49}$$

donde $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$; μ_1, μ_2 son las medias de X, Y; σ_1, σ_2 son las desviaciones típicas de X, Y; y ρ es el coeficiente de correlación entre X y Y. Con frecuencia nos referimos a (*49*) como la *distribución normal bidimensional.*

Para cualquier distribución conjunta la condición $\rho = 0$ es necesaria para independencia de las variables aleatorias (véase Teorema 3-15). En el caso de (*49*) esta condición también es suficiente (véase Problema 4.51).

DISTRIBUCIONES DIVERSAS

En las distribuciones descritas más adelante, las constantes α, β, a, b, . . . se consideran positivas al menos que se establezca lo contrario. La función característica se obtiene de la función generatriz de momentos, donde se da, remplazando $t = i\omega$.

1. Distribución geométrica.

$$f(x) = P(X=x) = pq^{x-1} \qquad x = 1, 2, \ldots$$

$$\mu = \frac{1}{p} \qquad \sigma^2 = \frac{q}{p^2} \qquad M(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

La variable aleatoria X representa el número de pruebas de Bernoulli hasta, e incluyendo, aquella en que el primer éxito ocurra. Aquí p es la probabilidad de éxito en una sola prueba.

2. Distribución binomial negativa o de Pascal.

$$f(x) = P(X=x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} \qquad x = r, r+1, \ldots$$

$$\mu = \frac{r}{p} \qquad \sigma^2 = \frac{rq}{p^2} \qquad M(t) = \frac{pe^t}{(1-qe^t)^r}$$

La variable aleatoria X representa el número de pruebas de Bernoulli hasta, e incluyendo, aquella en que el r-ésimo éxito ocurra. El caso especial $r = 1$ da la distribución geométrica.

3. Distribución exponencial.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases}$$

$$\mu = \frac{1}{\alpha} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{\alpha^2} \qquad M(t) = \frac{\alpha}{\alpha - t}$$

4. Distribución Weibull.

$$f(x) = \begin{cases} abx^{b-1}\, e^{-ax^b} & x > 0 \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases}$$

$$\mu = a^{-1/b}\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) \qquad \sigma^2 = a^{-2/b}\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{b}\right)\right]$$

5. Distribución Maxwell.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2/\pi}\,\alpha^{3/2}x^2 e^{-\alpha x^2/2} & x > 0 \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases}$$

$$\mu = 2\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \qquad \sigma^2 = \left(3 - \frac{8}{\pi}\right)\alpha^{-1}$$

Problemas resueltos

DISTRIBUCION BINOMIAL

4.1. Hallar la probabilidad de que al lanzar una moneda honrada tres veces resulten (*a*) 3 caras, (*b*) 2 sellos y una cara, (*c*) al menos 1 cara, (*d*) no más de un sello.

Método 1.

Si C denota "cara" y S denota "sello" y designamos CSC, por ejemplo, para significar cara en el primer lanzamiento, sello en el segundo y cara en el tercero.

Puesto que en cada lanzamiento pueden ocurrir 2 posibilidades (cara o sello), hay un total de $(2)(2)(2) = 8$ resultados posibles, es decir puntos muestrales, en el espacio muestral. Estos son

$$CCC,\ CCS,\ CSC,\ CSS,\ SSC,\ SCC,\ SCS,\ SSS$$

Para una moneda honrada a estos resultados se les asignan probabilidades iguales de 1/8. Por tanto

(*a*) $P(3 \text{ caras}) = P(CCC) = \frac{1}{8}$

(*b*) $P(2 \text{ sellos y } 1 \text{ cara}) = P(CSS \cup SSC \cup SCS)$

$$= P(CSS) + P(SSC) + P(SCS) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

(*c*) $P(\text{al menos una cara})$

$= P(1, 2 \text{ ó } 3 \text{ caras})$

$= P(1 \text{ cara}) + P(2 \text{ caras}) + P(3 \text{ caras})$

$= P(CSS \cup SCS \cup SSC) + P(CCS \cup CSC \cup SCC) + P(CCC)$

$= P(CSS) + P(SCS) + P(SSC) + P(CCS) + P(CSC) + P(SCC) + P(CCC) = 7/8$

De otra forma,

$$P(\text{al menos una cara}) = 1 - P(\text{ninguna cara}) = 1 - P(SSS) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

(*d*) $P(\text{no más de un sello}) = P(0 \text{ sellos o } 1 \text{ sello})$

$$= P(0 \text{ sellos}) + P(1 \text{ sello})$$

$$= P(CCC) + P(CCS \cup CSC \cup SCC)$$

$$= P(CCC) + P(CCS) + P(CSC) + P(SCC)$$

$$= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Método 2 (empleando fórmula).

(*a*) $P(3 \text{ caras}) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

(*b*) $P(2 \text{ sellos una cara}) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$

(*c*) $P(\text{al menos } 1 \text{ cara}) = P(1, 2, \text{ ó } 3 \text{ caras})$

$$= P(1 \text{ cara}) + P(2 \text{ caras}) + P(3 \text{ caras})$$

$$= \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{7}{8}$$

De otra forma,

$$P(\text{al menos } 1 \text{ cara}) = 1 - P(\text{ninguna cara})$$

$$= 1 - \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}$$

(*d*) $P(\text{no más de un sello}) = P(0 \text{ sellos o } 1 \text{ sello})$

$$= P(0 \text{ sellos}) + P(1 \text{ sello})$$

$$= \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Debe mencionarse que también puede usarse la notación de las variables aleatorias. Así por ejemplo si seleccionamos que X sea la variable aleatoria que denote el número de caras en los 3 lanzamientos, (*c*) puede escribirse

$$P(\text{al menos una cara}) = P(X \geqq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{7}{8}$$

Usaremos ambos de los enfoques intercambiablemente.

4.2. Hallar la probabilidad de que en cinco lanzamientos de un dado honrado aparezca 3 (*a*) dos veces, (*b*) máximo una vez, (*c*) al menos dos veces.

Sea la variable aleatoria X el número de veces que un 3 aparece en los cinco lanzamientos de un dado honrado. Tenemos

$$\text{Probabilidad de 3 en un solo lanzamiento} = p = \frac{1}{6}$$

$$\text{Probabilidad de no 3 en un solo lanzamiento} = q = 1 - p = \frac{5}{6}$$

(*a*) $P(3 \text{ ocurra } 2 \text{ veces}) = P(X = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{3888}$

(*b*) $P(3 \text{ ocurra máximo una vez}) = P(X \leqq 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$$= \binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$= \frac{3125}{7776} + \frac{3125}{7776} = \frac{3125}{3888}$$

(*c*) $P(3 \text{ ocurra al menos 2 veces})$

$$= P(X \geqq 2)$$

$$= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$= \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^0$$

$$= \frac{625}{3888} + \frac{125}{3888} + \frac{25}{7776} + \frac{1}{7776} = \frac{763}{3888}$$

4.3. Hallar la probabilidad de que en una familia de 4 hijos (*a*) al menos 1 sea niño, (*b*) al menos 1 sea niño y al menos 1 sea niña. Suponer que la probabilidad del nacimiento de un varón es 1/2.

(*a*) $P(1 \text{ niño}) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}, \qquad P(2 \text{ niños}) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

$P(3 \text{ niños}) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4}, \qquad P(4 \text{ niños}) = \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$

Entonces

$$P(\text{al menos 1 niño}) = P(1 \text{ niño}) + P(2 \text{ niños}) + P(3 \text{ niños}) + P(4 \text{ niños})$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

Otro método.

$$P(\text{al menos 1 niño}) = 1 - P(\text{ningún niño}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

(*b*) $P(\text{al menos 1 niño y al menos una niña}) = 1 - P(\text{ningún niño}) - P(\text{ninguna niña})$

$$= 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \frac{7}{8}$$

También podemos resolver este problema si X es una variable aleatoria que denota el número de niños en familias con 4 hijos. Entonces, por ejemplo, (*a*) se convierte en

$$P(X \geqq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \frac{15}{16}$$

4.4. De 2000 familias con 4 niños, ¿cuántas calcula deben tener (*a*) al menos 1 niño, (*b*) 2 niños, (*c*) 1 ó 2 niñas, (*d*) ninguna niña?

Refiriéndonos al Problema 4.3 vemos que

(*a*) Número esperado de familias con al menos 1 niño $= 2000\left(\frac{15}{16}\right) = 1875$

(*b*) Número esperado de familias con 2 niños $2000 \cdot P(2 \text{ niños}) = 2000\left(\frac{3}{8}\right) = 750$

(*c*) $P(1 \text{ ó } 2 \text{ niñas}) = P(1 \text{ niña}) + P(2 \text{ niñas})$

$$= P(1 \text{ niño}) + P(2 \text{ niños}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\text{Número esperado de familias con 1 ó 2 niñas} = (2000)\left(\frac{5}{8}\right) = 1250$$

(*d*) $$\text{Número esperado de familias sin niñas} = (2000)\left(\frac{1}{16}\right) = 125$$

4.5. Si el 20% de los tornillos producidos por una máquina son defectuosos, determinar la probabilidad de que de 4 tornillos escogidos aleatoriamente (*a*) 1, (*b*) 0, (*c*) menos de 2, sean defectuosos.

La probabilidad de un tornillo defectuoso es $p = 0.2$, de un tornillo no defectuoso es $q = 1 - p = 0.8$. Sea la variable aleatoria X el número de tornillos defectuosos. Entonces

(*a*) $$P(X=1) = \binom{4}{1}(0.2)^1(0.8)^3 = 0.4096$$

(*b*) $$P(X=0) = \binom{4}{0}(0.2)^0(0.8)^4 = 0.4096$$

(*c*) $$\begin{aligned} P(X<2) &= P(X=0) + P(X=1) \\ &= 0.4096 + 0.4096 = 0.8192 \end{aligned}$$

4.6. Hallar la probabilidad de obtener un total de 7 al menos una vez en tres lanzamientos de un par de dados honrados.

En un lanzamiento de un par de dados honrados la probabilidad de un 7 es $p = 1/6$ (véase Problema 2.1, página 49), de tal modo que la probabilidad de no 7 en un solo lanzamiento es $q = 1 - p = 5/6$. Entonces

$$P(\text{ningún 7 en 3 lanzamientos}) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

y $$P(\text{al menos un 7 en tres lanzamientos}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

4.7. Hallar la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X que está distribuida binomialmente.

Método 1.

Si X está distribuida binomialmente,

$$f(x) = P(X=x) = \binom{n}{x}p^x q^{n-x}$$

Entonces la función generatriz de momentos está dada por

$$\begin{aligned} M(t) = E(e^{tX}) &= \sum e^{tx} f(x) \\ &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x}(pe^t)^x q^{n-x} \\ &= (q + pe^t)^n \end{aligned}$$

Método 2.

Para una secuencia de n pruebas de Bernoulli definimos

$$X_j = \begin{cases} 0 & \text{si fracaso en la prueba } j\text{-ésima} \\ 1 & \text{si éxito en la prueba } j\text{-ésima} \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Entonces las X_j son independientes y $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Para la función generatriz de momentos tenemos

$$M_j(t) = e^{t0}q + e^{t1}p = q + pe^t \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Entonces por el Teorema 3-9, página 80,

$$M(t) = M_1(t)\,M_2(t)\cdots M_n(t) = (q + pe^t)^n$$

4.8. Demostrar que la media y la varianza de una variable aleatoria distribuida binomialmente son $\mu = np$ y $\sigma^2 = npq$ respectivamente.

Procediendo como en el Método 2 del Problema 4.7 tenemos para $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$E(X_j) = 0q + 1p = p$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X_j) &= E[(X_j - p)^2] = (0-p)^2q + (1-p)^2p \\ &= p^2q + q^2p = pq(p+q) = pq\end{aligned}$$

Entonces
$$\mu = E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = np$$

$$\sigma^2 = \operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}(X_1) + \operatorname{Var}(X_2) + \cdots + \operatorname{Var}(X_n) = npq$$

donde hemos utilizado el Teorema 3-7 para σ^2.

Los resultados anteriores también pueden obtenerse (pero con más dificultad) derivando la función generatriz de momentos (véase Problema 3.38) o directamente de la función de probabilidad (véase Problema 4.152).

4.9. Si la probabilidad de un tornillo defectuoso es 0.1, hallar (*a*) la media y (*b*) la desviación tipificada para el número de tornillos defectuosos de un total de 400 tornillos.

(*a*) Media $\mu = np = (400)(0.1) = 40$, es decir *esperamos* que 40 tornillos estén defectuosos.

(*b*) Varianza $\sigma^2 = npq = (400)(0.1)(0.9) = 36$. Por tanto la desviación tipificada $\sigma = \sqrt{36} = 6$.

LEY DE LOS GRANDES NUMEROS PARA LAS PRUEBAS DE BERNOULLI

4.10. Demostrar el Teorema 4-1, la ley de los grandes números (en forma débil) para las pruebas de Bernoulli.

Por la desigualdad de Chebyshev, página 83, si X es cualquier variable aleatoria con media μ y varianza σ^2 finitas, entonces

$$(1) \qquad P(|X - \mu| \geqq k\sigma) \leqq \frac{1}{k^2}$$

En particular si X tiene distribución binomial o de Bernoulli, entonces $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{npq}$, y (*1*) se convierte en

$$(2) \qquad P(|X - np| \geqq k\sqrt{npq}) \leqq \frac{1}{k^2}$$

ó

$$(3) \qquad P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqq k\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \leqq \frac{1}{k^2}$$

Si hacemos $\epsilon = k\sqrt{\dfrac{pq}{n}}$, (*3*) se convierte en

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqq \epsilon\right) \leqq \frac{pq}{n\epsilon^2}$$

y tomando el límite cuando $n \to \infty$ tenemos, como se requiere,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqq \epsilon\right) = 0$$

El resultado también se deduce directamente en el Teorema 3-19, página 84, con $S_n = X$, $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{npq}$.

4.11. Dar una interpretación de la ley de los grandes números (en forma débil) por la aparición de un 3 en lanzamientos sucesivos de un dado honrado.

La ley de los grandes números establece en este caso que la probabilidad de la proporción de los 3 en n lanzamientos diferiendo de 1/6 por más que cualquier valor $\epsilon > 0$ tiende a cero a medida que $n \to \infty$.

DISTRIBUCION NORMAL

4.12. Hallar el área bajo la curva normal tipificada (*a*) entre $z = 0$ y $z = 1.2$,(*b*) entre $z = -0.68$ y $z = 0$, (*c*) entre $z = -0.46$ y $z = 2.21$, (*d*) entre $z = 0.81$ y $z = 1.94$, (*e*) a la derecha de $z = -1.28$.

(*a*) Utilizando la tabla en el Apéndice C, baje por la columna marcada con z hasta alcanzar el valor 1.2 ~~2.1~~. Luego proceda a la derecha hasta la columna marcada 0. El resultado, 0.3849, es el área pedida y representa la probabilidad de que Z esté entre 0 y 1.2. Por tanto

$$P(0 \leqq Z \leqq 1.2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1.2} e^{-u^2/2}\, du = 0.3849$$

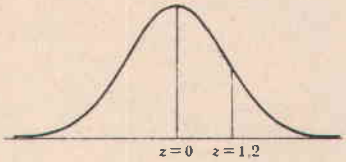


Fig. 4-3

(*b*) Area pedida = área entre $z = 0$ y $z = +0.68$ (por simetría). Por tanto, baje por la columna z hasta alcanzar el valor 0.6. Entonces, proceda a la derecha hasta la columna 8.

El resultado, 0.2517, es el área pedida y representa la probabilidad de que Z esté entre -0.68 y 0. Por tanto

$$P(-0.68 \leqq Z \leqq 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-0.68}^{0} e^{-u^2/2}\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{0.68} e^{-u^2/2}\, du = 0.2517$$

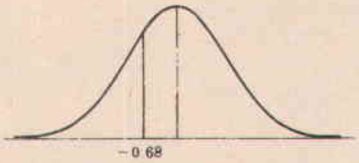


Fig. 4-4

(*c*) Area pedida = (área entre $z = -0.46$ y $z = 0$)
+ (área entre $z = 0$ y $z = 2.21$)
= (área entre $z = 0$ y $z = 0.46$)
+ (área entre $z = 0$ y $z = 2.21$)
= 0.1772 + 0.4864 = 0.6636

El área, 0.6636, representa la probabilidad de que Z esté entre -0.46 y 2.21. Por tanto

$$P(-0.46 \leqq Z \leqq 2.21) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-0.46}^{2.21} e^{-u^2/2}\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-0.46}^{0} e^{-u^2/2}\, du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2.21} e^{-u^2/2}\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{0.46} e^{-u^2/2}\, du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2.21} e^{-u^2/2}\, du = 0.1772 + 0.4864$$

$$= 0.6636$$

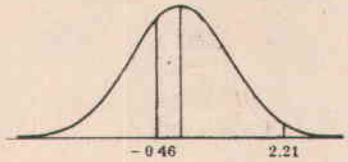


Fig. 4-5

(*d*) Area pedida = (área entre $z = 0$ y $z = 1.94$)
− (área entre $z = 0$ y $z = 0.81$)
= 0.4738 − 0.2910 = 0.1828

Esto es lo mismo que $P(0.81 \leqq Z \leqq 1.94)$.

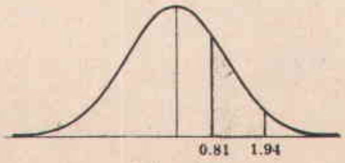


Fig. 4-6

(*e*) Area pedida = (área entre $z = -1.28$ y $z = 0$)

+ (área a la derecha de $z = 0$)

$= 0.3997 + 0.5 = 0.8997$

Esto es lo mismo que $P(Z \geqq -1.28)$.

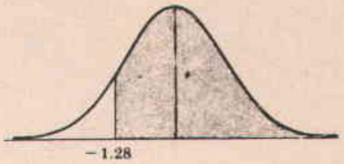


Fig. 4-7

4.13. Si "área" se refiere al área bajo la curva normal tipificada, hallar el valor o los valores de z tales que (*a*) el área entre 0 y z sea 0.3770, (*b*) el área a la izquierda de z sea 0.8621, (*c*) el área entre − 1.5 y z sea 0.0217.

(*a*) En la tabla en el Apéndice C, el valor 0.3770 se encuentra a la derecha de la fila marcada 1.1 y bajo la columna 6. Entonces la z pedida es 1.16.

Por simetría, $z = -1.16$ es otro valor de z. Por tanto $z = \pm 1.16$. El problema es equivalente a resolver para z la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-u^2/2}\,du \quad = \quad 0.3770$$

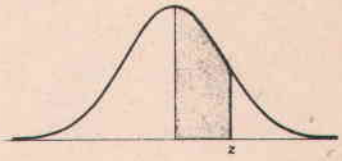


Fig. 4-8

(*b*) Puesto que el área es mayor que 0.5, z debe ser positiva.

Area entre 0 y z es $0.8621 - 0.5 = 0.3621$, de lo cual $z = 1.09$.

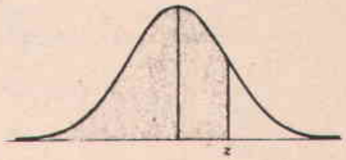


Fig. 4-9

(*c*) Si z fuera positiva el área sería mayor que el área entre −1.5 y 0, que es 0.4332; por tanto z debe ser negativa.

Caso 1: z es negativa pero a la derecha de −1.5.

Area entre −1.5 y z = (área entre −1.5 y 0)

− (área entre 0 y z)

$0.0217 = 0.4332 -$ (área entre 0 y z)

Entonces el área entre 0 y z es $0.4332 - 0.0217 = 0.4115$ de lo cual $z = -1.35$.

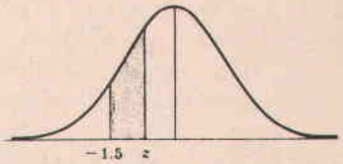


Fig. 4-10

Caso 2: z es negativa pero a la izquierda de −1.5.

Area entre z y -1.5 = (área entre z y 0)

− (área entre −1.5 y 0)

$0.0217 =$ (área entre 0 y z) $- 0.4332$.

Entonces el área entre 0 y z es $0.0217 + 0.4332 = 0.4549$ y $z = -1.694$ utilizando interpolación lineal; o, con menos precisión, $z = -1.69$.

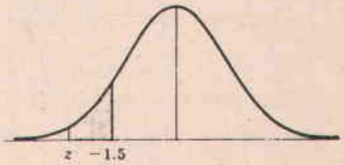


Fig. 4-11

4.14. El peso medio de 500 estudiantes varones de una universidad es de 68.5 kg y la desviación tipificada es de 10 kg. Suponiendo que los pesos están distribuidos normalmente, hallar el número de estudiantes que pesan (*a*) entre 48 y 71 kg, (*b*) más de 91 kg.

(*a*) Los pesos registrados entre 48 y 71 kg pueden realmente tener cualquier valor entre 47.5 y 71.5 kg, suponiendo que se registran al valor de kg más próximo.

47.5 kg en unidades tipificadas = $(47.5 - 68.5)/10$

$= -2.10$

71.5 kg en unidades tipificadas = $(71.5 - 68.5)/10$

$= 0.30$

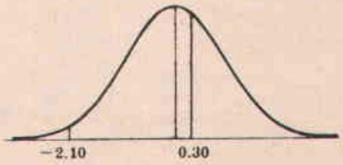


Fig. 4-12

$$\begin{aligned}\text{Proporción pedida de estudiantes} &= (\text{área entre } z = -2.10 \text{ y } z = 0.30)\\ &= (\text{área entre } z = -2.10 \text{ y } z = 0)\\ &\quad + (\text{área entre } z = 0 \text{ y } z = 0.30)\\ &= 0.4821 + 0.1179 = 0.6000\end{aligned}$$

Entonces el número de estudiantes que pesa entre 48 y 71 kg es $500(0.600) = 300$.

(*b*) Los estudiantes que pesan más de 91 kg deben pesar al menos 91.5 kg.

$$91.5 \text{ kg en unidades tipificadas} = (91.5 - 68.5)/10 = 2.30$$

Proporción pedida de estudiantes

$$\begin{aligned}&= (\text{área a la derecha de } z = 2.30)\\ &= (\text{área a la derecha de } z = 0)\\ &\quad - (\text{área entre } z = 0 \text{ y } z = 2.300)\\ &= 0.5 - 0.4893 = 0.0107\end{aligned}$$

Entonces el número de estudiantes que pesa más de 91 kg es $500(0.0107) = 5$.

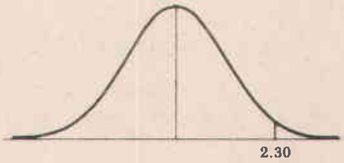


Fig. 4-13

Si W denota el peso de un estudiante escogido aleatoriamente, podemos resumir los resultados anteriores en términos de la probabilidad al escribir

$$P(47.5 \leqq W \leqq 71.5) = 0.600 \qquad P(W \geqq 91) = 0.0107$$

4.15. La media del diámetro interior de una muestra de 200 lavadoras producidas por una máquina es 1.275 cm y la desviación típica es 0.0125 cm. El propósito para el cual se han diseñado las lavadoras permite una tolerancia máxima en el diámetro de 1.26 a 1.29 cm, de otra forma las lavadoras se consideran defectuosas. Determinar el porcentaje de lavadoras defectuosas producidas por la máquina, suponiendo que los diámetros están distribuidos normalmente.

$$1.26 \text{ en unidades tipificadas} = (1.26 - 1.275)/0.0125 = -1.2$$

$$1.29 \text{ en unidades tipificadas} = (1.29 - 1.275)/0.0125 = 1.2$$

Proporción de lavadoras no defectuosas

$$\begin{aligned}&= (\text{área bajo la curva normal entre } z = -1.2 \text{ y } z = 1.2)\\ &= (\text{dos veces el área entre } z = 0 \text{ y } z = 1.2)\\ &= 2(0.3849) = 0.7698 \quad \text{ó} \quad 77\%\end{aligned}$$

Por tanto el porcentaje de lavadoras defectuosas es $100\% - 77\% = 23\%$.

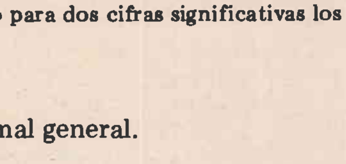


Fig. 4-14

Obsérvese que si consideramos el intervalo 1.26 a 1.29 cm como representando realmente los diámetros desde 1.255 a 1.295 cm, el resultado anterior se modifica ligeramente. Sin embargo para dos cifras significativas los resultados son iguales.

4.16. Hallar la función generatriz de momentos para la distribución normal general.

Tenemos

$$M(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\, dx$$

Remplazando $(x - \mu)/\sigma = v$ en la integral de modo que $x = \mu + \sigma v$, $dx = \sigma\, dv$, tenemos

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu t + \sigma v t - (v^2/2)}\, dv = \frac{e^{\mu t + (\sigma^2 t^2/2)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(v-\sigma t)^2}\, dv$$

Entonces sustituyendo $v - \sigma t = w$ hallamos que

$$M(t) \quad = \quad e^{\mu t + (\sigma^2 t^2/2)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2/2}\, dw \right) \quad = \quad e^{\mu t + (\sigma^2 t^2/2)}$$

APROXIMACION NORMAL A LA DISTRIBUCION BINOMIAL

4.17. Hallar la probabilidad de obtener entre 3 y 6 caras inclusive en 10 lanzamientos de una moneda honrada utilizando (*a*) la distribución binomial, (*b*) la aproximación normal a la distribución binomial.

(*a*) Sea X la variable aleatoria que da el número de caras en 10 lanzamientos. Entonces

$$P(X=3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{15}{128} \qquad P(X=4) = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{105}{512}$$

$$P(X=5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{63}{256} \qquad P(X=6) = \binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{105}{512}$$

Entonces la probabilidad pedida es

$$P(3 \leqq X \leqq 6) \quad = \quad \frac{15}{128} + \frac{105}{512} + \frac{63}{256} + \frac{105}{512} \quad = \quad \frac{99}{128} \quad = \quad 0.7734$$

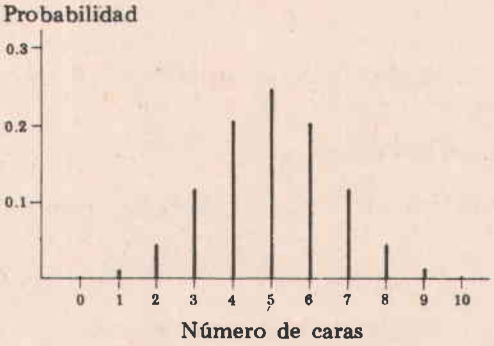


Fig. 4-15

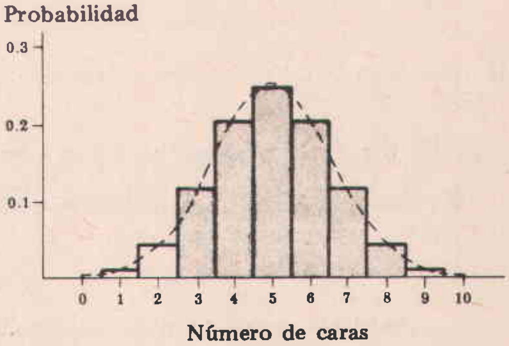


Fig. 4-16

(*b*) La distribución de probabilidad para el número de caras en 10 lanzamientos de la moneda se presentan gráficamente en las Figuras 4-15 y 4-16, en la Fig. 4-16 trata los datos como si fueran continuos. La probabilidad pedida es la suma de las áreas de los rectángulos sombreados en la Fig. 4-16 y puede aproximarse por el área bajo la correspondiente curva normal, mostrada a trazos. Considerando los datos como continuos, se deduce que 3 a 6 caras pueden considerarse como 2.5 a 6.5 caras. También, la media y la varianza para la distribución binomial están dadas por $\mu = np = 10(\frac{1}{2}) = 5$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(10)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = 1.58$. Entonces

$$2.5 \text{ en unidades tipificadas} = (2.5 - 5)/1.58 = -1.58$$

$$6.5 \text{ en unidades tipificadas} = (6.5 - 5)/1.58 = 0.95$$

Probabilidad pedida

$= (\text{área entre } z = -1.58 \text{ y } z = 0.95)$

$= (\text{área entre } z = -1.58 \text{ y } z = 0)$
$\quad + (\text{área entre } z = 0 \text{ y } z = 0.95)$

$= 0.4429 + 0.3289 = 0.7718$

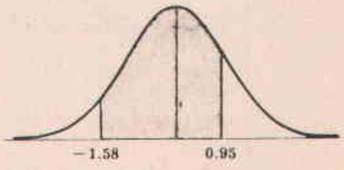


Fig. 4-17

que se compara muy bien con el valor verdadero de 0.7734 obtenido en la parte (*a*). La precisión es aún mejor para valores superiores de *n*.

4.18. Una moneda honrada se lanza 500 veces. Hallar la probabilidad de que el número de caras no difiera de 250 por (*a*) más de 10, (*b*) por más de 30.

$$\mu = np = (500)\left(\frac{1}{2}\right) = 250 \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(500)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = 11.18$$

(*a*) Necesitamos la probabilidad de que el número de caras se encuentre entre 240 y 260, o si consideramos los datos como continuos, entre 239.5 y 260.5.

239.5 en unidades tipificadas = $(239.5 - 250)/11.18 = -0.94$ 260.5 en unidades tipificadas = 0.94

Probabilidad pedida = (área bajo la curva normal entre $z = -0.94$ y $z = 0.94$)

= (dos veces el área entre $z = 0$ y $z = 0.94$) = $2(0.3264) = 0.6528$

(*b*) Necesitamos la probabilidad de que el número de caras se encuentre entre 220 y 280, o si consideramos los datos como continuos, entre 219.5 y 280.5.

219.5 en unidades tipificadas = $(219.5 - 250)/11.18 = -2.73$ 280.5 en unidades tipificadas = 2.73

Probabilidad pedida = (dos veces el área bajo la curva normal entre $z = 0$ y $z = 2.73$)

= $2(0.4968) = 0.9936$

Se deduce que podemos estar muy confiados de que el número de caras no diferirá del esperado (250) por más de 30. Así si resulta que el número *real* de caras es 280, podríamos considerar que la moneda no es honrada, es decir estaba *cargada*.

4.19. Un dado se lanza 120 veces. Hallar la probabilidad de que resulte 4 (*a*) 18 veces o menos y (*b*) 14 veces o menos, suponiendo que el dado es honrado.

La probabilidad de que resulte un 4 es $p = 1/6$ y de que no resulte es $q = 5/6$.

(*a*) Deseamos la probabilidad del número de 4 entre 0 y 18. Esta se encuentra exactamente por

$$\binom{120}{18}\left(\frac{1}{6}\right)^{18}\left(\frac{5}{6}\right)^{102} + \binom{120}{17}\left(\frac{1}{6}\right)^{17}\left(\frac{5}{6}\right)^{103} + \cdots + \binom{120}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{120}$$

pero debido a que el trabajo involucrado en la computación es excesivo, empleamos la aproximación normal.

Considerando los datos como continuos que 0 a 18 cuatros pueden tratarse como -0.5 a 18.5 cuatros. También

$$\mu = np = 120\left(\frac{1}{6}\right) = 20 \qquad \text{y} \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(120)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)} = 4.08$$

Entonces

-0.5 en unidades tipificadas = $(-0.5 - 20)/4.08 = -5.02$ 18.5 en unidades tipificadas = -0.37

Probabilidad pedida = (área bajo la curva normal entre $z = -5.02$ y $z = -0.37$)

= (área entre $z = 0$ y $z = -5.02$)

$-$(área entre $z = 0$ y $z = -0.37$)

= $0.5 - 0.1443 = 0.3557$

(*b*) Procedemos como en la parte (*a*), remplazando 18 por 14. Entonces

-0.5 en unidades tipificadas = -5.02 14.5 en unidades tipificadas = $(14.5 - 20)/4.08 = -1.35$

Probabilidad pedida = (área bajo la curva normal entre $z = -5.02$ y $z = -1.35$)

= (área entre $z = 0$ y $z = -5.02$)

$-$ (área entre $z = 0$ y $z = -1.35$)

= $0.5 - 0.4115 = 0.0885$

Se deduce que si fuéramos a tomar muestras repetidas de 120 lanzamientos de un dado, un 4 debe aparecer 14 veces o menos en aproximadamente la décima parte de estas muestras.

DISTRIBUCION DE POISSON

4.20. Establecer la validez de la aproximación de Poisson a la distribución binomial.

Si X está distribuida binomialmente, entonces

(1) $$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

donde $E(X) = np$. Hágase $\lambda = np$ de modo que $p = \lambda/n$. Entonces (1) se convierte en

$$P(X = x) = \binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{x!\,n^x}\lambda^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!}\lambda^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

Entonces cuando $n \to \infty$,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right) \longrightarrow 1$$

en tanto que

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \longrightarrow (e^{-\lambda})(1) = e^{-\lambda}$$

empleando el resultado conocido del cálculo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{u}{n}\right)^n = e^u$$

Se deduce que cuando $n \to \infty$ pero λ permanece fijo (es decir $p \to 0$)

(2) $$P(X = x) \longrightarrow \frac{\lambda^x c^{-\lambda}}{x!}$$

que es la distribución de Poisson.

Otro método.

La función generatriz de momentos para la distribución binomial es

(3) $$(q + pe^t)^n = (1 - p + pe^t)^n = [1 + p(e^t - 1)]^n$$

Si $\lambda = np$ de modo que $p = \lambda/n$, esto se convierte en

(4) $$\left[1 + \frac{\lambda(e^t - 1)}{n}\right]^n$$

A medida que $n \to \infty$ esto tiende a

(5) $$e^{\lambda(e^t-1)}$$

que es la función generatriz de momentos de la distribución de Poisson. El resultado pedido entonces se deduce utilizando el Teorema 3-10, página 80.

4.21. Verificar que la función límite (2) del Problema 4.20 realmente es una función de probabilidad.

Primero, observamos que $P(X = x) > 0$ para $x = 0, 1, \ldots,$ dado que $\lambda > 0$. Segundo, tenemos

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$$

y se completa la verificación.

4.22. Diez por ciento de las herramientas producidas en un proceso de fabricación determinado resultan defectuosas. Hallar la probabilidad de que en una muestra de 10 herramientas seleccionadas aleatoriamente, exactamente 2 estén defectuosas, empleando (*a*) la distribución binomial, (*b*) la aproximación de Poisson a la distribución binomial.

(*a*) La probabilidad de una herramienta defectuosa es $p = 0.1$. Denótese por X el número de herramientas defectuosas de las 10 escogidas. Entonces de acuerdo con la distribución binomial

$$P(X=2) \quad = \quad \binom{10}{2}(0.1)^2(0.9)^8 \quad = \quad 0.1937 \text{ ó } 0.19$$

(*b*) Tenemos $\lambda = np = (10)(0.1) = 1$. Entonces de acuerdo con la distribución de Poisson

$$P(X=x) \quad = \quad \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad \text{ó} \qquad P(X=2) \quad = \quad \frac{(1)^2 e^{-1}}{2!} \quad = \quad 0.1839 \text{ ó } 0.18$$

En general la aproximación es buena si $p \leqq 0.1$ y $\lambda = np \leqq 5$.

4.23. Si la probabilidad de que un individuo sufra una reacción por una inyección de un determinado suero, es 0.001, determinar la probabilidad de que de un total de 2000 individuos (*a*) exactamente 3, (*b*) más de 2 individuos tengan reacción.

Denótese por X el número de individuos que sufren una reacción. X tiene una distribución de Bernoulli, pero ya que las reacciones se suponen sucesos raros, podemos suponer que X tiene una distribución de Poisson, es decir

$$P(X=x) \quad = \quad \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad \text{donde} \quad \lambda = np = (2000)(0.001) = 2$$

(*a*)

$$P(X=3) \quad = \quad \frac{2^3 e^{-2}}{3!} \quad = \quad 0.180$$

(*b*)

$$\begin{aligned} P(X>2) \quad &= \quad 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] \\ &= \quad 1 - \left[\frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 e^{-2}}{2!}\right] \\ &= \quad 1 - 5e^{-2} \quad = \quad 0.323 \end{aligned}$$

Una evaluación exacta de las probabilidades empleando la distribución binomial requeriría mucho más trabajo.

TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL

4.24. Verificar el teorema del límite central para una variable aleatoria X que está distribuida binomialmente y así establecer la validez de la aproximación normal a la distribución binomial.

La variable tipificada para X es $X^* = (X - np)/\sqrt{npq}$ y la función generatriz de momentos para X^* es

$$\begin{aligned} E(e^{tX^*}) \quad &= \quad E(e^{t(X-np)/\sqrt{npq}}) \\ &= \quad e^{-tnp/\sqrt{npq}} E(e^{tX/\sqrt{npq}}) \\ &= \quad e^{-tnp/\sqrt{npq}} \sum_{x=0}^{n} e^{tx/\sqrt{npq}} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ &= \quad e^{-tnp/\sqrt{npq}} \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^{t/\sqrt{npq}})^x q^{n-x} \\ &= \quad e^{-tnp/\sqrt{npq}} (q + pe^{t/\sqrt{npq}})^n \\ &= \quad [e^{-tp/\sqrt{npq}} (q + pe^{t/\sqrt{npq}})]^n \\ &= \quad (qe^{-tp/\sqrt{npq}} + pe^{tq/\sqrt{npq}})^n \end{aligned}$$

Entonces empleando la expansión

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots$$

hallamos

$$\begin{aligned} qe^{-tp/\sqrt{npq}} + pe^{tq/\sqrt{npq}} &= q\left(1 - \frac{tp}{\sqrt{npq}} + \frac{t^2p^2}{2npq} + \cdots\right) \\ &\quad + p\left(1 + \frac{tq}{\sqrt{npq}} + \frac{t^2q^2}{2npq} + \cdots\right) \\ &= q + p + \frac{pq(p+q)t^2}{2npq} + \cdots \\ &= 1 + \frac{t^2}{2n} + \cdots \end{aligned}$$

Por tanto

$$E(e^{tX^*}) = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \cdots\right)^n$$

Pero a medida que $n \to \infty$ el lado a la derecha tiende a $e^{t^2/2}$, que es la función generatriz de momentos para la distribución normal tipificada. Así el resultado pedido se sigue por el Teorema 3-10, página 80.

4.25. Demostrar el teorema del límite central (Teorema 4-2, página 112).

Para $n = 1, 2, \ldots$ tenemos $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Entonces $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tienen media μ y varianza σ^2. Por tanto

$$E(S_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = n\mu$$

y, debido a que las X_k son independientes,

$$\operatorname{Var}(S_n) = \operatorname{Var}(X_1) + \operatorname{Var}(X_2) + \cdots + \operatorname{Var}(X_n) = n\sigma^2$$

Se deduce que la variable aleatoria tipificada correspondiente a S_n es

$$S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

La función generatriz de momentos para S_n^* es

$$\begin{aligned} E(e^{tS_n^*}) &= E[e^{t(S_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n}}] \\ &= E[e^{t(X_1-\mu)/\sigma\sqrt{n}}\, e^{t(X_2-\mu)/\sigma\sqrt{n}} \cdots e^{t(X_n-\mu)/\sigma\sqrt{n}}] \\ &= E[e^{t(X_1-\mu)/\sigma\sqrt{n}}] \cdot E[e^{t(X_2-\mu)/\sigma\sqrt{n}}] \cdots E[e^{t(X_n-\mu)/\sigma\sqrt{n}}] \\ &= \{E[e^{t(X_1-\mu)/\sigma\sqrt{n}}]\}^n \end{aligned}$$

donde, en los dos últimos pasos, hemos utilizado respectivamente los hechos de que las X_k son independientes y que están distribuidas idénticamente. Entonces, por una expansión en serie de Taylor,

$$\begin{aligned} E[e^{t(X_1-\mu)/\sigma\sqrt{n}}] &= E\left[1 + \frac{t(X_1-\mu)}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{t^2(X_1-\mu)^2}{2\sigma^2 n} + \cdots\right] \\ &= E(1) + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}E(X_1-\mu) + \frac{t^2}{2\sigma^2 n}E[(X_1-\mu)^2] + \cdots \\ &= 1 + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(0) + \frac{t^2}{2\sigma^2 n}(\sigma^2) + \cdots = 1 + \frac{t^2}{2n} + \cdots \end{aligned}$$

de modo que

$$E(e^{tS_n^*}) = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \cdots\right)^n$$

Pero el límite de esta expresión a medida que $n \to \infty$ es $e^{t^2/2}$, que es la función generatriz de momentos de la función normal tipificada. Por tanto, por el Teorema 3-10, página 80, se sigue el resultado pedido.

DISTRIBUCION MULTINOMIAL

4.26. Una caja contiene 5 bolas rojas, 4 blancas y 3 azules. Una bola se selecciona aleatoriamente de la caja, se observa su color y luego se remplaza. Hallar la probabilidad de que de 6 bolas seleccionadas de esta forma 3 sean rojas, 2 blancas y 1 azul.

Método 1 (por fórmula).

$$P(\text{roja en cualquier extracción}) = \frac{5}{12} \qquad P(\text{blanca en cualquier extracción}) = \frac{4}{12}$$

$$P(\text{azul en cualquier extracción}) = \frac{3}{12}$$

Entonces $$P(3 \text{ rojas, } 2 \text{ blancas, } 1 \text{ azul}) = \frac{6!}{3!\,2!\,1!}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{4}{12}\right)^2\left(\frac{3}{12}\right)^1 = \frac{625}{5184}$$

Método 2.

La probabilidad de escoger cualquier bola roja es 5/12. Entonces la probabilidad de escoger 3 bolas rojas es $(5/12)^3$. En forma análoga la probabilidad de escoger 2 bolas blancas es $(4/12)^2$ y la de escoger 1 bola azul es $(3/12)^1$. Por tanto la probabilidad de escoger 3 bolas rojas, 2 blancas y 1 azul en ese orden es

$$\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{4}{12}\right)^2\left(\frac{3}{12}\right)^1$$

Pero la misma selección puede realizarse en otros órdenes diferentes, y el número de estas formas diferentes es

$$\frac{6!}{3!\,2!\,1!}$$

como se expuso en el Capítulo 1. Entonces la probabilidad pedida es

$$\frac{6!}{3!\,2!\,1!}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{4}{12}\right)^2\left(\frac{3}{12}\right)^1$$

Método 3.

La probabilidad pedida es el término $P_r^3 P_b^2 P_a$ en la expansión multinomial de $(p_r + p_b + p_a)^6$ donde $p_r = 5/12$, $p_b = 4/12$, $p_a = 3/12$. Por expansión se obtiene el resultado anterior.

DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA

4.27. Una caja contiene 6 bolas blancas y 4 rojas. Se realiza un experimento en el cual se selecciona una bola aleatoriamente y se observa su color, pero no se remplaza la bola. Hallar la probabilidad de que después de 5 pruebas del experimento se hayan escogido 3 bolas blancas.

Método 1.

El número de formas diferentes de seleccionar 3 bolas blancas de 6 blancas es $\binom{6}{3}$. El número de formas diferentes de seleccionar las 2 bolas restantes de las 4 rojas es $\binom{4}{2}$. Por tanto el número de muestras diferentes que contienen 3 bolas blancas y 2 rojas es $\binom{6}{3}\binom{4}{2}$.

Entonces el número total de formas diferentes de seleccionar 5 bolas de 10 bolas $(6 + 4)$ en la caja es $\binom{10}{5}$.

Por tanto la probabilidad pedida está dada por

$$\frac{\binom{6}{3}\binom{4}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{10}{21}$$

Método 2 (empleando la fórmula).

Tenemos $b = 6$, $r = 4$, $n = 5$, $x = 3$. Entonces por (*19*), página 113, la probabilidad pedida es

$$P(X = 3) \quad = \quad \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{2}}{\binom{10}{5}}$$

DISTRIBUCION UNIFORME

4.28. Demostrar que la media y la varianza de la distribución uniforme (página 114) están dadas respectivamente por (*a*) $\mu = 1/2\,(a + b)$, (*b*) $\sigma^2 = 1/12\,(b - a)^2$.

(*a*)
$$\mu \quad = \quad E(X) \quad = \quad \int_a^b \frac{x\,dx}{b-a} \quad = \quad \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b \quad = \quad \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \quad = \quad \frac{a+b}{2}$$

(*b*) Tenemos
$$E(X^2) \quad = \quad \int_a^b \frac{x^2\,dx}{b-a} \quad = \quad \left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right|_a^b \quad = \quad \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} \quad = \quad \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

Entonces la varianza está dada por

$$\begin{aligned} \sigma^2 \quad &= \quad E[(X - \mu)^2] \quad = \quad E(X^2) \; - \; \mu^2 \\ &= \quad \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \; - \; \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad = \quad \frac{1}{12}(b - a)^2 \end{aligned}$$

DISTRIBUCION DE CAUCHY

4.29. Demostrar que (*a*) la función generatriz de momentos para una variable aleatoria X con distribución de Cauchy no existe pero que (*b*) la función característica sí existe.

(*a*) La función generatriz de momentos de X es

$$E(e^{tX}) \quad = \quad \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx}}{x^2 + a^2}\,dx$$

la cual no existe si t es real. Esto puede verse al notar por ejemplo que si $x \geqq 0$, $t > 0$

$$e^{tx} \quad = \quad 1 \; + \; tx \; + \; \frac{t^2x^2}{2!} \; + \; \cdots \quad > \quad \frac{t^2x^2}{2}$$

de modo que

$$\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx}}{x^2 + a^2}\,dx \quad \geqq \quad \frac{at^2}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + a^2}\,dx$$

y la integral a la derecha diverge.

(*b*) La función característica de X es

$$\begin{aligned} E(e^{i\omega X}) \quad &= \quad \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + a^2}\,dx \\ &= \quad \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x}{x^2 + a^2}\,dx \; + \; \frac{ai}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega x}{x^2 + a^2}\,dx \\ &= \quad \frac{2a}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{x^2 + a^2}\,dx \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho de que los integrandos en el segundo renglón son funciones par e impar respectivamente. Puede demostrarse que la última integral existe y es igual a $e^{-a\omega}$ (véase Problema 4.159).

4.30. Sea Θ una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$. Demostrar que $X = a \tan \Theta$, $a > 0$, tiene una distribución Cauchy en $-\infty < x < \infty$.

La función de densidad de Θ es

$$f(\theta) \;=\; \frac{1}{\pi} \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

Considerando la transformación $x = a \tan \theta$ tenemos

$$\theta = \tan^{-1}\frac{x}{a} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\theta}{dx} = \frac{a}{x^2 + a^2} > 0$$

Entonces por el Teorema 2-3, página 46, la función de densidad de X está dada por

$$g(x) = f(\theta)\left|\frac{d\theta}{dx}\right| = \frac{1}{\pi}\frac{a}{x^2 + a^2}$$

que es la distribución de Cauchy.

DISTRIBUCION GAMMA

4.31. Demostrar que la media y la varianza de la distribución gamma están dadas por (*a*) $\mu = \alpha\beta$, (*b*) $\sigma^2 = \alpha\beta^2$.

(*a*)
$$\mu = \int_0^\infty x\left[\frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}\right]dx = \int_0^\infty \frac{x^\alpha e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\,dx$$

Remplazando $x/\beta = t$ tenemos

$$\mu = \frac{\beta^\alpha\beta}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}\,dt = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+1) = \alpha\beta$$

(*b*)
$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\left[\frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\right]dx = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1}e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\,dx$$

Remplazando $x/\beta = t$ tenemos

$$E(X^2) = \frac{\beta^{\alpha+1}\beta}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha+1}e^{-t}\,dt$$

$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+2) = \beta^2(\alpha+1)\alpha$$

ya que $\Gamma(\alpha+2) = (\alpha+1)\Gamma(\alpha+1) = (\alpha+1)\alpha\,\Gamma(\alpha)$. Por tanto

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \beta^2(\alpha+1)\alpha - (\alpha\beta)^2 = \alpha\beta^2$$

DISTRIBUCION BETA

4.32. Hallar la media de la distribución beta.

$$\mu = E(X) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 x[x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}]\,dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 x^\alpha(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,\frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

4.33. Hallar la varianza de la distribución beta.

El segundo momento alrededor del origen es

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 x^2[x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}]\,dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+2+\beta)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,\frac{(\alpha+1)\alpha\,\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}.$$

Entonces, utilizando el Problema 4.32, la varianza es

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

DISTRIBUCION CHI-CUADRADO

4.34. Demostrar que la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X con distribución chi-cuadrado con ν grados de libertad es $M(t) = (1-2t)^{-\nu/2}$.

$$\begin{aligned} M(t) &= E(e^{tX}) = \frac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)} \int_0^\infty e^{tx} x^{(\nu-2)/2} e^{-x/2}\,dx \\ &= \frac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)} \int_0^\infty x^{(\nu-2)/2} e^{-(1-2t)x/2}\,dx \end{aligned}$$

Al remplazar $(1-2t)x/2 = u$ en la última integral hallamos

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)} \int_0^\infty \left(\frac{2u}{1-2t}\right)^{(\nu-2)/2} e^{-u} \frac{2\,du}{1-2t} \\ &= \frac{(1-2t)^{-\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)} \int_0^\infty u^{(\nu/2)-1} e^{-u}\,du = (1-2t)^{-\nu/2} \end{aligned}$$

4.35. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con distribución chi-cuadrado y ν_1, ν_2 grados de libertad respectivamente. (*a*) Demostrar que la función generatriz de momentos de $Z = X_1 + X_2$ es $(1-2t)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}$ y así (*b*) demostrar que Z tiene distribución chi-cuadrado con $\nu_1 + \nu_2$ grados de libertad.

(*a*) La función generatriz de momentos de $Z = X_1 + X_2$ es

$$M(t) = E[e^{t(X_1+X_2)}] = E(e^{tX_1})\,E(e^{tX_2}) = (1-2t)^{-\nu_1/2}(1-2t)^{-\nu_2/2} = (1-2t)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}$$

utilizando el Problema 4.34.

(*b*) Se observa del Problema 4.34 que una distribución cuya función generatriz de momentos es $(1-2t)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}$ es la distribución chi-cuadrado con $\nu_1 + \nu_2$ grados de libertad. Esta debe ser la distribución de Z, por el Teorema 3-13, página 81.

Al generalizar los resultados anteriores obtenemos una demostración del Teorema 4-4, página 116.

4.36. Sea X una variable aleatoria distribuida normalmente con media 0 y varianza 1. Demostrar que X^2 tiene distribución chi-cuadrado con 1 grado de libertad.

Deseamos hallar la distribución de $Y = X^2$ dada una distribución normal para X. Puesto que la correspondencia entre X y Y no es uno a uno no podemos aplicar el Teorema 2-3 como está, pero procedemos de la manera siguiente.

Para $y < 0$ es lógico que $P(Y \leqq y) = 0$. Para $y \geqq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} P(Y \leqq y) &= P(X^2 \leqq y) = P(-\sqrt{y} \leqq X \leqq +\sqrt{y}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}} e^{-x^2/2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\sqrt{y}} e^{-x^2/2}\,dx \end{aligned}$$

donde en el último renglón se utiliza el hecho de que la función de densidad normal tipificada es cero. Efectuando el cambio de variable $x = +\sqrt{t}$ en la última integral, obtenemos

$$P(Y \leqq y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y t^{-1/2} e^{-t/2}\,dt$$

Pero esta es una distribución chi-cuadrado con 1 grado de libertad, como se ve al colocar $\nu = 1$ en (*39*), página 116, y utilizar el hecho de que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

4.37. Demostrar el Teorema 4-3, página 116, para $\nu = 2$.

Por el Problema 4.36 vemos que si X_1 y X_2 están distribuidas normalmente con media 0 y varianza 1, entonces X_1^2 y X_2^2 tienen distribución chi-cuadrado con 1 grado de libertad cada una. Entonces del Problema 4.35(*b*), vemos que $Z = X_1^2 + X_2^2$ tiene distribución chi-cuadrado con $1 + 1 = 2$ grados de libertad si X_1 y X_2 son independientes. El resultado general para todos los enteros positivos ν se deduce en la misma manera. Véase Problema 4.150.

4.38. La representación gráfica de la distribución chi-cuadrado con 5 grados de libertad se muestra en la Fig. 4-18. (Véase las consideraciones sobre notación en la página 116). Hallar los valores de χ_1^2, χ_2^2 por los cuales

(*a*) el área sombreada a la derecha = 0.05,

(*b*) el área total sombreada = 0.05,

(*c*) el área sombreada a la izquierda = 0.10,

(*d*) el área sombreada a la derecha = 0.01.

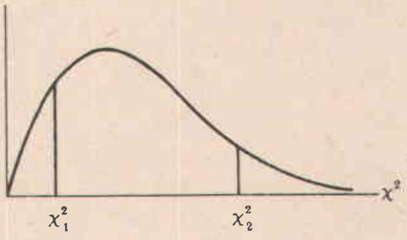


Fig. 4-18

(*a*) Si el área sombreada a la derecha es 0.05, entonces el área a la izquierda de χ_2^2 es $(1 - 0.05) = 0.95$ y χ_2^2 representa la nonagésima quinta percentila, $\chi_{.95}^2$.

Refiriéndose a la tabla en el Apéndice E, en la columna ν, búsquese el valor 5. Entonces procédase hacia la derecha hasta la columna $\chi_{.95}^2$. El resultado 11.1 es el valor pedido de χ^2.

(*b*) Puesto que la distribución no es simétrica, hay muchos valores para los cuales el área total sombreada = 0.05. Por ejemplo, el área sombreada a la derecha puede ser 0.04 en tanto que el área a la izquierda es 0.01. Sin embargo, se acostumbra, al menos se especifique lo contrario, escoger las dos áreas iguales. Entonces, en este caso cada área = 0.025.

Si el área sombreada a la derecha es 0.025, el área sombreada a la izquierda de χ_2^2 es $1 - 0.025 = 0.975$ y χ_2^2 representa la percentila 97.5, $\chi_{.975}^2$, la cual del Apéndice E es 12.8.

Análogamente, si el área sombreada a la izquierda es 0.025, el área a la izquierda de χ_1^2 es 0.025 y χ_1^2 representa la percentila 2.5, $\chi_{.025}^2$, la cual es igual a 0.831.

Por tanto los valores son 0.831 y 12.8.

(*c*) Si el área sombreada a la izquierda es 0.10, χ_1^2 representa la décima percentila, $\chi_{.10}^2$, la cual es igual a 1.61.

(*d*) Si el área sombreada a la derecha es 0.01, el área a la izquierda de χ_2^2 es 0.99 y χ_2^2 representa la percentila 99, $\chi_{.99}^2$, la cual es igual a 15.1.

4.39. Hallar los valores de χ^2 para los cuales el área de la cola a la derecha de la distribución χ^2 es 0.05, si el número de grados de libertad ν es igual a (*a*) 15, (*b*) 21, (*c*) 50.

Utilizando la tabla en el Apéndice E hallamos en la columna $\chi_{.95}^2$ los valores: (*a*) 25.0 correspondiente a $\nu = 15$; (*b*) 32.7 correspondiente a $\nu = 21$; (*c*) 67.5 correspondiente a $\nu = 50$.

4.40. Hallar el valor de la mediana de χ^2 que corresponde a (*a*) 9, (*b*) 28 y (*c*) 40 grados de libertad.

Utilizando la tabla en el Apéndice E, hallamos en la columna $\chi_{.50}^2$ (puesto que la mediana es la percentila 50) los valores: (*a*) 8.34 correspondiente a $\nu = 9$; (*b*) 27.3 correspondiente a $\nu = 28$; (*c*) 39.3 correspondiente a $\nu = 40$.

Es de interés notar que los valores de la mediana están muy próximos al número de los grados de libertad. En efecto, para $\nu > 10$ los valores de la mediana son iguales a $\nu - 0.7$, como puede observarse de la tabla.

4.41. Hallar $\chi^2_{.95}$ para (*a*) $\nu = 50$ y (*b*) $\nu = 100$ grados de libertad.

Para ν mayor que 30, podemos utilizar el hecho de que $(\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1})$ está casi distribuido normalmente con media cero y varianza uno. Entonces si z_p es la percentila $100p$ de la distribución normal tipificada, podemos escribir, con un alto grado de aproximación,

$$\sqrt{2\chi^2_p} - \sqrt{2\nu - 1} = z_p \qquad \text{ó} \qquad \sqrt{2\chi^2_p} = z_p + \sqrt{2\nu - 1}$$

de donde

$$\chi^2_p = \tfrac{1}{2}(z_p + \sqrt{2\nu - 1})^2$$

(*a*) Si $\nu = 50$, $\chi^2_{.95} = \frac{1}{2}(z_{.95} + \sqrt{2(50) - 1})^2 = \frac{1}{2}(1.64 + \sqrt{99})^2 = 69.2$, lo cual está de acuerdo con el valor 67.5 dado en el Apéndice E.

(*b*) Si $\nu = 100$, $\chi^2_{.95} = \frac{1}{2}(z_{.95} + \sqrt{2(100) - 1})^2 = \frac{1}{2}(1.64 + \sqrt{199})^2 = 124.0$ (valor real $= 124.3$).

DISTRIBUCION *t* DE STUDENT

4.42. Demostrar el Teorema 4-6, página 117.

Puesto que Y está distribuida normalmente con media 0 y varianza 1 su función de densidad es

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

Puesto que Z tiene distribución chi-cuadrado con ν grados de libertad su función de densidad es

$$(2) \qquad \frac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)} z^{(\nu/2)-1} e^{-z/2} \qquad z > 0$$

Debido a que Y y Z son independientes su función de densidad conjunta es el producto de (*1*) y (*2*), es decir

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)} z^{(\nu/2)-1} e^{-(y^2+z)/2}$$

para $-\infty < y < +\infty$, $z > 0$.

La función de distribución de $T = Y/\sqrt{Z/\nu}$ es

$$\begin{aligned} F(x) &= P(T \leqq x) = P(Y \leqq x\sqrt{Z/\nu}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)} \iint_{\mathcal{R}} z^{(\nu/2)-1} e^{-(y^2+z)/2}\, dy\, dz \end{aligned}$$

donde la integral se toma sobre la región $\mathcal{R}$ del plano yz para la cual $y \leqq x\sqrt{z/\nu}$. Primero fijamos a z y integramos con respecto a y desde $-\infty$ hasta $x\sqrt{z/\nu}$. Luego integramos con respecto a z desde 0 hasta ∞. Por tanto tenemos

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)} \int_{z=0}^{\infty} z^{(\nu/2)-1} e^{-z/2} \left[\int_{y=-\infty}^{x\sqrt{z/\nu}} e^{-y^2/2}\, dy \right] dz$$

Remplazando $y = u\sqrt{z/\nu}$ en la integral entre paréntesis rectangulares hallamos

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)} \int_{z=0}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{x} z^{(\nu/2)-1} e^{-z/2} \sqrt{z/\nu}\, e^{-u^2 z/2\nu}\, du\, dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}\,2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)} \int_{u=-\infty}^{x} \left[\int_{z=0}^{\infty} z^{(\nu-1)/2} e^{-(z/2)[1+(u^2/\nu)]}\, dz \right] du \end{aligned}$$

Sustituyendo $w = \dfrac{z}{2}\left(1 + \dfrac{u^2}{\nu}\right)$ esto puede escribirse como

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)} \cdot 2^{(\nu+1)/2} \int_{u=-\infty}^{x} \left[\int_{w=0}^{\infty} \frac{w^{(\nu-1)/2} e^{-w}}{(1 + u^2/\nu)^{(\nu+1)/2}}\, dw \right] du \\ &= \frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\dfrac{\nu}{2}\right)} \int_{u=-\infty}^{x} \frac{du}{(1 + u^2/\nu)^{(\nu+1)/2}} \end{aligned}$$

de acuerdo con lo pedido.

4.43. La representación gráfica de la distribución t de Student con 9 grados de libertad se muestra en la Fig. 4-19. Hallar el valor de t_1 para el cual

(*a*) el área sombreada a la derecha = 0.05,

(*b*) el área total sombreada = 0.05,

(*c*) el área total sin sombrear = 0.99,

(*d*) el área sombreada a la izquierda = 0.01,

(*e*) el área a la izquierda de t_1 sea 0.90.

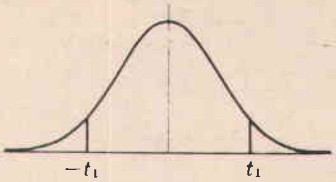


Fig. 4-19

(*a*) Si el área sombreada a la derecha es 0.05, entonces el área a la izquierda de t_1 es $(1-0.05)=0.95$ y t_1 representa la percentila 95, $t_{.95}$.

Refiriéndonos a la tabla en el Apéndice D, búsquese en la columna ν el valor 9. Entonces búsquese la columna $t_{.95}$. El resultado 1.83 es el valor pedido de t.

(*b*) Si el área total sombreada es 0.05, entonces el área sombreada a la derecha es 0.025 por simetría. Por tanto el área a la izquierda de t_1 es $(1-0.025)=0.975$ y t_1 representa la percentila 97.5, $t_{.975}$. Del Apéndice D hallamos 2.26 como el valor pedido de t.

(*c*) Si el área total sin sombrear es 0.99, entonces el área total sombreada es $(1-0.99)=0.01$ y el área sombreada a la derecha es $0.01/2=0.005$. De la tabla hallamos $t_{.995}=3.25$.

(*d*) Si el área sombreada a la izquierda es 0.01, entonces por simetría el área sombreada a la derecha es 0.01. De la tabla $t_{.99}=2.82$. Por tanto el área de t para el cual el área sombreada a la izquierda es 0.01 es -2.82.

(*e*) Si el área a la izquierda de t_1 es 0.90, entonces t_1 corresponde a la percentila 90, $t_{.90}$, que de la tabla es igual a 1.38.

4.44. Hallar los valores de t para los cuales el área de la cola a la derecha de la distribución t es 0.05 si el número de grados de libertad es igual a (*a*) 16, (*b*) 27, (*c*) 200.

Refiriéndonos al Apéndice D, hallamos en la columna $t_{.95}$ los valores: (*a*) 1.75 correspondiente a $\nu=16$; (*b*) 1.70 correspondiente a $\nu=27$; (*c*) 1.645 correspondiente a $\nu=200$. (El último es el valor que se obtendría utilizando la curva normal. En el Apéndice B este valor corresponde a la entrada en la última fila marcada ∞).

DISTRIBUCION F

4.45. Demostrar el Teorema 4-7.

La función de densidad conjunta de V_1 y V_2 está dada por

$$f(v_1,v_2) = \left(\frac{1}{2^{\nu_1/2}\Gamma(\nu_1/2)}v_1^{(\nu_1/2)-1}e^{-v_1/2}\right)\left(\frac{1}{2^{\nu_2/2}\Gamma(\nu_2/2)}v_2^{(\nu_2/2)-1}e^{-v_2/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{(\nu_1+\nu_2)/2}\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)}v_1^{(\nu_1/2)-1}v_2^{(\nu_2/2)-1}e^{-(v_1+v_2)'}$$

si $v_1>0$, $v_2>0$ y 0 de otra forma. Efectúe la transformación

$$u = \frac{v_1/\nu_1}{v_2/\nu_2} = \frac{\nu_2 v_1}{\nu_1 v_2}, \quad w = v_2 \qquad \text{ó} \qquad v_1 = \frac{\nu_1 uw}{\nu_2}, \quad v_2 = w$$

Entonces el Jacobiano es

$$\frac{\partial(v_1,v_2)}{\partial(u,w)} = \begin{vmatrix} \partial v_1/\partial u & \partial v_1/\partial w \\ \partial v_2/\partial u & \partial v_2/\partial w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \nu_1 w/\nu_2 & \nu_1 u/\nu_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\nu_1 w}{\nu_2}$$

Denotando la densidad como función de u y w por $g(u,w)$, tenemos

$$g(u,w) = \frac{1}{2^{(\nu_1+\nu_2)/2}\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)}\left(\frac{\nu_1 uw}{\nu_2}\right)^{(\nu_1/2)-1} w^{(\nu_2/2)-1}e^{-[1+(\nu_1 u/\nu_2)](w/2)}\frac{\nu_1 w}{\nu_2}$$

si $u > 0$, $w > 0$ y 0 de otra forma.

La función de densidad (marginal) de U puede encontrarse integrando con respecto a w desde 0 hasta ∞, es decir

$$h(u) = \frac{(\nu_1/\nu_2)^{\nu_1/2} u^{(\nu_1/2)-1}}{2^{(\nu_1+\nu_2)/2}\,\Gamma(\nu_1/2)\,\Gamma(\nu_2/2)} \int_0^\infty w^{[(\nu_1+\nu_2)/2]-1} e^{-[1+(\nu_1 u/\nu_2)](w/2)}\,dw$$

si $u > 0$ y 0 si $u \leqq 0$. Pero de (*15*), Apéndice A,

$$\int_0^\infty w^{p-1} e^{-aw}\,dw = \frac{\Gamma(p)}{a^p}$$

Tenemos

$$h(u) = \frac{(\nu_1/\nu_2)^{\nu_1/2} u^{(\nu_1/2)-1}\,\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{2^{(\nu_1+\nu_2)/2}\,\Gamma(\nu_1/2)\,\Gamma(\nu_2/2)\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\nu_1 u}{\nu_2}\right)\right]^{(\nu_1+\nu_2)/2}}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\,\nu_1^{\nu_1/2}\,\nu_2^{\nu_2/2}\,u^{(\nu_1/2)-1}(\nu_2+\nu_1 u)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}$$

si $u > 0$ y 0 si $u \leqq 0$, que es el resultado pedido.

4.46. Demostrar que la distribución F es unimodal en el valor $\left(\frac{\nu_1 - 2}{\nu_1}\right)\left(\frac{\nu_2}{\nu_2 + 2}\right)$ si $\nu_1 > 2$.

La moda localiza el valor máximo de la función de densidad. A diferencia de una constante, la función de densidad de la distribución F es

$$u^{(\nu_1/2)-1}(\nu_2+\nu_1 u)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}$$

Si tiene un máximo relativo se presentará cuando la derivada sea cero, es decir

$$\left(\frac{\nu_1}{2}-1\right)u^{(\nu_1/2)-2}(\nu_2+\nu_1 u)^{-(\nu_1+\nu_2)/2} - u^{(\nu_1/2)-1}\nu_1\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)(\nu_2+\nu_1 u)^{-[(\nu_1+\nu_2)/2]-1} = 0$$

Dividiendo por $u^{(\nu_1/2)-2}(\nu_2+\nu_1 u)^{-[(\nu_1+\nu_2)/2]-1}$, $u \neq 0$, hallamos

$$\left(\frac{\nu_1}{2}-1\right)(\nu_2+\nu_1 u) - u\nu_1\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right) = 0 \qquad \text{ó} \qquad u = \left(\frac{\nu_1-2}{\nu_1}\right)\left(\frac{\nu_2}{\nu_2+2}\right)$$

Utilizando el criterio de la segunda derivada podemos demostrar que realmente se trata de un máximo.

4.47. Utilizando la tabla para la distribución F en el Apéndice F, hallar (*a*) $F_{.95,10,15}$, (*b*) $F_{.99,15,9}$, (*c*) $F_{.05,8,30}$, (*d*) $F_{.01,15,9}$.

(*a*) Del Apéndice F, donde $\nu_1 = 10$, $\nu_2 = 15$, hallamos $F_{.95,10,15} = 3.80$.

(*b*) Del Apéndice F, donde $\nu_1 = 15$, $\nu_2 = 9$, hallamos $F_{.99,15,9} = 4.96$.

(*c*) Por el Teorema 4-8, página 118, $F_{.05,8,30} = \dfrac{1}{F_{.95,30,8}} = \dfrac{1}{3.08} = 0.325$.

(*d*) Por el Teorema 4-8, página 118, $F_{.01,15,9} = \dfrac{1}{F_{.99,9,15}} = \dfrac{1}{3.89} = 0.257$.

RELACIONES ENTRE LAS DISTRIBUCIONES F, χ^2 Y t

4.48. Verificar que (*a*) $F_{.95} = t^2_{.975}$, (*b*) $F_{.99} = t^2_{.995}$.

(*a*) Comparar las entradas en la primera columna de la tabla $F_{.95}$ en el Apéndice F con esas en la distribución t bajo $t_{.975}$. Vemos que

$$161 = (12.71)^2, \quad 18.5 = (4.30)^2, \quad 10.1 = (3.18)^2, \quad 7.71 = (2.78)^2, \quad \text{etc.}$$

(*b*) Comparar las entradas en la primera columna de la tabla $F_{.99}$ en el Apéndice F con esas en la distribución *t* bajo $t_{.995}$. Vemos que

$$4050 = (63.66)^2, \quad 98.5 = (9.92)^2, \quad 34.1 = (5.84)^2, \quad 21.2 = (4.60)^2, \quad \text{etc.}$$

4.49. Demostrar el Teorema 4-9, página 118, que puede establecerse simplemente como

$$F_{1-p} = t^2_{1-(p/2)}$$

y así generalizar los resultados del Problema 4.48.

Sea $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = \nu$ en la función de densidad para la distribución *F* [(*45*), página 117]. Entonces

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \nu^{\nu/2} u^{-1/2} (\nu + u)^{-(\nu+1)/2} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \nu^{\nu/2} u^{-1/2} \nu^{-(\nu+1)/2} \left(1 + \frac{u}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} u^{-1/2} \left(1 + \frac{u}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} \end{aligned}$$

para $u > 0$, y $f(u) = 0$ para $u \leqq 0$. Entonces por la definición de un valor de percentila, F_{1-p} es el número tal que $P(U \leqq F_{1-p}) = 1 - p$. Por tanto

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{F_{1-p}} u^{-1/2} \left(1 + \frac{u}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} du = 1 - p$$

En la integral efectúe el cambio de variable $t = +\sqrt{u}$:

$$2\, \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{+\sqrt{F_{1-p}}} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} dt = 1 - p$$

Comparando con (*42*), página 116, vemos que el lado izquierdo de la última ecuación es igual a

$$2 \cdot P(0 < T \leqq +\sqrt{F_{1-p}})$$

donde *T* es una variable aleatoria con distribución *t* de Student con ν grados de libertad. Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{1-p}{2} &= P(0 < T \leqq +\sqrt{F_{1-p}}) \\ &= P(T \leqq +\sqrt{F_{1-p}}) - P(T \leqq 0) \\ &= P(T \leqq +\sqrt{F_{1-p}}) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donde hemos usado la simetría de la distribución *t*. Resolviendo, tenemos

$$P(T \leqq +\sqrt{F_{1-p}}) = 1 - \frac{p}{2}$$

Pero, por definición, $t_{1-(p/2)}$ es el número tal que

$$P(T \leqq t_{1-(p/2)}) = 1 - \frac{p}{2}$$

y este número se determina únicamente, ya que la función de densidad de la distribución t es estrictamente positiva. Por tanto

$$+\sqrt{F_{1-p}} = t_{1-(p/2)} \qquad \text{ó} \qquad F_{1-p} = t^2_{1-(p/2)}$$

que era lo que se quería demostrar.

4.50. Verificar el Teorema 4-10, página 118, para (a) $p = 0.95$ y (b) $p = 0.99$.

(a) **Comparar las entradas en la última fila de la tabla $F_{.95}$ en el Apéndice F (correspondientes a $\nu_2 = \infty$) con las entradas bajo $\chi^2_{.95}$ en el Apéndice E. Entonces vemos que**

$$3.84 = \frac{3.84}{1}, \quad 3.00 = \frac{5.99}{2}, \quad 2.60 = \frac{7.81}{3}, \quad 2.37 = \frac{9.49}{4}, \quad 2.21 = \frac{11.1}{5}, \quad \text{etc.}$$

lo cual provee la verificación requerida.

(b) **Comparar las entradas en la última fila de la tabla $F_{.99}$ en el Apéndice F (correspondientes a $\nu_2 = \infty$) con las entradas bajo $\chi^2_{.99}$ en el Apéndice E. Entonces vemos que**

$$6.63 = \frac{6.63}{1}, \quad 4.61 = \frac{9.21}{2}, \quad 3.78 = \frac{11.3}{3}, \quad 3.32 = \frac{13.3}{4}, \quad 3.02 = \frac{15.1}{5}, \quad \text{etc.}$$

lo cual provee la verificación requerida.

La prueba general del Teorema 4-10 se deduce tomando el límite cuando $\nu_2 \to \infty$ en la distribución F en la página 117. Véase Problema 4.145.

DISTRIBUCION NORMAL BIDIMENSIONAL

4.51. Sean X, Y variables aleatorias cuya función de densidad conjunta es la distribución normal bidimensional. Demostrar que X, Y son independientes solo si su coeficiente de correlación es cero.

Si el coeficiente de correlación $\rho = 0$, entonces la función de densidad normal bidimensional (*49*), página 118, se convierte en

$$f(x, y) = \left[\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu_1)^2/2\sigma_1^2}\right]\left[\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-(y-\mu_2)^2/2\sigma_2^2}\right]$$

y puesto que este es un producto de una función solamente en x por una función solamente en y para todos los valores de x, y se deduce que X, Y son independientes.

Inversamente, si X, Y son independientes, $f(x, y)$ dada por (*49*) debe para todos los valores de x, y ser el producto de una función solamente en x y una función solamente en y. Esto es posible sólo si $\rho = 0$.

DISTRIBUCIONES DIVERSAS

4.52. Hallar la probabilidad que en lanzamientos sucesivos de un dado honrado resulte un 3 por primera vez en el quinto lanzamiento.

Método 1.

La probabilidad de no obtener un 3 en el primer lanzamiento es 5/6. Análogamente la probabilidad de no obtener un 3 en el segundo lanzamiento es 5/6, etc. Entonces la probabilidad de no obtener un 3 en los primeros cuatro lanzamientos es $(5/6)(5/6)(5/6)(5/6) = (5/6)^4$. Por tanto la probabilidad de obtener un 3 en el quinto lanzamiento es 1/6, la probabilidad pedida es

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{625}{7776}$$

Método 2 (utilizando fórmula).

Utilizando la distribución geométrica, página 118, con $p = 1/6$, $q = 5/6$, $x = 5$ vemos que la probabilidad pedida es

$$\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{7776}$$

4.53. Verificar las expresiones dadas para la (*a*) media, (*b*) la varianza, de la distribución Weibull, página 119.

(*a*)

$$\begin{aligned}\mu = E(X) &= \int_0^\infty abx^b e^{-ax^b}\,dx \\ &= \frac{ab}{a^{1/b}}\int_0^\infty \left(\frac{u}{a}\right) e^{-u}\frac{1}{b}u^{(1/b)-1}\,du \\ &= a^{-1/b}\int_0^\infty u^{1/b}e^{-u}\,du \\ &= a^{-1/b}\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right)\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la sustitución $u = ax^b$ para evaluar la integral.

(*b*)

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \int_0^\infty abx^{b+1}e^{-ax^b}\,dx \\ &= \frac{ab}{a^{1/b}}\int_0^\infty \left(\frac{u}{a}\right)^{1+(1/b)} e^{-u}\frac{1}{b}u^{(1/b)-1}\,du \\ &= a^{-2/b}\int_0^\infty u^{2/b}e^{-u}\,du \\ &= a^{-2/b}\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right)\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] &= E(X^2) - \mu^2 \\ &= a^{-2/b}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{b}\right)\right]\end{aligned}$$

PROBLEMAS DIVERSOS

4.54. La probabilidad de que un estudiante que ingrese a la universidad se gradúe es 0.4. Determinar la probabilidad de que de 5 estudiantes (*a*) ninguno, (*b*) uno, (*c*) al menos uno, se gradúe.

(*a*) $P(\text{ninguno se gradúe}) = {}_5C_0(0.4)^0(0.6)^5 = 0.07776$, ó aproximando 0.08

(*b*) $P(\text{se gradúe uno}) = {}_5C_1(0.4)^1(0.6)^4 = 0.2592$, ó aproximando 0.26

(*c*) $P(\text{al menos uno se gradúe}) = 1 - P(\text{ninguno se gradúe}) = 0.92224$, ó aproximando 0.92.

4.55. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 9 (*a*) dos veces, (*b*) al menos dos veces en 6 lanzamientos de un par de dados?

Cada una de las 6 formas en las cuales el primer dado puede caer está asociada con cada una de las 6 formas en las cuales el segundo dado puede caer, así hay $6 \cdot 6 = 36$ formas en las cuales ambos dados pueden caer. Estas son 1 en el primer dado y 1 en el segundo dado, 1 en el primer dado y 2 en el segundo dado, etc., denotados por (1, 1), (1, 2), etc.

De estas 36 formas todas igualmente factibles si los dados son honrados, un total de 9 ocurre en 4 casos: (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3). Entonces la probabilidad de un total de 9 en un solo lanzamiento de un par de dados es $p = 4/36 = 1/9$ y la probabilidad de no obtener un total de 9 en un solo lanzamiento es $q = 1 - p = 8/9$.

(*a*) $$P(\text{9 dos veces en seis lanzamientos}) = {}_6C_2\left(\frac{1}{9}\right)^2\left(\frac{8}{9}\right)^{6-2} = \frac{61\,440}{531\,441}$$

(*b*) P(al menos 9 dos veces) = P(9 dos veces) + P(9 tres veces) + P(9 cuatro veces) + P(9 cinco veces) + P (9 seis veces)

$$= {}_6C_2\left(\frac{1}{9}\right)^2\left(\frac{8}{9}\right)^4 + {}_6C_3\left(\frac{1}{9}\right)^3\left(\frac{8}{9}\right)^3 + {}_6C_4\left(\frac{1}{9}\right)^4\left(\frac{8}{9}\right)^2 + {}_6C_5\left(\frac{1}{9}\right)^5\frac{8}{9} + {}_6C_6\left(\frac{1}{9}\right)^6$$

$$= \frac{61\,440}{531\,441} + \frac{10\,240}{531\,441} + \frac{960}{531\,441} + \frac{48}{531\,441} + \frac{1}{531\,441} = \frac{72\,689}{531\,441}$$

Otro método.

$$P(\text{al menos 9 dos veces}) = 1 - P(\text{9 cero veces}) - P(\text{9 una vez})$$

$$= 1 - {}_6C_0\left(\frac{1}{9}\right)^0\left(\frac{8}{9}\right)^6 - {}_6C_1\left(\frac{1}{9}\right)^1\left(\frac{8}{9}\right)^5 = \frac{72\,689}{531\,441}$$

4.56. Si la probabilidad de un tornillo defectuoso es 0.1, hallar (*a*) la media y (*b*) la desviación típica para la distribución de tornillos defectuosos de un total de 400.

(*a*) Media = $np = 400(0.1) = 40$, es decir podemos *esperar* que 40 tornillos estén defectuosos.

(*b*) Varianza = $npq = (400)(0.1)(0.9) = 36$. Por tanto la desviación típica $= \sqrt{36} = 6$.

4.57. Hallar los coeficientes de (*a*) sesgo y (*b*) curtosis de la distribución en el Problema 4.56.

(*a*) $$\text{Coeficiente de sesgo} = \frac{q-p}{\sqrt{npq}} = \frac{0.9-0.1}{6} = 0.133$$

Puesto que es positivo, la distribución está sesgada a la derecha.

(*b*) $$\text{Coeficiente de curtosis} = 3 + \frac{1-6pq}{npq} = 3 + \frac{1-6(0.1)(0.9)}{36} = 3.01$$

La distribución es ligeramente más apuntada que la distribución normal.

4.58. Las calificaciones de un parcial corto en biología fueron 0, 1, 2, . . . , 10 puntos, dependiendo del número de respuestas correctamente solucionadas de un total de 10. La calificación media fue 6.7 y la desviación típica fue 1.2. Suponiendo que las calificaciones están distribuidas normalmente, determinar (*a*) el porcentaje de estudiantes con 6 puntos, (*b*) la calificación máxima del 10% más bajo de la clase, (*c*) la calificación mínima del 10% más alto de la clase.

(*a*) Para aplicar la distribución normal a datos discretos, es necesario considerar los datos como si fueran continuos. Por tanto una calificación de 6 puntos se considera como 5.5 a 6.5 puntos. Véase Fig. 4-20.

$$5.5 \text{ en unidades tipificadas} = (5.5 - 6.7)/1.2 = -1.0$$

$$6.5 \text{ en unidades tipificadas} = (6.5 - 6.7)/1.2 = -0.17$$

$$\begin{aligned} \text{Proporción pedida} &= \text{área entre } z = -1 \text{ y } z = -0.17 \\ &= (\text{área entre } z = -1 \text{ y } z = 0) \\ &\qquad - (\text{área entre } z = -0.17 \text{ y } z = 0) \\ &= 0.3413 - 0.0675 = 0.2738 = 27\% \end{aligned}$$

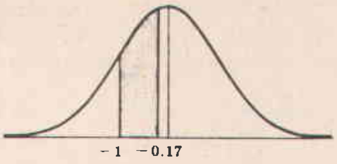


Fig. 4-20

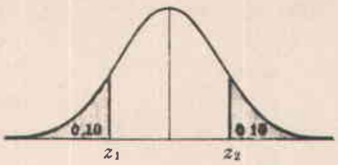


Fig. 4-21

(*b*) Sea x_1 la calificación máxima pedida y z_1 su equivalente en unidades tipificadas. De la Fig. 4-21 el área a la izquierda de z_1 es $10\% = 0.10$; por tanto

$$\text{Area entre } z_1 \text{ y } 0 = 0.40$$

y $z_1 = -1.28$ (aproximadamente).

Entonces $z_1 = (x_1 - 6.7)/1.2 = -1.28$ y $x_1 = 5.2$ ó 5 aproximando al entero más cercano.

(*c*) Sea x_2 la calificación mínima pedida y z_2 su equivalente en unidades tipificadas. Si (*b*), por simetría $z_2 = 1.28$. Entonces $(x_2 - 6.7)/1.2 = 1.28$, $x_2 = 8.2$ u 8 aproximando al entero más cercano.

4.59. Un contador Geiger se emplea para contar la llegada de partículas radioactivas. Hallar la probabilidad de que en un tiempo t no se cuenten partículas.

La Fig. 4-22 representa el eje de tiempo con O como el origen. La probabilidad de que se cuente una partícula en el tiempo Δt es proporcional a Δt y puede escribirse como $\lambda\,\Delta t$. Por tanto la probabilidad de no contar en el tiempo Δt es $1 - \lambda\,\Delta t$. Más precisamente, existirán términos adicionales que incluyen a $(\Delta t)^2$ y órdenes superiores, pero no se consideran si Δt es pequeño.

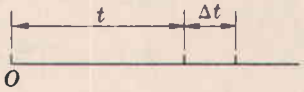


Fig. 4-22

Sea $P_0(t)$ la probabilidad de no cuenta en el tiempo t. Entonces $P_0(t + \Delta t)$ es la probabilidad de no cuenta en el tiempo $t + \Delta t$. Si se suponen las llegadas de las partículas sucesos independientes, la probabilidad de no cuenta en el tiempo $t + \Delta t$ es el producto de la probabilidad de no cuenta en el tiempo t y la probabilidad de no cuenta en el tiempo Δt. Por tanto, sin considerar los términos que incluyen $(\Delta t)^2$ y términos superiores, tenemos

$$(1) \qquad P_0(t + \Delta t) = P_0(t)[1 - \lambda\,\Delta t]$$

De (*1*) obtenemos

$$(2) \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t)$$

es decir

$$(3) \qquad \frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{dP_0}{P_0} = -\lambda\, dt$$

Resolviendo (*3*) por integración obtenemos

$$\ln P_0 = -\lambda t + c_1 \qquad \text{ó} \qquad P_0(t) = ce^{-\lambda t}$$

Para determinar c notamos que si $t = 0$, $P_0(0) = c$ es la probabilidad de no cuentas en el tiempo cero, que lógicamente es 1. Por tanto $c = 1$ y la probabilidad pedida es

$$(4) \qquad P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

4.60. Refiriéndose al Problema 4.59 hallar la probabilidad de exactamente una cuenta en el tiempo t.

Sea $P_1(t)$ la probabilidad de una cuenta en el tiempo t, de modo que $P_1(t + \Delta t)$ es la probabilidad de una cuenta en el tiempo $t + \Delta t$. Entonces tendremos una cuenta en el tiempo $t + \Delta t$ en los siguientes dos casos mutuamente excluyentes:

(i) 1 cuenta en el tiempo t y 0 cuentas en el tiempo Δt
(ii) 0 cuentas en el tiempo t y 1 cuenta en el tiempo Δt

La probabilidad de (i) es $P_1(t)(1-\lambda\,\Delta t)$.

La probabilidad de (ii) es $P_0(t)\lambda\,\Delta t$.

Por tanto, sin considerar los términos que incluyen $(\Delta t)^2$ y superiores,

(1) $$P_1(t+\Delta t) = P_1(t)(1-\lambda\,\Delta t) + P_0(t)\lambda\,\Delta t$$

Esto puede escribirse

(2) $$\frac{P_1(t+\Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = \lambda P_0(t) - \lambda P_1(t)$$

Tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$ y utilizando la expresión para $P_0(t)$ obtenida en el Problema 4.59 esto se convierte en

(3) $$\frac{dP_1}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda P_1$$

ó

(4) $$\frac{dP_1}{dt} + \lambda P_1 = \lambda e^{-\lambda t}$$

Multiplicando por $e^{\lambda t}$ esto puede escribirse como

(5) $$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}P_1) = \lambda$$

que al integrar

(6) $$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} + c_2 e^{-\lambda t}$$

Si $t=0$, $P_1(0)$ es la probabilidad de 1 cuenta en el tiempo 0, que es cero. Utilizando esto en (6) hallamos $c_2 = 0$. Por tanto

(7) $$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

Continuando de esta forma podemos demostrar que la probabilidad de exactamente n cuentas en el tiempo t está dada por

(8) $$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

que es la distribución de Poisson.

Problemas suplementarios

DISTRIBUCION BINOMIAL (BERNOULLI)

4.61. Hallar la probabilidad de que al lanzar una moneda honrada 6 veces aparezcan (*a*) 0, (*b*) 1, (*c*) 2, (*d*) 3, (*e*) 4, (*f*) 5, (*g*) 6 caras.

4.62. Hallar la probabilidad de (*a*) 2 o más caras, (*b*) menos de 4 caras en un solo lanzamiento de 6 monedas honradas.

4.63. Si X denota el número de caras en un solo lanzamiento de 4 monedas, hallar (*a*) $P(X=3)$, (*b*) $P(X<2)$, (*c*) $P(X \leqq 2)$, (*d*) $P(1 < X \leqq 3)$.

4.64. De 800 familias con 5 hijos, ¿cuántas esperarían tener (*a*) 3 niños, (*b*) 5 niñas, (*c*) o 2 ó 3 niños? Suponer probabilidades iguales para niños y niñas.

4.65. Hallar la probabilidad de obtener un total de 11 (*a*) una vez, (*b*) dos veces, en dos lanzamientos de un par de dados honrados.

4.66. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 9 exactamente una vez en 3 lanzamientos con un par de dados?

4.67. Hallar la probabilidad de acertar correctamente al menos 6 de 10 respuestas en un examen tipo verdadero-falso.

4.68. Un agente de una compañía de seguros vende pólizas a 5 personas, todas de edad idéntica y con buena salud. De acuerdo con las tablas de los actuarios la probabilidad de que una persona de esta edad específica esté viva en 30 años es 2/3. Hallar la probabilidad de que en 30 años (*a*) las 5, (*b*) al menos 3, (*c*) solamente 2, (*d*) al menos 1 persona esté viva.

4.69. Calcular la (*a*) media, (*b*) desviación típica, (*c*) coeficiente de sesgo, (*d*) coeficiente de curtosis para una distribución binomial en la cual $p = 0.7$ y $n = 60$. Interpretar los resultados.

4.70. Demostrar que si una distribución binomial con $n = 100$ es simétrica, su coeficiente de curtosis es 2.9.

4.71. Evaluar (*a*) $\Sigma\,(x-\mu)^3 f(x)$ y (*b*) $\Sigma\,(x-\mu)^4 f(x)$ para la distribución binomial.

4.72. Demostrar las fórmulas en la página 109 para los coeficientes de sesgo y curtosis.

DISTRIBUCION NORMAL

4.73. En un examen la media fue 78 y la desviación típica 10. (*a*) Determinar las calificaciones tipificadas de dos estudiantes cuyos puntajes fueron 93 y 62 respectivamente. (*b*) Determinar los puntajes de dos estudiantes cuyas calificaciones tipificadas fueron -0.6 y 1.2 respectivamente.

4.74. Hallar (*a*) la media y (*b*) la desviación típica de un examen en el cual los puntajes de 70 y 88 corresponden a calificaciones tipificadas de -0.6 y 1.4 respectivamente.

4.75. Hallar el área bajo la curva normal entre (*a*) $z = -1.20$ y $z = 2.40$, (*b*) $z = 1.23$ y $z = 1.87$, (*c*) $z = -2.35$ y $z = 0.50$.

4.76. Hallar el área bajo la curva normal (*a*) a la izquierda de $z = -1.78$, (*b*) a la izquierda de $z = 0.56$, (*c*) a la derecha de $z = -1.45$, (*d*) correspondiente a $z \geqq 2.16$, (*e*) correspondiente a $-0.80 \leqq z \leqq 1.53$, (*f*) a la izquierda de $z = -2.52$ y a la derecha de $z = 1.83$.

4.77. Si Z está distribuida normalmente con media 0 y varianza 1, hallar (*a*) $P(Z \geqq -1.64)$, (*b*) $P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96)$, (*c*) $P(|Z| \geqq 1)$.

4.78. Hallar los valores de z tales que (*a*) el área a la derecha de z sea 0.2266, (*b*) el área a la izquierda de z sea 0.0314, (*c*) el área entre -0.23 y z sea 0.5722, (*d*) el área entre 1.15 y z sea 0.0730, (*e*) el área entre $-z$ y z sea 0.900.

4.79. Hallar z_1 si $P(Z \geqq z_1) = 0.84$, donde Z está distribuida normalmente con media 0 y varianza 1.

4.80. Si X está distribuida normalmente con media 5 y desviación tipificada 2, hallar $P(X > 8)$.

4.81. Si las estaturas de 300 estudiantes están distribuidas normalmente con media 1.70 m y desviación típica 10 cm, ¿cuántos estudiantes tienen estaturas (*a*) mayores que 1.85 m, (*b*) menos que o iguales a 1.55 m, (*c*) entre 1.59 y 1.81 m inclusive, (*d*) igual a 1.70 m?

4.82. Si los diámetros de los cojinetes de municiones están normalmente distribuidos con media 0.6140 pul y desviación tipificada 0.0025 pul, determinar el porcentaje de los cojinetes de municiones con diámetros (*a*) entre 0.610 y 0.618 pul inclusive, (*b*) mayor que 0.617 pul, (*c*) menores que 0.608 pul, (*d*) iguales a 0.615 pul.

4.83. La calificación media de un examen final fue 72 y la desviación típica 9. El 10% superior de los estudiantes recibirán una calificación *A* (excelente). ¿Cuál es la calificación mínima que debe obtener un estudiante para recibir una *A*?

4.84. Si un conjunto de mediciones está distribuido normalmente, ¿qué porcentaje de esas mediciones diferirá de la media por (*a*) más de media desviación típica, (*b*) menos de tres cuartos de desviación típica?

4.85. Si μ es la media y σ la desviación típica de un conjunto de mediciones que están distribuidas normalmente, ¿qué porcentaje de las mediciones están (*a*) dentro del recorrido $\mu \pm 2\,\sigma$, (*b*) por fuera del recorrido $\mu \pm 1.2\,\sigma$, (*c*) mayor que $\mu - 1.5\,\sigma$?

4.86. En el Problema 4.85 hallar la constante a tal que el porcentaje de los casos (*a*) dentro del recorrido $\mu \pm a\sigma$ sea 75%, (*b*) menos que $\mu - a\sigma$ sea 22%.

APROXIMACION NORMAL A LA DISTRIBUCION BINOMIAL

4.87. Hallar la probabilidad de que en 200 lanzamientos de una moneda resulten (*a*) entre 80 y 120 caras inclusive, (*b*) menos que 90 caras, (*c*) menos de 85 o más de 115 caras, (*d*) exactamente 100 caras.

4.88. Hallar la probabilidad de que un estudiante pueda acertar correctamente las respuestas a (*a*) 12 o más de 20, (*b*) 24 o más de 40 preguntas en un examen tipo verdadero-falso.

4.89. Una máquina produce tornillos, 10% de los cuales son defectuosos. Hallar la probabilidad de que en un muestreo aleatorio de 400 tornillos producidos por esta máquina (*a*) máximo 30, (*b*) entre 30 y 50, (*c*) entre 35 y 45, (*d*) 55 o más, de los tornillos sean defectuosos.

4.90. Hallar la probabilidad de obtener más de 25 "sietes" en 100 lanzamientos de un par de dados honrados.

DISTRIBUCION DE POISSON

4.91. Si 3% de las lámparas eléctricas producidas por una compañía son defectuosas, hallar la probabilidad de que en una muestra de 100 lámparas eléctricas (*a*) 0, (*b*) 1, (*c*) 2, (*d*) 3, (*e*) 4, (*f*) 5 lámparas sean defectuosas.

4.92. En el Problema 4.91, hallar la probabilidad de que (*a*) más de 5, (*b*) entre 1 y 3, (*c*) menos de, o 2 lámparas eléctricas sean defectuosas.

4.93. Un talego contiene una bola roja y siete blancas. Se extrae una bola y se observa su color. Entonces se coloca la bola en el talego. Utilizando (*a*) la distribución binomial y (*b*) la aproximación de Poisson a la distribución binomial, hallar la probabilidad de que en 8 de tales extracciones se seleccione una bola roja 3 veces.

4.94. Según la National Office of Vital Statistics of the U. S. Department of Health, Education and Welfare, el promedio de ahogados en accidentes por año es 3.0 de cada 100 000 personas. Hallar la probabilidad de que en una ciudad cuya población es de 200 000 ocurran (*a*) 0, (*b*) 2, (*c*) 6, (*d*) 8, (*e*) entre 4 y 8, (*f*) menos de 3 ahogados por año.

4.95. Demostrar que si X_1 y X_2 son variables independientes con distribuciones de Poisson con parámetros respectivos λ_1 y λ_2, entonces $X_1 + X_2$ tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$. (*Sugerencia:* Utilizar la función generatriz de momentos). Generalizar el resultado a n variables.

TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL

4.96. Demostrar el teorema del límite central para el caso en que $X_1, X_2, \ldots$ son independientes y están distribuidas idénticamente con la distribución de Poisson, (*13*), página 111.

4.97. Demostrar el teorema del límite central para las variables independientes

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{prob. } 1/2 \\ -1 & \text{prob. } 1/2 \end{cases}$$

4.98. Demostrar el teorema del límite central para las variables independientes

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{prob. } p \\ -1 & \text{prob. } q \end{cases}$$

donde $q = 1 - p$, así generalizando el Problema 4.97.

4.99. Explicar por qué se podría esperar que el teorema del límite central no sea válido en el caso que $X_1, X_2, \ldots$ tengan la distribución de Cauchy,

$$f(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)} \qquad -\infty < x < \infty$$

DISTRIBUCION MULTINOMIAL

4.100. Demostrar el resultado (*17*), página 113.

4.101. Se lanza un dado honrado 6 veces. Hallar la probabilidad de que el resultado sea: (*a*) 1 "uno", 2 "doses" y 3 "treses"; (*b*) cada cara una vez.

4.102. Una caja contiene una gran cantidad de bolas rojas, blancas, azules y amarillas en la proporción 4: 3: 2: 1. Hallar la probabilidad de que de 10 bolas extraídas: (*a*) 4 sean rojas, 3 blancas, 2 azules y 1 amarilla; (*b*) 8 sean rojas y 2 amarillas.

4.103. Hallar la probabilidad de no obtener un 1, 2 ó 3 en cuatro lanzamientos de un dado honrado.

DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA

4.104. Una caja contiene 5 bolas rojas y 10 blancas. Si se seleccionan 8 bolas aleatoriamente (sin remplazamiento) determinar la probabilidad de que (*a*) 4 sean rojas, (*b*) todas sean blancas, (*c*) al menos una sea roja.

4.105. Si se seleccionan 13 cartas aleatoriamente (sin remplazamiento) de una baraja de 52 cartas, hallar la probabilidad de que (*a*) 6 sean figuras, (*b*) ninguna sea figura.

4.106. De 60 aspirantes a una universidad 40 son del oriente. Si se seleccionan 20 aspirantes aleatoriamente, hallar la probabilidad de que (*a*) 10, (*b*) no más de 2, sean del oriente.

4.107. Emplear la aproximación binomial (*18*) ó (*24*) para resolver el Problema 4.106 y estudiar la precisión obtenida.

4.108. Demostrar directamente que (*22*), página 114, se reduce a (*1*), página 108, cuando $N \to \infty$.

DISTRIBUCION UNIFORME

4.109. Si X está distribuida uniformemente en $-2 \leqq x \leqq 2$. Hallar (*a*) $P(X < 1)$, (*b*) $P(|X-1| \geqq \frac{1}{2})$.

4.110. Hallar la función generatriz de momentos para la distribución uniforme.

4.111. Hallar (*a*) el tercero y (*b*) el cuarto momento alrededor de la media de una distribución uniforme.

4.112. Determinar el coeficiente de (*a*) sesgo y (*b*) curtosis de una distribución uniforme.

4.113. Si X, Y son independientes y ambas están distribuidas uniformemente en el intervalo de 0 a 1, hallar $P(|X-Y| \geqq \frac{1}{2})$.

DISTRIBUCION DE CAUCHY

4.114. Suponga que X tiene una distribución de Cauchy de acuerdo con (*29*), página 114, con $a = 2$. Hallar (*a*) $P(X < 2)$, (*b*) $P(X^2 \geqq 12)$.

4.115. Demostrar que el recorrido semi-intercuartílico para la distribución de Cauchy es a. ¿Por qué en este caso el recorrido semi-intercuartílico es un sustituto de la desviación típica?

4.116. Demostrar que si X_1 y X_2 son independientes y tienen la misma distribución de Cauchy, entonces su media aritmética también tiene esta distribución.

4.117. Generalizar el resultado del Problema 4.116.

4.118. Si X_1 y X_2 son independientes y distribuidas normalmente con media 0 y varianza 1 Demostrarr que $Y = X_1/X_2$ tiene una distribución de Cauchy.

DISTRIBUCION GAMMA

4.119. Verificar que (*31*), página 115, es una función de densidad.

4.120. Una variable aleatoria X tiene una distribución gamma con $\alpha = 3, \beta = 2$. Hallar (*a*) $P(X \leqq 1)$, (*b*) $P(1 \leqq X \leqq 2)$.

4.121. Determinar los valores modales de la distribución gamma.

4.122. Verificar la (*a*) función generatriz de momentos y (*b*) la función característica de la distribución gamma dadas por (*33*), página 115.

DISTRIBUCION BETA

4.123. Verificar que (*34*), página 115, es una función de densidad.

4.124. Una variable aleatoria X tiene una distribución beta con $\alpha = 3, \beta = 2$. Hallar $P(|X - \frac{1}{2}| \geqq \frac{1}{4})$.

4.125. Demostrar que la distribución beta tiene una moda única en $x = (\alpha - 1)/(\alpha + \beta - 2)$.

DISTRIBUCION CHI-CUADRADO

4.126. Para una distribución chi-cuadrado con 12 grados de libertad, hallar el valor de χ_c^2 tal que (*a*) el área a la derecha de χ_c^2 sea 0.05, (*b*) el área a la izquierda de χ_c^2 sea 0.99, (*c*) el área a la derecha de χ_c^2 sea 0.025.

4.127. Hallar los valores de χ^2 para los cuales el área de la cola derecha de la distribución χ^2 es 0.05, si el número de grados de libertad ν es igual a (*a*) 8, (*b*) 19, (*c*) 28, (*d*) 40.

4.128. Resolver el Problema 4.127 si el área de la cola derecha es 0.01.

4.129. (*a*) Hallar χ_1^2 y χ_2^2 tales que el área bajo la distribución χ^2 correspondiente a $\nu = 20$ entre χ_1^2 y χ_2^2 sea 0.95, suponiendo áreas iguales a la derecha de χ_2^2 y a la izquierda de χ_1^2. (*b*) Demostrar que si la suposición de áreas iguales en la parte (*a*) no se cumple, los valores de χ_1^2 y χ_2^2 no son únicos.

4.130. Si la variable U tiene distribución chi-cuadrado con $\nu = 7$, hallar χ_1^2 y χ_2^2 tales que (*a*) $P(U > \chi_2^2) = 0.025$, (*b*) $P(U < \chi_1^2) = 0.50$, (*c*) $P(\chi_1^2 \leqq U \leqq \chi_2^2) = 0.90$.

4.131. Hallar (*a*) $\chi_{.05}^2$ y (*b*) $\chi_{.95}^2$ para $\nu = 150$.

4.132. Hallar (*a*) $\chi_{.025}^2$ y (*b*) $\chi_{.975}^2$ para $\nu = 250$.

4.133. Demostrar que para grandes valores de ν una buena aproximación para χ_p^2 está dada por $\nu + z_p\sqrt{2\nu}$, donde z_p es la percentila ($100p$) de la distribución normal tipificada.

4.134. Demostrar que (*a*) $E(\chi^2) = \nu$, (*b*) $\text{Var}(\chi^2) = 2\nu$.

DISTRIBUCION *t* DE STUDENT

4.135. Para una distribución t de Student con 15 grados de libertad, hallar el valor de t_1 tal que (*a*) el área a la derecha de t_1 sea 0.01, (*b*) el área a la izquierda de t_1 sea 0.95, (*c*) el área a la derecha de t_1 sea 0.10, (*d*) el área combinada a la derecha de t_1 y a la izquierda de $-t_1$ sea 0.01, (*e*) el área entre $-t_1$ y t_1 sea 0.95.

4.136. Hallar los valores de t para los cuales el área de la cola derecha de la distribución t es 0.01, si el número de grados de libertad ν es igual a (*a*) 4, (*b*) 12, (*c*) 25, (*d*) 60, (*e*) 150.

4.137. Hallar los valores de t_1 para la distribución de Student que satisface cada una de las condiciones siguientes: (*a*) el área entre $-t_1$ y t_1 sea 0.90 y $\nu = 25$, (*b*) el área a la izquierda de $-t_1$ sea 0.025 y $\nu = 20$, (*c*) el área combinada a la derecha de t_1 y a la izquierda de $-t_1$ sea 0.01 y $\nu = 5$, (*d*) el área a la derecha de t_1 sea 0.55 y $\nu = 16$.

4.138. Si una variable U tiene una distribución de Student con $\nu = 10$, hallar la constante c tal que (*a*) $P(U > c) = 0.05$, (*b*) $P(-c \leqq U \leqq c) = 0.98$, (*c*) $P(U \leqq c) = 0.20$, (*d*) $P(U \geqq c) = 0.90$.

4.139. Demostrar que para 1 grado de libertad la distribución t es una distribución de Cauchy.

4.140. Demostrar que la varianza de la distribución t de Student con ν grados de libertad es $\nu/(\nu - 2)$, $\nu > 2$.

DISTRIBUCION *F*

4.141. Hallar el valor de:
(*a*) $F_{.95,15,12}$; (*b*) $F_{.99,120,60}$; (*c*) $F_{.99,60,24}$; (*d*) $F_{.01,30,12}$; (*e*) $F_{.05,9,20}$; (*f*) $F_{.01,8,8}$.

4.142. Verificar que la integral desde $u = 0$ hasta ∞ de la función de densidad (*45*), página 117, es igual a 1. [*Sugerencia:* Hágase $v = \nu_2 u/(\nu_1 + \nu_2 u)$.]

4.143. Demostrar el resultado (*46*), página 117.

4.144. Demostrar el Teorema 4-8, página 118. (*Sugerencia:* Haga la transformación $u = 1/v$).

RELACIONES ENTRE LAS DISTRIBUCIONES CHI-CUADRADO, *t* Y *F*

4.145. Demostrar el Teorema 4-10, página 118.

DISTRIBUCION NORMAL BIDIMENSIONAL

4.146. Suponer que X, Y tienen la función de densidad conjunta $f(x, y) = ke^{-(ax^2 + 2bxy + cy^2)}$ donde a, b, c, k son constantes y $b^2 < ac$. Verificar que estas constantes son las dadas en (*49*), página 118.

4.147. Si X, Y conjuntamente tienen la distribución bidimensional (*49*), demostrar que están distribuidas marginalmente con varianzas σ_1^2 y σ_2^2 respectivamente.

PROBLEMAS DIVERSOS

4.148. Hallar el valor aproximado de

$$\binom{300}{2}(0.02)^2(0.98)^{298} + \binom{300}{3}(0.02)^3(0.98)^{297}$$

y dar una interpretación de probabilidad.

4.149. Si X está distribuida normalmente con media μ y varianza σ^2, ¿tiene X^2 una distribución chi-cuadrado con 1 grado de libertad? Véase Problema 4.36.

4.150. Generalizar el Problema 4.37 demostrando que si $X_1, \ldots, X_\nu$ son variables aleatorias independientes distribuidas normalmente con media 0 y varianza 1, entonces $\sum_{k=1}^{\nu} X_k^2$ tiene una distribución chi-cuadrado con ν grados de libertad.

4.151. Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes con distribución chi-cuadrado y $p_1, \ldots, p_n$ grados de libertad respectivamente, hallar la función de distribución de $X_1 + \cdots + X_n$.

4.152. Por evaluación de las series (*a*) $\sum_{x=0}^{n} x \dfrac{n!}{x!\,(n-x)!}$, (*b*) $\sum_{x=0}^{n} x^2 \dfrac{n!}{x!\,(n-x)!}$, demostrar directamente los resultados del Problema 4.8.

4.153. Hallar la función generatriz de momentos de la distribución hipergeométrica.

4.154. Sean las variables independientes X_k, $k = 1, \ldots, n$, cada una con distribución geométrica. Demostrar que $\sum_{k=1}^{n} X_k$ tiene distribución de Pascal (véase página 118).

4.155. ¿Puede deducirse la ley de los grandes números en forma débil del teorema del límite central? Justificar su solución.

4.156. Demostrar el teorema del límite central para el caso donde $X_1, X_2, \ldots$ son independientes pero no necesariamente tienen una distribución idéntica.

4.157. Completar la demostración de la ecuación (*8*) del Problema 4.60, página 144.

4.158. Demostrar el Teorema 4-5, página 116.

4.159. Demostrar que

$$\frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \omega x}{x^2 + a^2}\, dx = e^{-a\omega} \qquad (a > 0,\ \omega > 0)$$

4.160. Demostrar los resultados (*20*) y (*23*), página 114.

4.161. Demostrar que cuando $\nu \to \infty$ la distribución t de Student tiende a la distribución normal tipificada.

4.162. Estudiar qué le sucede a la varianza de la distribución t si (a) $\nu = 1$, (b) $\nu = 2$.

4.163. Estudiar qué le sucede a la media y varianza de la distribución F para los casos (a) $\nu_2 = 2$, (b) $\nu_2 = 4$, (c) $\nu_1 + \nu_2 = 2$.

4.164. La probabilidad de que una molécula de un gas ideal tenga una velocidad entre v y $v + dv$ está dada por

$$cv^2 e^{-mv^2/2kT}\, dv$$

donde k es la *constante de Boltzmann* y T es la temperatura Kelvin del gas. Determinar (a) la constante c, (b) la velocidad media, (c) la velocidad más probable, (d) la velocidad efectiva (rms, es decir la raíz cuadrada de la velocidad media al cuadrado). Comparar sus resultados con la entrada 5, página 119.

Parte II

ESTADISTICA

Capítulo 5

Teoría de muestreo

POBLACION Y MUESTRAS. INFERENCIA ESTADISTICA

Con frecuencia en la práctica estamos interesados en extraer conclusiones válidas respecto a un grupo grande de individuos u objetos. En cambio de examinar un grupo entero, llamado la *población*, lo cual puede resultar difícil o imposible, puede llegarse a la idea de examinar solamente una parte pequeña de esta población, que se llama la *muestra.* Esto se hace con el propósito de inferir ciertos hechos respecto de la población de los resultados hallados en la muestra, un proceso conocido como *inferencia estadística.* El proceso de obtener muestras se llama *muestreo.*

EJEMPLO 5. 1. Desearíamos extraer conclusiones respecto a las estaturas (o pesos) de 12 000 estudiantes (la población) examinando solamente 100 estudiantes (la muestra) seleccionados de esta población.

EJEMPLO 5.2. Desearíamos extraer conclusiones respecto al porcentaje de tornillos defectuosos producidos en una fábrica durante una semana de 6 días examinando 20 tornillos diariamente producidos en tiempos diferentes durante el día. En este caso los tornillos producidos durante la semana conforman la población, en tanto que los 120 tornillos escogidos constituyen la muestra.

EJEMPLO 5.3. Desearíamos extraer conclusiones respecto a la honradez de una moneda determinada al lanzarla repetidamente. La población consiste en todos los lanzamientos posibles de la moneda. Se podría obtener una muestra al examinar, por ejemplo, los primeros 60 lanzamientos de la moneda y notar los porcentajes de caras y sellos.

EJEMPLO 5.4. Desearíamos extraer conclusiones respecto a los colores de 200 bolas (la población) en una urna seleccionando una muestra de 20 bolas de la urna, donde cada bola seleccionada se regresa luego de observar su color.

Deben notarse varias cosas. Primero, la palabra *población* no tiene necesariamente el mismo significado como en el lenguaje común, como en "la población de determinada ciudad es de 180 000". Segundo, la palabra *población* se utiliza para denotar las observaciones o medidas y no los individuos u objetos. Así en el Ejemplo 5.1 podemos hablar de la población de 12 000 estaturas (o pesos) en tanto que en el Ejemplo 5.4 podemos hablar de la población de todos los 200 colores en la urna (algunos de los cuales pueden ser iguales). Tercero, la población puede ser finita o infinita, el número se llama el *tamaño de la población*, comúnmente denotado por N. En forma semejante el número en la muestra se llama el *tamaño de la muestra*, denotada por n, generalmente finito. En el Ejemplo 5.1, $N = 12\,000$, $n = 100$ mientras que en el Ejemplo 5.3, N es infinito, $n = 60$.

MUESTREO CON Y SIN REMPLAZAMIENTO

Si extraemos un objeto de una urna, tenemos la alternativa de colocarlo o no en la urna antes de una segunda extracción. En el primer caso un objeto determinado puede seleccionarse una y otra vez, mientras que en el segundo caso solamente puede seleccionarse una vez. El muestreo donde cada miembro de una población puede seleccionarse más de una vez se llama *muestreo con remplazamiento,* mientras que si cada miembro no puede seleccionarse más de una vez se llama *muestreo sin remplazamiento.*

Una población finita muestreada con remplazamiento puede teóricamente considerarse infinita ya que pueden extraerse muestras de cualquier tamaño sin agotar la población. Para la mayoría de propósitos prácticos el muestreo de una población finita que es muy grande puede considerarse como muestreo de una población infinita.

MUESTRAS ALEATORIAS. NUMEROS ALEATORIOS

Lógicamente, la confiabilidad de las conclusiones extraídas concernientes a una población dependen de si la muestra se ha escogido apropiadamente de tal modo que represente la población lo suficientemente bien; uno de los problemas importantes de la inferencia estadística es cómo escoger una muestra.

Una forma de hacer esto para poblaciones finitas es asegurarse de que cada miembro de la población tenga igual oportunidad de encontrarse en la muestra, lo cual se conoce como *muestra aleatoria.* El muestreo aleatorio puede efectuarse para poblaciones relativamente pequeñas extrayendo lotes o, en forma equivalente, utilizando una tabla de *números aleatorios* (Apéndice I) especialmente construida para tales propósitos. Véase Problema 5.43.

Debido a que la inferencia de la muestra a la población no puede ser cierta debemos emplear el lenguaje de probabilidad en cualquier proposición de conclusiones.

PARAMETROS POBLACIONALES

Se considera que se conoce una población cuando conocemos la distribución de probabilidad $f(x)$ (función de probabilidad o función de densidad) de la variable aleatoria asociada X. Por ejemplo, en el Ejemplo 5.1 si X es una variable aleatoria cuyos valores son las estaturas (o pesos) de los 12 000 estudiantes entonces X tiene una distribución de probabilidad $f(x)$.

Si, por ejemplo, X está normalmente distribuida decimos que la población está *normalmente distribuida* o que tenemos una *población normal.* En forma semejante, si X está binomialmente distribuida, decimos que la población está *binomialmente distribuida* o que tenemos una *población binomial.*

Existirán ciertas cantidades que aparecen en $f(x)$, como μ y σ en el caso de la distribución normal o p en el caso de la distribución binomial. Otras cantidades tales como la mediana, momentos, sesgo, etc., pueden determinarse en términos de estos. Todas estas cantidades se conocen como *parámetros poblacionales.* Cuando nos dan la población, de modo que conocemos $f(x)$, entonces los parámetros poblacionales también son conocidos.

Un problema importante surge en el caso de que la distribución de probabilidad $f(x)$ de la población no se conozca precisamente, aunque podemos tener idea del, o al menos poder formular alguna hipótesis relativa al, comportamiento general de $f(x)$. Así por ejemplo podemos tener alguna razón para suponer que una población determinada está distribuida normalmente. En tal caso no sabríamos uno o ambos de los valores μ y σ y así desearíamos estimarlos.

ESTADISTICOS MUESTRALES

Podemos tomar muestras aleatorias de la población y entonces emplearlas para obtener valores que sirven para estimar los parámetros poblacionales.

Como ejemplo ilustrativo, consideremos el Ejemplo 5.1 donde X es una variable aleatoria cuyos valores son las diferentes estaturas. Para obtener una muestra de tamaño 100 debemos primero escoger un individuo aleatoriamente de la población. Este individuo puede tener cualquier valor, por ejemplo x_1, de las diferentes estaturas posibles y llamamos x_1 el valor de la variable aleatoria X_1, donde el subíndice 1 se emplea ya que corresponde al primer individuo seleccionado. De la misma manera escogemos el segundo individuo para la muestra, que puede tener cualquiera de los valores x_2 de las estaturas posibles, y x_2 puede tomarse como el valor de una variable aleatoria X_2. Podemos continuar este proceso hasta X_{100} puesto que el tamaño de la muestra es 100. Por simplicidad supongamos que el muestreo es con remplazamiento de modo que el mismo individuo podría conceptualmente escogerse más de una vez. En este caso, ya que el tamaño de la muestra es mucho más pequeño que el tamaño de la población, el muestreo sin remplazamiento daría realmente los mismos resultados que el muestreo con remplazamiento.

En el caso general una muestra de tamaño n se describiría por los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$. En el caso de muestreo con remplazamiento $X_1, X_2, \ldots, X_n$ serían variables aleatorias independientes distribuidas idénticamente con distribución de probabilidad $f(x)$. Entonces su distribución conjunta sería

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = f(x_1)\,f(x_2)\cdots f(x_n) \tag{1}$$

Cualquier cantidad obtenida de una muestra con el propósito de estimar un parámetro poblacional se llama *estadísticos muestrales* o brevemente *estadísticos*. Matemáticamente, un estadístico muestral para una muestra de tamaño n puede definirse como función de las variables aleatorias X_1, $X_2, \ldots, X_n$, es decir $g(X_1, \ldots, X_n)$. La función $g(X_1, \ldots, X_n)$ es otra variable aleatoria, cuyos valores pueden representarse por $g(x_1, \ldots, x_n)$. La palabra *estadístico* se emplea frecuentemente para la variable aleatoria o para sus valores, el sentido determinado se deduce lógicamente del contexto.

En general, correspondiente a cada parámetro poblacional habrá un estadístico a calcularse de la muestra. Comúnmente el método para obtener un estadístico de la muestra es semejante al de obtener el parámetro de una población finita, ya que una muestra consiste de un conjunto finito de valores. Sin embargo, como veremos esto no siempre produce el "mejor estimador" y uno de los problemas importantes de la teoría de muestreo es decidir cómo formar el estadístico muestral apropiado que mejor estime un parámetro poblacional dado. Tales problemas se consideran en capítulos posteriores.

Donde sea posible trataremos de utilizar letras griegas, tales como μ, σ, etc., para valores de parámetros poblacionales y letras romanas m, s, etc., para valores del correspondiente estadístico muestral.

DISTRIBUCION MUESTRAL

Como hemos visto, un estadístico muestral que se computa de $X_1, \ldots, X_n$ es función de estas variables aleatorias y es por tanto una variable aleatoria. La distribución de un estadístico muestral se llama la *distribución muestral* del estadístico.

De otra forma podemos considerar todas las muestras posibles de tamaño n que pueden extraerse de la población, y para cada muestra computar el estadístico. De esta manera obtenemos la distribución del estadístico, que es su distribución muestral.

Para una distribución muestral podemos lógicamente computar la media, varianza, desviación típica, momentos, etc. Algunas veces se llama a la desviación típica, *error típico.*

MEDIA MUESTRAL

Denótense por $X_1, X_2, \ldots, X_n$ las variables aleatorias para una muestra de tamaño n como se describe anteriormente. Entonces la *media de la muestra* o *media muestral* es una variable aleatoria definida por

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \tag{2}$$

en analogía con (*3*), página 76. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ denotan los valores obtenidos en una muestra específica de tamaño n entonces la media para esa muestra se denota por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \tag{3}$$

EJEMPLO 5.5. Si una muestra de tamaño 5 resulta en los valores muestrales 7, 9, 1, 6, 2 entonces la media muestral es

$$\bar{x} = \frac{7 + 9 + 1 + 6 + 2}{5} = 5$$

DISTRIBUCION MUESTRAL DE MEDIAS

Sea $f(x)$ la distribución de probabilidad de alguna población dada de la cual extraemos una muestra de tamaño n. Entonces es natural buscar la distribución de probabilidad del estadístico muestral $\bar{X}$, que se llama la *distribución muestral para la media de la muestra* o la *distribución muestral de medias.* Los teoremas siguientes son importantes en este sentido.

Teorema 5-1: La media de la distribución muestral de medias, denotada por $\mu_{\bar{X}}$, está dada por

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu \tag{4}$$

donde μ es la media de la población.

El Teorema 5-1 establece que el valor esperado de la media muestral es la media de la población.

Teorema 5-2: Si una población es infinita o si el muestreo es con remplazamiento, entonces la varianza de la distribución muestral de medias, denotada por $\sigma^2_{\bar{X}}$, está dada por

$$E[(\bar{X} - \mu)^2] = \sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} \tag{5}$$

donde σ^2 es la varianza de la población.

Teorema 5-3: Si la población es de tamaño N, si el muestreo es sin remplazamiento, y si el tamaño de la muestra es $n \leqq N$, entonces (*5*) se remplaza por

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N - n}{N - 1}\right) \tag{6}$$

en tanto que $\mu_{\bar{X}}$ aún se da por (*4*).

Nótese que (*6*) se reduce a (*5*) cuando $N \to \infty$.

Teorema 5-4: Si la población de la cual se toman muestras está distribuida normalmente con media μ y varianza σ^2 entonces la media muestral está normalmente distribuida con media μ y varianza σ^2/n.

Teorema 5-5: Si la población de la cual se toman las muestras tiene una distribución de probabilidad con media μ y varianza σ^2 que no necesariamente tiene una distribución normal. Entonces la variable tipificada asociada con $\bar{X}$, dada por

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{7}$$

es *normal asintóticamente*, esto es

$$\lim_{n \to \infty} P(Z \leqq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\, du \tag{8}$$

El Teorema 5-5 es una consecuencia del teorema del límite central, página 112. Se supone aquí que la población es infinita o que el muestreo es con remplazamiento. De otra forma lo anterior es correcto si remplazamos $\sigma/\sqrt{n}$ en (*7*) por $\sigma_{\bar{X}}$ como se da en (*6*).

DISTRIBUCION MUESTRAL DE PROPORCIONES

Si una población es infinita y distribuida binomialmente, si p y $q = 1 - p$ son las probabilidades respectivas de que un miembro dado exhiba o no exhiba una propiedad determinada. Por ejemplo, la población puede ser los posibles lanzamientos de una moneda honrada, en el que la probabilidad del suceso "cara" es $p = 1/2$.

Considere las posibles muestras de tamaño n extraídas de esta población y para cada muestra determinar el estadístico que es la proporción P de éxitos. En el caso de la moneda P sería la proporción de caras que resulten en n lanzamientos. Entonces obtenemos una *distribución muestral de proporciones* cuya media μ_P y desviación típica σ_P están dadas por

$$\mu_P = p \qquad \sigma_P = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \tag{9}$$

que pueden obtenerse de (*4*) y (*5*) al colocar $\mu = p, \ \sigma = \sqrt{pq}$.

Para grandes valores de $n (n \geqq 30)$ la distribución muestral está muy próxima a una distribución normal, como se ve del Teorema 5-5.

Para poblaciones finitas en las que el muestreo es sin remplazamiento, la segunda ecuación en (*9*) se remplaza por $\sigma_{\bar{X}}$ como se da por (*6*) con $\sigma = \sqrt{pq}$.

Nótese que las ecuaciones (*9*) se obtienen mucho más fácilmente al dividir por n la media y la desviación típica (np y $\sqrt{npq}$) de la distribución binomial.

DISTRIBUCION MUESTRAL DE DIFERENCIAS Y SUMAS

Se nos dan dos poblaciones. Por cada muestra de tamaño n_1 extraída de la primera población computemos un estadístico S_1. Esto resulta en una distribución muestral para S_1 cuya media y desviación típica denotamos por μ_{S_1} y σ_{S_1} respectivamente. En forma semejante por cada muestra de tamaño n_2 extraída de la segunda población computamos un estadístico S_2 cuya media y desviación típica son μ_{S_2} y σ_{S_2} respectivamente.

Tomando las posibles combinaciones de estas muestras de las dos poblaciones podemos obtener una distribución de las diferencias, $S_1 - S_2$, que se llama la *distribución muestral de la diferencia* de estadísticos. La media y la desviación típica de esta distribución muestral denotada respectivamente por $\mu_{S_1 - S_2}$ y $\sigma_{S_1 - S_2}$, están dadas por

$$\mu_{S_1 - S_2} = \mu_{S_1} - \mu_{S_2} \qquad \sigma_{S_1 - S_2} = \sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2} \tag{10}$$

dado que las muestras escogidas en ninguna forma dependan entre sí, es decir las muestras son *independientes* (en otras palabras, las variables aleatorias S_1 y S_2 son independientes).

Si por ejemplo S_1 y S_2 son las medias muestrales de dos poblaciones, denotadas por $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ respectivamente, entonces la distribución muestral de la diferencia de las medias está dada para poblaciones infinitas con media y desviación típica μ_1, σ_1 y μ_2, σ_2 respectivamente por

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2, \qquad \sigma_{\bar{X}_1} - \sigma_{\bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \tag{11}$$

utilizando (*4*) y (*5*). Este resultado también es válido para poblaciones finitas si el muestreo es con remplazamiento. La variable tipificada

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \tag{12}$$

en tal caso tiene casi una distribución normal si n_1 y n_2 son grandes (n_1, $n_2 \geqq 30$). Resultados semejantes pueden obtenerse para poblaciones finitas en las que el muestreo es sin remplazamiento empleando (*4*) y (*6*).

Resultados correspondientes pueden obtenerse para distribuciones muestrales de diferencias de proporciones de dos poblaciones distribuidas binomialmente con parámetros p_1, q_1 y p_2, q_2 respectivamente. En este caso S_1 y S_2 corresponden a las proporciones de éxitos P_1 y P_2 y las ecuaciones (*11*) resultan

$$\mu_{P_1-P_2} = \mu_{P_1} - \mu_{P_2} = p_1 - p_2, \qquad \sigma_{P_1-P_2} = \sqrt{\sigma_{P_1}^2 + \sigma_{P_2}^2} = \sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}} \tag{13}$$

En cambio de tomar diferencias de estadísticos algunas veces estamos interesados en la suma de estadísticos. En tal caso la *distribución muestral de la suma de estadísticos* S_1 y S_2 tiene media y desviación típica dada por

$$\mu_{S_1+S_2} = \mu_{S_1} + \mu_{S_2} \qquad \sigma_{S_1+S_2} = \sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2} \tag{14}$$

suponiendo que las muestras son independientes. Se pueden obtener resultados semejantes a (*11*).

VARIANZA MUESTRAL

Si X_1, $X_2, \ldots, X_n$ denota las variables aleatorias para una muestra de tamaño n, entonces la variable aleatoria que da la *varianza de la muestra* o *la varianza muestral* se define de acuerdo con (*14*), página 78, por

$$S^2 = \frac{(X_1-\bar{X})^2 + (X_2-\bar{X})^2 + \cdots + (X_n-\bar{X})^2}{n} \tag{15}$$

Entonces en el Teorema 5-1 hallamos que $E(\bar{X}) = \mu$ y sería increíble si también pudiéramos tener $E(S^2) = \sigma^2$. Siempre que el valor esperado de un estadístico sea igual al parámetro poblacional correspondiente llamamos al estadístico un *estimador insesgado*, y el valor una *estima insesgada*, de este parámetro. Sin embargo, resulta ser que (véase Problema 5.20)

$$E(S^2) = \mu_{S^2} = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \tag{16}$$

que está muy próximo a σ^2 solamente para grandes valores de n ($n \geqq 30$). El estimador insesgado está definido por

$$\hat{S}^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{(X_1-\bar{X})^2 + (X_2-\bar{X})^2 + \cdots + (X_n-\bar{X})^2}{n-1} \tag{17}$$

de modo que

$$E(\hat{S}^2) = \sigma^2 \tag{18}$$

Debido a esto, algunos estadistas escogen para definir la varianza muestral por $\hat{S}^2$ en cambio de S^2 y sencillamente remplazan n por $n-1$ en el denominador de (*15*). Sin embargo, continuaremos definiendo la varianza muestral por (*15*), puesto que al hacerlo así muchos resultados posteriores se simplifican.

EJEMPLO 5.6. Refiriéndose al Ejemplo 5.5, página 157, la varianza muestral tiene el valor

$$s^2 = \frac{(4-6)^2 + (7-6)^2 + (5-6)^2 + (8-6)^2 + (6-6)^2}{5} = 2$$

en tanto que la estima insesgada está dada por

$$\hat{s}^2 = \frac{5}{4}s^2 = \left(\frac{(4-6)^2 + (7-6)^2 + (5-6)^2 + (8-6)^2 + (6-6)^2}{4}\right)5 = 2.5$$

Los resultados anteriores son válidos si el muestreo es de una población infinita o con remplazamiento para una población finita. Si el muestreo es sin remplazamiento de una población finita de tamaño N, entonces la media de la distribución muestral de varianzas está dada por

$$E(S^2) = \mu_{S^2} = \left(\frac{N}{N-1}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2 \tag{19}$$

Cuando $N \to \infty$ ésta se reduce a (*16*).

DISTRIBUCION MUESTRAL DE VARIANZAS

Tomando todas las posibles muestras aleatorias de tamaño n extraídas de una población y computando la varianza para cada muestra podemos obtener la distribución muestral de varianzas. En cambio de hallar la distribución muestral de S^2 ó $\hat{S}^2$ es conveniente hallar la distribución muestral de la variable aleatoria relacionada

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} = \frac{(X_1-\bar{X})^2 + (X_2-\bar{X})^2 + \cdots + (X_n-\bar{X})^2}{\sigma^2} \tag{20}$$

La distribución de esta variable aleatoria se describe en el teorema siguiente.

Teorema 5-6: Si se toman muestras aleatorias de tamaño n de una población que tiene una distribución normal entonces la variable de muestreo (*20*) tiene una distribución chi-cuadrado con $n - 1$ grados de libertad.

Debido al Teorema 5-6 la variable en (*20*) se denota con frecuencia por χ^2. Para una demostración de este teorema véase Problema 5.22.

CASO DONDE LA VARIANZA POBLACIONAL SE DESCONOCE

En los Teoremas 5-4 y 5-5 hallamos que la variable tipificada

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{21}$$

está normalmente distribuida si la población de donde se tomaron las muestras de tamaño n está normalmente distribuida, en tanto que es normal asintóticamente si la población no es normal dado que $n \geqq 30$. En (*21*) hemos supuesto lógicamente que se conoce la varianza poblacional σ^2.

Es natural preguntar qué sucedería si no conocemos la varianza poblacional. Una posibilidad es estimar la varianza poblacional utilizando una o más varianzas muestrales y luego colocar la correspondiente desviación típica en (*21*). Una mejor idea es remplazar la σ en (*21*) por la variable aleatoria $\hat{S}$ dando la desviación típica muestral e investigar la distribución del estadístico correspondiente que designamos por

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} \tag{22}$$

Podemos entonces demostrar utilizando el Teorema 4-6, página 117, que T tiene una distribución t de Student con $n - 1$ grados de libertad. Establecemos esto en el teorema siguiente, que se demuestra en el Problema 5.24.

Teorema 5-7: Si se toman muestras aleatorias de tamaño n de una población normalmente distribuida entonces el estadístico (*22*) tiene una distribución t de Student con $n - 1$ grados de libertad.

Se encuentra que el Teorema 5-7 es válido aun cuando las muestras se tomen de poblaciones que no son normales pero que tengan distribuciones en forma de campana como la distribución normal.

Puesto que no tenemos que conocer la varianza poblacional con frecuencia nos referimos al anterior tipo de muestreo como la *teoría de pequeñas muestras* o *teoría de muestreo exacto.*

DISTRIBUCION MUESTRAL DE RELACIONES DE VARIANZAS

En la página 159 indicamos cómo pueden obtenerse distribuciones muestrales de diferencias, en particular diferencias de medias. Utilizando la misma idea podríamos llegar a la distribución muestral de diferencias de varianzas, $S_1^2 - S_2^2$. Sin embargo, resulta que esta distribución muestral es más bien complicada. En cambio, podemos considerar el estadístico S_1^2/S_2^2, ya que una relación grande o pequeña indicaría una gran diferencia mientras que una relación próxima a 1 indicaría una pequeña diferencia.

Teorema 5-8: Si se extraen dos muestras aleatorias independientes de tamaño m y n respectivamente de dos poblaciones normales con varianzas σ_1^2, σ_2^2 respectivamente. Entonces si las varianzas de las muestras aleatorias están dadas por S_1^2, S_2^2 respectivamente, el estadístico

$$F = \frac{mS_1^2/(m-1)\sigma_1^2}{nS_2^2/(n-1)\sigma_2^2} = \frac{\hat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2} \tag{23}$$

tiene la distribución F con $m - 1$, $n - 1$ grados de libertad.

El teorema también puede aplicarse en el caso de que las distribuciones de población no sean normales pero tengan forma de campana.

OTROS ESTADISTICOS

Muchos otros estadísticos además de la media y la varianza o desviación típica pueden definirse para muestras. Por ejemplo la mediana, la moda, los momentos, el sesgo, la curtosis, etc. Sus

Tabla 5-1

ERRORES TIPICOS PARA ALGUNAS DISTRIBUCIONES MUESTRALES

Distribución muestral	Error típico	Notas especiales
Medias	$\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	Se cumple para muestras grandes o pequeñas donde la población es infinita o el muestreo es con remplazamiento. La distribución muestral de medias se ajusta mucho a una normal (normal asintóticamente) para $n \geqq 30$ incluso para poblaciones no normales. $\mu_{\bar{X}} = \mu$, la media poblacional en todos los casos.
Proporciones	$\sigma_P = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\dfrac{pq}{n}}$	Las notas anteriores para medias son igualmente aplicables aquí. $\mu_P = p$ en todos los casos
Medianas	$\sigma_{\text{med}} = \sigma\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ $= \dfrac{1.2533\,\sigma}{\sqrt{n}}$	Para $n \geqq 30$ la distribución muestral de la mediana es muy próxima a una normal. Los resultados dados son válidos solamente si la población es normal o aproximadamente normal. $\mu_{\text{med}} = \mu$
Desviaciones típicas	(1) $\sigma_S = \dfrac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ (2) $\sigma_S = \sqrt{\dfrac{\mu_4 - \sigma^4}{4n\sigma^2}}$	Para $n \geqq 100$ la distribución muestral de S es muy próxima a una normal. σ_S está dada por (1) solamente cuando la población es normal (o aproximadamente normal). Si la población no es normal, puede utilizarse (2). Nótese que (2) se reduce a (1) cuando $\mu_4 = 3\sigma^4$, lo que se cumple para poblaciones normales. Para $n \geqq 100$, $\mu_S = \sigma$ con gran aproximación.
Varianzas	(1) $\sigma_{S^2} = \sigma^2\sqrt{\dfrac{2}{n}}$ (2) $\sigma_{S^2} = \sqrt{\dfrac{\mu_4 - \sigma^4}{n}}$	Las notas para desviaciones típicas son igualmente aplicables aquí. Nótese que (2) se convierte en (1) en caso de que la población sea normal. $\mu_{S^2} = (n-1)\sigma^2/n$ que es casi igual a σ^2 para valores de n ($n \geqq 30$).

definiciones son análogas a esas dadas para poblaciones en el Capítulo 3. Distribuciones muestrales para estos estadísticos, o al menos sus medias y desviaciones típicas (errores típicos), pueden encontrarse con frecuencia. Algunos de estos, conjuntamente con los dados, se muestran en la tabla anterior.

DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIA

Si una muestra (o una población) es grande, es difícil observar las diferentes características o computar estadísticos tales como la media, desviación típica, etc. Por esta razón es útil organizar o agrupar los *datos*. Como ilustración suponga que una muestra consiste de las estaturas de 100 estudiantes de la universidad XYZ. Ordenamos los datos en *clases* o *categorías* y determinamos el número de individuos que pertenecen a cada clase, denominada la *frecuencia de clase*. La ordenación resultante, Tabla 5-2, se conoce como *distribución de frecuencia* o *tabla de frecuencia*.

Tabla 5-2

ESTATURAS DE 100 ESTUDIANTES DE LA UNIVERSIDAD XYZ

Estatura (pulgadas)	Número de estudiantes
60–62	5
63–65	18
66–68	42
69–71	27
72–74	8
TOTAL	100

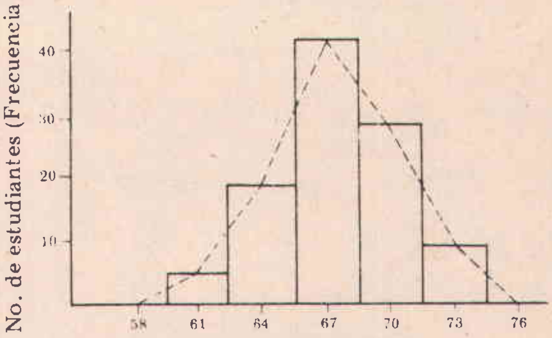


Fig. 5-1

La primera clase o categoría, por ejemplo, consiste de estaturas desde 60 hasta 62 pulgadas, indicadas por 60—62, lo que se llama un *intervalo de clase*. Puesto que 5 estudiantes tienen estaturas correspondientes a esta clase la correspondiente frecuencia de clase es 5. Ya que una estatura registrada como 60 pulgadas realmente está entre 59.5 y 60.5 pulgadas mientras que una registrada como 62 pulgadas realmente está entre 61.5 y 62.5 pulgadas, podríamos haber registrado el intervalo de clase como 59.5—62.5. El siguiente intervalo de clase sería entonces 62.5—65.5, etc. En el intervalo de clase 59.5—62.5 los números 59.5 y 62.5 se conocen como *límites reales de clase*. El ancho del intervalo de clase j-ésimo, denotado por c_j, que comúnmente es el mismo para todas las clases (en cuyo caso se denota por c), es la diferencia entre el límite real superior e inferior. En este caso $c = 62.5 - 59.5 = 3$.

El punto medio del intervalo de clase, que puede tomarse como representativo de la clase, se llama *marca de clase*. En la tabla anterior la marca de clase correspondiente al intervalo de clase 60—62 es 61.

Una representación gráfica para la distribución de frecuencia puede suministrarse por un *histograma*, como se muestra sombreado en la Fig. 5-1, o por un *polígono de frecuencias* uniendo los puntos medios de los techos del histograma. Es interesante observar que la gráfica parece indicar que la muestra se extrajo de una población de alturas normalmente distribuida.

DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIA RELATIVA Y OJIVAS

Si en la Tabla 5-2 registramos la frecuencia relativa o porcentual en cambio del número de estudiantes en cada clase, el resultado sería una *distribución de frecuencia relativa* o *porcentual*. Por ejemplo, la frecuencia relativa o porcentual correspondiente a la clase 63—56 es 18/100 ó 18%. El histograma correspondiente es entonces semejante al de la Fig. 5-1 excepto que el eje vertical es frecuencia relativa en cambio de frecuencia. La suma de las áreas es 1 ó 100%.

Podemos considerar una distribución de frecuencia relativa como una distribución de probabilidad en la que las probabilidades se remplazan por frecuencias relativas. Ya que las frecuencias relativas pueden considerarse como *probabilidades empíricas* (véase página 6), podemos considerar a las distribuciones de frecuencia relativa como *distribuciones de probabilidad empírica.*

En el Capítulo 2 vimos que podíamos asociar con cada distribución de probabilidad $f(x)$ una función de distribución definida por $F(x) = P(X \leqq x)$ y también podíamos representar gráficamente esta función. Por analogía podemos asociar con cualquier distribución de frecuencia una *distribución de frecuencia acumulada* o *distribución de frecuencia relativa acumulada,* cuyas representaciones gráficas asociadas se conocen como *ojivas* u *ojivas porcentuales* respectivamente. Véase Problema 5.30.

COMPUTO DE LA MEDIA, VARIANZA Y MOMENTOS PARA DATOS AGRUPADOS

Podemos representar una distribución de frecuencia como en la Tabla 5-3 dando cada marca de clase y la correspondiente frecuencia de clase. La frecuencia total es n, es decir

$$n = f_1 + f_2 + \cdots + f_k = \sum f$$

Tabla 5-3

Marca de clase	Frecuencia de clase
x_1	f_1
x_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$
x_k	f_k
TOTAL	n

Puesto que hay f_1 números iguales a x_1, f_2 números iguales a x_2, . . . , f_k números iguales a x_k, la media está dada por

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_kx_k}{n} = \frac{\Sigma fx}{n} \tag{24}$$

Análogamente la varianza está dada por

$$s^2 = \frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + f_k(x_k - \bar{x})^2}{n} = \frac{\Sigma f(x - \bar{x})^2}{n} \tag{25}$$

Nótese la analogía de (*24*) y (*25*) con los resultados (*2*), página 76, y (*13*), página 78, si f_j/n corresponde a probabilidades empíricas.

En el caso cuando todos los intervalos de clase tienen igual tamaño c hay disponibles métodos cortos para computar la media y la varianza. Se conocen como *métodos claves* y emplean la transformación de la marca de clase x a un entero correspondiente u dada por

$$x = a + cu \tag{26}$$

donde a es una marca de clase escogida arbitrariamente que corresponde a $u = 0$. Las fórmulas claves para la media y la varianza están dadas por

$$\bar{x} = a + \frac{c}{n}\sum fu = a + c\bar{u} \tag{27}$$

$$s^2 = c^2\left[\frac{\Sigma fu^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fu}{n}\right)^2\right] = c^2(\overline{u^2} - \bar{u}^2) \tag{28}$$

Fórmulas semejantes existen para momentos superiores. Así los momentos r con respecto a la media y al origen respectivamente están dados por

$$m_r = \frac{f_1(x_1-\bar{x})^r + \cdots + f_k(x_k-\bar{x})^r}{n} = \frac{\Sigma f(x-\bar{x})^r}{n} \tag{29}$$

$$m'_r = \frac{f_1 x_1^r + \cdots + f_k x_k^r}{n} = \frac{\Sigma f x^r}{n} \tag{30}$$

Las dos clases de momentos están relacionados por

$$\begin{aligned} m_1 &= 0 \\ m_2 &= m'_2 - m'^2_1 \\ m_3 &= m'_3 - 3m'_1 m'_2 + 2m'^3_1 \\ m_4 &= m'_4 - 4m'_1 m'_3 + 6m'^2_1 m'_2 - 3m'^4_1 \end{aligned} \tag{31}$$

etc. Si escribimos

$$M_r = \frac{\Sigma f(u-\bar{u})^r}{n} \qquad M'_r = \frac{\Sigma f u^r}{n}$$

entonces las relaciones (*31*) también son válidas para las M. Pero

$$m_r = \frac{\Sigma f(x-\bar{x})^r}{n} = \frac{\Sigma f[(a+cu)-(a+c\bar{u})]^r}{n} = \frac{\Sigma f c^r(u-\bar{u})^r}{n} = c^r M_r$$

de tal modo que obtenemos de (*31*) las fórmulas claves

$$\begin{aligned} m_1 &= 0 \\ m_2 &= c^2(M'_2 - M'^2_1) \\ m_3 &= c^3(M'_3 - 3M'_1 M'_2 + 2M'^3_1) \\ m_4 &= c^4(M'_4 - 4M'_1 M'_3 + 6M'^2_1 M'_2 - 3M'^4_1) \end{aligned} \tag{32}$$

etc. Lógicamente la segunda ecuación de (*32*) es igual a la (*28*).

De una manera semejante otros estadísticos como el sesgo, la curtosis, etc. pueden hallarse para muestras.

Problemas resueltos

DISTRIBUCION MUESTRAL DE MEDIAS

5.1. Una población se compone de los cinco números 2, 3, 6, 8, 11. Considerar todas las muestras posibles de tamaño dos que puedan extraerse con remplazamiento de esta población. Hallar (*a*) la media de la población, (*b*) la desviación típica de la población, (*c*) la media de la distribución muestral de medias, (*d*) la desviación típica de la distribución muestral de medias, es decir, el error típico de medias.

(*a*)
$$\mu = \frac{2+3+6+8+11}{5} = \frac{30}{5} = 6.0$$

(*b*)
$$\sigma^2 = \frac{(2-6)^2+(3-6)^2+(6-6)^2+(8-6)^2+(11-6)^2}{5} = \frac{16+9+0+4+25}{5} = 10.8$$

y $\sigma = 3.29$.

(*c*) Hay 5(5) = 25 muestras de tamaño dos que pueden extraerse con remplazamiento (puesto que cualquiera de los cinco números de la primera extracción puede asociarse con cualquiera de los cinco números de la segunda extracción). Estas son

$$\begin{array}{ccccc}
(2,2) & (2,3) & (2,6) & (2,8) & (2,11) \\
(3,2) & (3,3) & (3,6) & (3,8) & (3,11) \\
(6,2) & (6,3) & (6,6) & (6,8) & (6,11) \\
(8,2) & (8,3) & (8,6) & (8,8) & (8,11) \\
(11,2) & (11,3) & (11,6) & (11,8) & (11,11)
\end{array}$$

Las correspondientes medias muestrales son

$$\begin{array}{ccccc}
2.0 & 2.5 & 4.0 & 5.0 & 6.5 \\
2.5 & 3.0 & 4.5 & 5.5 & 7.0 \\
4.0 & 4.5 & 6.0 & 7.0 & 8.5 \\
5.0 & 5.5 & 7.0 & 8.0 & 9.5 \\
6.5 & 7.0 & 8.5 & 9.5 & 11.0
\end{array} \tag{1}$$

y la media de la distribución muestral de medias es

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{\text{suma de todas las medias muestrales de } (1)}{25} = \frac{150}{25} = 6.0$$

comprobándose que $\mu_{\bar{X}} = \mu$. Para una demostración general véase Problema 5.6.

(*d*) La varianza $\sigma_{\bar{X}}^2$ de la distribución muestral de medias se obtiene restando el valor de la media 6 de cada número de (*1*), elevando al cuadrado cada diferencia, sumando los 25 números así obtenidos y dividiendo por 25. El resultado final es

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{135}{25} = 5.40 \quad \text{de modo que} \quad \sigma_{\bar{X}} = \sqrt{5.40} = 2.32$$

Esto pone de manifiesto el hecho de que para poblaciones finitas en las que se efectúa muestreo con remplazamiento (o poblaciones infinitas), $\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma^2/n$, puesto que el segundo miembro es 10.8/2 = 5.40, de acuerdo con el valor anterior. Para una demostración general véase Problema 5.7.

5.2. Lo mismo que en el Problema 5.1 para el caso de muestreo sin remplazamiento.

(*a*) y (*b*) como en el Problema 5.1, $\mu = 6$ y $\sigma^2 = 10.8$, $\sigma = 3.29$.

(*c*) Hay ${}_5C_2 = 10$ muestras de tamaño dos que pueden extraerse sin remplazamiento (esto significa que se extraerá un número y después otro número diferente del primero) de la población, éstas son

$$(2,3),\ (2,6),\ (2,8),\ (2,11),\ (3,6),\ (3,8),\ (3,11),\ (6,8),\ (6,11),\ (8,11)$$

La selección (2, 3), por ejemplo, se considera la misma que (3, 2).

Las correspondientes medias muestrales son

$$2.5,\ 4.0,\ 5.0,\ 6.5,\ 4.5,\ 5.5,\ 7.0,\ 7.0,\ 8.5,\ 9.5$$

y la media de la distribución muestral de medias es

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{2.5 + 4.0 + 5.0 + 6.5 + 4.5 + 5.5 + 7.0 + 7.0 + 8.5 + 9.5}{10} = 6.0$$

poniendo de manifiesto el hecho de que $\mu_{\bar{X}} = \mu$.

(*d*) La varianza de la distribución muestral de medias es

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{(2.5 - 6.0)^2 + (4.0 - 6.0)^2 + (5.0 - 6.0)^2 + \cdots + (9.5 - 6.0)^2}{10} = 4.05$$

y $\sigma_{\bar{X}} = 2.01$.

Esto pone de manifiesto que $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$, puesto que el segundo miembro es $\frac{10.8}{2}\left(\frac{5-2}{5-1}\right) = 4.05$, que es el valor obtenido anteriormente. Para una demostración general de este resultado véase Problema 5.47.

5.3. Supóngase que las estaturas de 3000 estudiantes de una universidad se distribuyen normalmente con media 68.0 pulgadas y desviación típica 3.0 pulgadas. Si se toman 80 muestras de 25 estudiantes cada una, ¿cuál será la media y la desviación típica esperada de la distribución muestral de medias resultante si el muestreo se hizo (*a*) con remplazamiento, (*b*) sin remplazamiento?

El número de muestras de tamaño 25 que teóricamente pueden obtenerse de un grupo de 3000 estudiantes con y sin remplazamiento son $(3000)^{25}$ y ${}_{3000}C_{25}$, que son muchas más de 80. De aquí que con 80 no se obtenga realmente una distribución muestral de medias, sino solamente una distribución muestral *experimental*. Sin embargo, puesto que el número de muestras es grande, habría mucha aproximación entre las dos distribuciones muestrales. Por ello, la media y desviación típica esperadas serán muy próximas a las de la distribución teórica. Así se tiene,

(*a*) $\mu_{\bar{X}} = \mu = 68.0$ pulgadas y $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{3}{\sqrt{25}} = 0.6$ pulgadas

(*b*) $\mu_{\bar{X}} = \mu = 68.0$ pulgadas y $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} = \dfrac{3}{\sqrt{25}}\sqrt{\dfrac{3000-25}{3000-1}}$

que es ligeramente menor que 0.6 pulgadas y puede, por tanto, para todo propósito práctico, considerarse la misma que en el muestreo con remplazamiento.

Así, pues, cabría esperar que la distribución muestral experimental de medias se distribuya aproximadamente normal con media 68.0 pulgadas y desviación típica 0.6 pulgadas.

5.4. ¿En cuántas muestras del Problema 5.3 cabría esperar una media (*a*) entre 66.8 y 68.3 pulgadas, (*b*) menor de 66.4 pulgadas?

La media $\bar{X}$ de una muestra en unidades tipificadas viene dada por $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \dfrac{\bar{X} - 68.0}{0.6}$.

(*a*) 66.8 en unidades tipificadas = (66.8 − 68.0)/0.6 = −2.0

68.3 en unidades tipificadas = (68.3 − 68.0)/0.6 = 0.5

Proporción de muestras con medias entre 66.8 y 68.3 pulg.

= (área bajo la curva normal entre $z = -2.0$ y $z = 0.5$)

= (área entre $z = -2$ y $z = 0$)
+ (área entre $z = 0$ y $z = 0.5$)

= 0.4772 + 0.1915 = 0.6687

Entonces el número de muestras esperado es (80)(0.6687) ó 53.

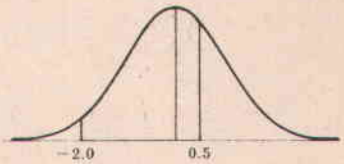


Fig. 5-2

(*b*) 66.4 en unidades tipificadas = (66.4 − 68.0)/0.6 = −2.67

Proporción de muestras con medias menores de 66.4 pulgadas

= (área a la izquierda de $z = -2.67$)

= (área a la izquierda de $z = 0$)
− (área entre $z = -2.67$ y $z = 0$)

= 0.5 − 0.4962 = 0.0038

Entonces el número de muestras esperado es = (80)(0.0038) = 0.304 o cero.

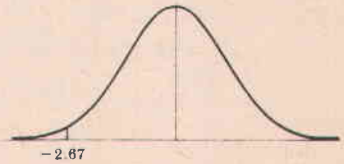


Fig. 5-3

5.5. Quinientos cojinetes de bolas tienen un peso medio de 5.02 onzas y una desviación típica de 0.30 onzas. Hallar la probabilidad de que una muestra al azar de 100 cojinetes elegidos entre este grupo tenga un peso total (*a*) comprendido entre 496 y 500 onzas, (*b*) de más de 510 onzas.

Para la distribución muestral de medias $\mu_{\bar{X}} = \mu = 5.02$ onzas,

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{0.30}{\sqrt{100}}\sqrt{\frac{500-100}{500-1}} = 0.027$$

(*a*) El peso total se encontrará entre 496 y 500 onzas si la media de los 100 cojinetes se encuentra entre 4.96 y 5.00 onzas.

4.96 en unidades tipificadas $= (4.96 - 5.02)/0.027 = -2.22$

5.00 en unidades tipificadas $= (5.00 - 5.02)/0.027 = -0.74$

Probabilidad pedida

$= (\text{área entre } z = -2.22 \text{ y } z = -0.74)$

$= (\text{área entre } z = -2.22 \text{ y } z = 0)$
$\quad - (\text{área entre } z = -0.74 \text{ y } z = 0)$

$= 0.4868 - 0.2704 = 0.2164$

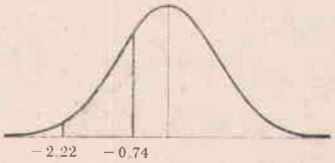


Fig. 5-4

(*b*) El peso total excederá de 510 onzas si el peso medio de los 100 cojinetes sobrepasa las 5.10 onzas.

5.10 en unidades tipificadas $= (5.10 - 5.02)/0.027 = 2.96$

Probabilidad pedida

$= (\text{área a la derecha de } z = 2.96)$

$= (\text{área a la derecha de } z = 0)$
$\quad - (\text{área entre } z = 0 \text{ y } z = 2.96)$

$= 0.5 - 0.4985 = 0.0015$

Así, pues, solamente se darán 3 casos cada 2000 de obtener una muestra de 100 cojinetes con un peso total superior a 510 onzas.

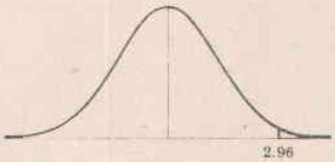


Fig. 5-5

5.6. Demostrar el Teorema 5-1, página 158.

Puesto que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias que tienen la misma distribución que la población, la cual tiene media μ, tenemos

$$E(X_k) = \mu \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

Entonces ya que la media muestral se define como

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

tenemos como se requiere

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}[E(X_1) + \cdots + E(X_n)] = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$$

5.7. Demostrar el Teorema 5-2, página 158.

Tenemos

$$\bar{X} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \cdots + \frac{X_n}{n}$$

Entonces puesto que $X_1, \ldots, X_n$ son independientes y tienen varianza σ^2, tenemos por los Teoremas 3-5 y 3-7:

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\text{Var}(X_1) + \cdots + \frac{1}{n^2}\text{Var}(X_n) = n\left(\frac{1}{n^2}\sigma^2\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

DISTRIBUCION MUESTRAL DE PROPORCIONES

5.8. Hallar la probabilidad de que en 120 lanzamientos de una moneda el número de caras (*a*) esté comprendido entre el 40% y el 60%, (*b*) sea 5/8 o más del número de lanzamientos.

Se consideran los 120 lanzamientos de la moneda como una muestra de la población infinita de todos los posibles lanzamientos de la moneda. En esta población la probabilidad de cara es $p = 1/2$ y la probabilidad de sello es $q = 1 - p = 1/2$.

(*a*) Se pide la probabilidad de que el número de caras en los 120 lanzamientos se encuentre entre 40% de 120, ó 48, y 60% de 120, ó 72. Se procede como en el Capítulo 4, mediante la aproximación normal a la binomial. Puesto que el número de caras es una variable discreta, se pide la probabilidad de que el número de caras se encuentre entre 47.5 y 72.5.

$$\mu = \text{número de caras esperado} = np = 120\left(\frac{1}{2}\right) = 60$$

y

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(120)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = 5.48$$

$$47.5 \text{ en unidades tipificadas} = \frac{47.5 - 60}{5.48} = -2.28$$

$$72.5 \text{ en unidades tipificadas} = \frac{72.5 - 60}{5.48} = 2.28$$

Probabilidad pedida

= (área bajo la curva normal entre $z = -2.28$ y $z = 2.28$)

= 2(área entre $z = 0$ y $z = 2.28$)

= 2(0.4887) = 0.9774

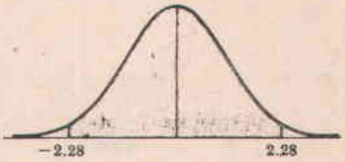


Fig. 5-6

Otro método.

$$\mu_P = p = \frac{1}{2} = 0.50 \qquad \sigma_P = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2})}{120}} = 0.0456$$

$$40\% \text{ en unidades tipificadas} = \frac{0.40 - 0.50}{0.0456} = -2.19$$

$$60\% \text{ en unidades tipificadas} = \frac{0.60 - 0.50}{0.0456} = 2.19$$

sí la probabilidad pedida es el área bajo la curva normal entre $z = -2.19$ y $z = 2.19 = 2(0.4857) = 0.9714$.

Aunque este resultado tiene dos cifras significativas, no concuerda exactamente, puesto que no se ha utilizado el hecho de que la proporción es realmente una variable discreta. Teniendo esto en cuenta se resta $\frac{1}{2n} = \frac{1}{2(120)}$ de 0.40 y se suma $\frac{1}{2n} = \frac{1}{2(120)}$ a 0.60. Así pues, las proporciones pedidas en unidades tipificadas son, puesto que $1/240 = 0.00417$,

$$\frac{0.40 - 0.00417 - 0.50}{0.0456} = -2.28 \quad \text{y} \quad \frac{0.60 + 0.00417 - 0.50}{0.0456} = 2.28$$

que concuerda con lo obtenido por el primer método.

Adviértase que $(0.40 - 0.00417)$ y $(0.60 + 0.00417)$ corresponden a las proporciones 47.5/120 y 72.5/120 del primer método.

(*b*) Empleando el segundo método de (*a*) se tiene, puesto que $5/8 = 0.6250$, que

$$(0.6250 - 0.00417) \text{ en unidades tipificadas} = \frac{0.6250 - 0.00417 - 0.50}{0.0456} = 2.65$$

Probabilidad pedida = (área bajo la curva normal a la derecha de $z = 2.65$)

= (área a la derecha de $z = 0$)

− (área entre $z = 0$ y $z = 2.65$)

= 0.5 − 0.4960 = 0.0040

5.9. Cada persona de un grupo de 500 lanza una moneda 120 veces. ¿En cuántos individuos cabe esperar que (*a*) el número de caras se encuentre entre el 40% y el 60% de sus lanzamientos, (*b*) 5/8 o más de sus lanzamientos resulten cara?

Este problema está estrechamente ligado al Problema 5.8. Aquí se consideran 500 muestras, de tamaño 120 cada una, de la población infinita de todos los posibles lanzamientos de una moneda.

(*a*) En el apartado (*a*) del Problema 5.8 se ha obtenido que todas las posibles muestras de 120 lanzamientos de una moneda, cabe esperar el encontrar un 97.74% de ellas con porcentaje de caras entre 40% y el

60%. En 500 muestras se puede esperar 97.74% de 500, ó 489 muestras con esta propiedad. Se sigue que en 489 individuos se esperaría que su número de caras se encontrase entre el 40% y el 60%.

Es interesante advertir que en 500 — 489 = 11 individuos cabe esperar que su número de caras no se encuentre entre el 40% y el 60% de los lanzamientos. Tales individuos pueden razonablemente sospechar que sus monedas no están bien hechas aunque sí lo estén. Este tipo de error es un *riesgo* que se presenta siempre que se trata con probabilidades.

(*b*) Razonando como en (*a*), se concluye que en (500)(0.0040) = 2 personas se esperará que los 5/8 o más de sus lanzamientos sean caras.

5.10. Se ha encontrado que el 2% de las piezas producidas por cierta máquina son defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de que en una partida de 400 piezas sean defectuosas (*a*) 3% o más, (*b*) 2% o menos?

$$\mu_P = p = 0.02 \qquad \text{y} \qquad \sigma_P = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.02(0.98)}{400}} = \frac{0.14}{20} = 0.007$$

(*a*) Mediante la corrección para variables discretas, $1/2n = 1/800 = 0.00125$, se tiene

$$(0.03 - 0.00125) \text{ en unidades tipificadas } = \frac{0.03 - 0.00125 - 0.02}{0.007} = 1.25$$

Probabilidad pedida = (área bajo la curva normal a la derecha de $z = 1.25$) = 0.1056

Si no se hubiese aplicado la corrección se hubiese obtenido 0.0764.

Otro método.

(3% de 400) = 12 piezas defectuosas. En concepto continuo, 12 o más significa 11.5 o más.

$$\mu = (2\% \text{ de } 400) = 8 \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(400)(0.02)(0.98)} = 2.8$$

Entonces 11.5 en unidades tipificadas = (11.5 — 8)/2.8 = 1.25 y como antes la probabilidad pedida es 0.1056.

(*b*)
$$(0.02 + 0.00125) \text{ en unidades tipificadas } = \frac{0.02 + 0.00125 - 0.02}{0.007} = 0.18$$

Probabilidad pedida = (área bajo la curva normal a la izquierda de $z = 0.18$)

= 0.5000 + 0.0714 = 0.5714

Si no se hubiese aplicado la corrección, se hubiese obtenido 0.5000. También puede utilizarse el segundo método del apartado (*a*).

5.11. Los resultados de una elección demostraron que un cierto candidato obtuvo el 46% de los votos. Determinar la probabilidad de que de (*a*) 200, (*b*) 1000 individuos elegidos al azar de entre la población votante se hubiese obtenido una mayoría de votos para dicho candidato.

(*a*)
$$\mu_P = p = 0.46 \qquad \text{y} \qquad \sigma_P = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.46(0.54)}{200}} = 0.0352$$

Puesto que $1/2n = 1/400 = 0.0025$, una mayoría se obtendría en la muestra si la proporción en favor del candidato fuese 0.50 + 0.0025 = 0.5025 o más. (Esta proporción puede también obtenerse dándose cuenta que 101 o más indica mayoría, pero ésta, como variable continua, sería 100.5 y así la proporción sería 100.5/200 = 0.5025.)

Entonces, 0.5025 en unidades tipificadas = (0.5025 — 0.46)/0.0352 = 1.21

Probabilidad pedida = (área bajo la curva normal a la derecha de $z = 1.21$)

= 0.5000 — 0.3869

= 0.1131

(*b*) $\mu_P = p = 0.46, \quad \sigma_P = \sqrt{pq/n} = \sqrt{0.46(0.54)/1000} = 0.0158$, y

$$0.5025 \text{ en unidades tipificadas } = \frac{0.5025 - 0.46}{0.0158} = 2.69$$

$$\text{Probabilidad pedida} = (\text{área bajo la curva normal a la derecha de } z = 2.69)$$
$$= 0.5000 - 0.4964 = 0.0036$$

DISTRIBUCIONES MUESTRALES DE DIFERENCIAS Y SUMAS

5.12. Sea U_1 la variable de los elementos de la población 3, 7, 8 y U_2 la variable de los elementos de la población 2, 4. Calcular (*a*) μ_{U_1}, (*b*) μ_{U_2}, (*c*) $\mu_{U_1-U_2}$, (*d*) σ_{U_1}, (*e*) σ_{U_2}, (*f*) $\sigma_{U_1-U_2}$.

(*a*) $$\mu_{U_1} = \text{media de la población } U_1 = \frac{1}{3}(3+7+8) = 6$$

(*b*) $$\mu_{U_2} = \text{media de la población } U_2 = \frac{1}{2}(2+4) = 3$$

(*c*) La población consistente en las diferencias de cualquier término de U_1 y cualquiera de U_2 es

$$\begin{matrix} 3-2 & 7-2 & 8-2 \\ 3-4 & 7-4 & 8-4 \end{matrix} \qquad \text{ó} \qquad \begin{matrix} 1 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{matrix}$$

Entonces $$\mu_{U_1-U_2} = \text{media de } (U_1 - U_2) = \frac{1+5+6+(-1)+3+4}{6} = 3$$

esto concuerda con el resultado general $\mu_{U_1-U_2} = \mu_{U_1} - \mu_{U_2}$, sacado de (*a*) y (*b*).

(*d*) $$\sigma^2_{U_1} = \text{varianza de la población } U_1 = \frac{(3-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2}{3} = \frac{14}{3}$$

ó $\sigma_{U_1} = \sqrt{\dfrac{14}{3}}$.

(*e*) $$\sigma^2_{U_2} = \text{varianza de la población } U_2 = \frac{(2-3)^2 + (4-3)^2}{2} = 1$$

ó $\sigma_{U_2} = 1$.

(*f*) $$\sigma^2_{U_1-U_2} = \text{varianza de la población } (U_1 - U_2)$$
$$= \frac{(1-3)^2 + (5-3)^2 + (6-3)^2 + (-1-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2}{6} = \frac{17}{3}$$

ó $\sigma_{U_1-U_2} = \sqrt{\dfrac{17}{3}}$.

Esto concuerda con el resultado general para muestras independientes $\sigma_{U_1-U_2} = \sqrt{\sigma^2_{U_1} + \sigma^2_{U_2}}$, sacado de (*d*) y (*e*). La demostración del resultado general se deduce del Teorema 3-7, página 79.

5.13. Las bombillas eléctricas de un fabricante *A* tienen una duración media de 1400 horas con una desviación típica de 200 horas, mientras que las de otro fabricante *B* tienen una duración media de 1200 horas con una desviación típica de 100 horas. Si se toman muestras al azar de 125 bombillas de cada fabricante, ¿cuál es la probabilidad de que las bombillas de *A* tengan una duración media que sea al menos (*a*) 160 horas, (*b*) 250 horas más que las bombillas de *B*?

Denótense por $\bar{X}_A$ y $\bar{X}_B$ las duraciones medias de las muestras A y B, respectivamente. Entonces

$$\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \mu_{\bar{X}_A} - \mu_{\bar{X}_B} = 1400 - 1200 = 200 \text{ horas}$$

y

$$\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{(100)^2}{125} + \frac{(200)^2}{125}} = 20 \text{ horas}$$

La variable tipificada para la diferencia de media es

$$Z = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_{\bar{X}_A-\bar{X}_B})}{\sigma_{\bar{X}_A-\bar{X}_B}} = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - 200}{20}$$

y se acerca mucho a una distribución normal.

(*a*) La diferencia de 160 horas en unidades tipificadas es $= (160 - 200)/20 = -2$.

Probabilidad pedida = (área bajo la curva normal a la derecha de $z = -2$)
$= 0.5000 + 0.4772 = 0.9772$

(*b*) La diferencia de 250 horas en unidades tipificadas es $= (250 - 200)/20 = 2.50$.

Probabilidad pedida = (área bajo la curva normal a la derecha de $z = 2.50$)
$= 0.5000 - 0.4938 = 0.0062$

5.14. Los cojinetes de bolas de una determinada casa pesan 0.50 onzas con una desviación típica de 0.02 onzas. ¿Cuál es la probabilidad de que dos lotes de 1000 cojinetes cada uno difieran en un peso superior a 2 onzas?

Denótense por $\bar{X}_1$ y $\bar{X}_2$ los pesos medios de los cojinetes en los dos lotes. Entonces

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = 0.50 - 0.50 = 0$$

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(0.02)^2}{1000} + \frac{(0.02)^2}{1000}} = 0.000895$$

La variable tipificada para la diferencia de medias es $Z = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{0.000895}$ se distribuye muy próxima a una normal.

Una diferencia de 2 onzas en los lotes es equivalente a una diferencia de $2/1000 = 0.002$ onzas en las medias. Esto puede ocurrir si $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geqq 0.002$ ó $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leqq -0.002$, es decir

$$Z \geqq \frac{0.002 - 0}{0.000895} = 2.23 \quad \text{ó} \quad Z \leqq \frac{-0.002 - 0}{0.000895} = -2.23$$

Entonces

$$P(Z \geqq 2.23 \text{ ó } Z \leqq -2.23) = P(Z \geqq 2.23) + P(Z \leqq -2.23) = 2(0.5000 - 0.4871) = 0.0258$$

5.15. *A* y *B* juegan a "cara y sello", lanzando cada uno 50 monedas. *A* ganará el juego si consigue 5 o más caras que *B*, de otro modo gana *B*. Determinar la proporción contra *A* de que gane un juego determinado.

Denótese por P_A y P_B la proporción de caras obtenidas por A y B. Si se supone que las monedas están bien hechas, la probabilidad de cara es $p = 1/2$. Entonces,

$$\mu_{P_A-P_B} = \mu_{P_A} - \mu_{P_B} = 0$$

y

$$\sigma_{P_A-P_B} = \sqrt{\sigma_{P_A}^2 + \sigma_{P_B}^2} = \sqrt{\frac{pq}{n_A} + \frac{pq}{n_B}} = \sqrt{\frac{2(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{50}} = 0.10$$

La variable tipificada para la diferencia de las proporciones es $Z = (P_A - P_B - 0)/0.10$.

En una distribución continua, 5 o más sería 4.5 o más, de modo que la diferencia de proporciones sería $4.5/50 = 0.09$ o más, es decir, Z mayor o igual a $(0.09 - 0)/0.10 = 0.9$ (ó $Z \geqq 0.9$). La probabilidad de esto es el área bajo la curva normal a la derecha de $Z = 0.9$ que es $0.5000 - 0.3159 = 0.1841$.

Así, pues, la proporción contra A es $(1 - 0.1841)$: $0.1841 = 0.8159$: 0.1841 ó 4.43 a 1.

5.16. Dos distancias se miden obteniéndose 27.3 pulgadas y 15.6 pulgadas, con desviaciones típicas (errores típicos) de 0.16 pulgadas y 0.08 pulgadas, respectivamente. Determinar la media y la desviación típica de (*a*) la suma, (*b*) la diferencia de las distancias.

Si las distancias se denotan por D_1 y D_2, se tiene

(*a*)
$$\mu_{D_1+D_2} = \mu_{D_1} + \mu_{D_2} = 27.3 + 15.6 = 42.9 \text{ pulgadas}$$
$$\sigma_{D_1+D_2} = \sqrt{\sigma_{D_1}^2 + \sigma_{D_2}^2} = \sqrt{(0.16)^2 + (0.08)^2} = 0.18 \text{ pulgadas}$$

(*b*)
$$\mu_{D_1-D_2} = \mu_{D_1} + \mu_{D_2} = 27.3 - 15.6 = 11.7 \text{ pulgadas}$$
$$\sigma_{D_1-D_2} = \sqrt{\sigma_{D_1}^2 + \sigma_{D_2}^2} = \sqrt{(0.16)^2 + (0.08)^2} = 0.18 \text{ pulgadas}$$

5.17. Un cierto tipo de bombilla eléctrica tiene una duración media de 1500 horas y una desviación típica de 150 horas. Se conectan tres bombillas de forma que cuando una se funde, otra sigue alumbrando. Suponiendo que las duraciones se distribuyen normalmente, ¿cuál es la probabilidad de que se tenga luz (*a*) al menos 5000 horas, (*b*) como mucho 4200 horas?

Sean las duraciones L_1, L_2 y L_3. Entonces

$$\mu_{L_1+L_2+L_3} = \mu_{L_1} + \mu_{L_2} + \mu_{L_3} = 1500 + 1500 + 1500 = 4500 \text{ horas}$$
$$\sigma_{L_1+L_2+L_3} = \sqrt{\sigma_{L_1}^2 + \sigma_{L_2}^2 + \sigma_{L_3}^2} = \sqrt{3(150)^2} = 260 \text{ horas}$$

(*a*) 5000 horas en unidades tipificadas = (5000 − 4500)/260 = 1.92.

$$\text{Probabilidad pedida} = (\text{área bajo la curva normal a la derecha de } z = 1.92)$$
$$= 0.5000 - 0.4726 = 0.0274$$

(*b*) 4200 horas en unidades tipificadas = (4200 − 4500)/260 = −1.15.

$$\text{Probabilidad pedida} = (\text{área bajo la curva normal a la izquierda de } z = -1.15$$
$$= 0.5000 - 0.3749 = 0.1251$$

DISTRIBUCION MUESTRAL DE VARIANZAS

5.18. Con referencia al Problema 5.1, hallar (*a*) la media de la distribución muestral de varianzas, (*b*) la desviación típica de la distribución muestral de varianzas, es decir, el error típico de varianzas.

(*a*) Las varianzas muestrales correspondientes a cada una de las 25 muestras del Problema 5.1 son

0	0.25	4.00	9.00	20.25
0.25	0	2.25	6.25	16.00
4.00	2.25	0	1.00	6.25
9.00	6.25	1.00	0	2.25
20.25	16.00	6.25	2.25	0

La media de la distribución muestral de varianza es

$$\mu_{S^2} = \frac{\text{suma de todas las varianzas de la tabla anterior}}{25} = \frac{135}{25} = 5.40$$

Esto pone de manifiesto el hecho de que $\mu_{S^2} = (n-1)(\sigma^2)/n$, puesto que para $n = 2$ y $\sigma^2 = 10.8$ [véase Problema 5.1(*b*)], el segundo miembro se convierte en $\frac{1}{2}(10.8) = 5.4$.

Este resultado muestra la conveniencia de definir una varianza corregida para las muestras, como $\hat{S}^2 = \frac{n}{n-1}S^2$, puesto que se seguiría que $\mu_{\hat{S}^2} = \sigma^2$ (véanse también las notas de la página 160).

(*b*) La varianza de la distribución muestral de varianzas $\sigma_{S^2}^2$ se obtiene restando la media 5.40 a cada uno de los 25 números de la tabla anterior, elevando al cuadrado estas diferencias, sumándolas y dividiendo el resultado por 25. Así, $\sigma_{S^2}^2 = 575.75/25 = 23.03$ ó $\sigma_{S^2} = 4.80$.

5.19. Solucionar el problema anterior para el caso en que el muestreo sea sin remplazamiento.

(*a*) Hay 10 muestras cuyas varianzas vienen dadas por los números por encima (o por debajo) de la diagonal de ceros de la tabla del Problema 5.18(*a*). Entonces

$$\mu_{S^2} = \frac{0.25 + 4.00 + 9.00 + 20.25 + 2.25 + 6.25 + 16.00 + 1.00 + 6.25 + 2.25}{10} = 6.75$$

Este es un caso particular del general $\mu_{S^2} = \left(\frac{N}{N-1}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2$ [ecuación (*19*), página 160], como se comprueba haciendo $N = 5$, $n = 2$ y $\sigma^2 = 10.8$ el segundo miembro pasa a ser $\mu_{S^2} = (\frac{5}{4})(\frac{1}{2})(10.8) = 6.75$.

(*b*) Restando 6.75 de cada uno de los 10 números por encima de la diagonal de ceros de la tabla del Problema 5.18(*a*), elevando al cuadrado estos números, sumándolos y dividiéndolos por 10, se tiene $\sigma^2_{S^2} = 39.675$ ó $\sigma_{S^2} = 6.30$.

5.20. Demostrar que

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

donde S^2 es la varianza muestral para una muestra aleatoria de tamaño n, como se define en la página 160, y σ^2 es la varianza de la población.

Método 1.

Tenemos

$$X_1 - \bar{X} = X_1 - \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}[(n-1)X_1 - X_2 - \cdots - X_n]$$

$$= \frac{1}{n}[(n-1)(X_1 - \mu) - (X_2 - \mu) - \cdots - (X_n - \mu)]$$

Entonces

$$(X_1 - \bar{X})^2 = \frac{1}{n^2}[(n-1)^2(X_1 - \mu)^2 + (X_2 - \mu)^2 + \cdots + (X_n - \mu)^2 + \text{téminos de producto cruzado}]$$

Puesto que las X son independientes la esperanza de cada término de producto cruzado es cero, por tanto se tiene

$$E[(X_1 - \bar{X})^2] = \frac{1}{n^2}\{(n-1)^2 E[(X_1 - \mu)^2] + E[(X_2 - \mu)^2] + \cdots + E[(X_n - \mu)^2]\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\{(n-1)^2\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\{(n-1)^2\sigma^2 + (n-1)\sigma^2\} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

Análogamente, $E[(X_k - \bar{X})^2] = (n-1)\sigma^2/n$ para $k = 2, \ldots, n$. Por tanto

$$E(S^2) = \frac{1}{n}E[(X_1 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{n-1}{n}\sigma^2 + \cdots + \frac{n-1}{n}\sigma^2\right] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

Método 2.

Tenemos $X_j - \bar{X} = (X_j - \mu) - (\bar{X} - \mu)$. Entonces

$$(X_j - \bar{X})^2 = (X_j - \mu)^2 - 2(X_j - \mu)(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2$$

y

$$\sum (X_j - \bar{X})^2 = \sum (X_j - \mu)^2 - 2(\bar{X} - \mu)\sum (X_j - \mu) + \sum (\bar{X} - \mu)^2 \qquad (1)$$

donde la suma es desde $j = 1$ hasta n. Lo que puede escribirse como

$$(2) \qquad \sum (X_j - \bar{X})^2 = \sum (X_j - \mu)^2 - 2n(\bar{X} - \mu)^2 + n(\bar{X} - \mu)^2$$
$$= \sum (X_j - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2$$

puesto que $\sum (X_j - \mu) = \sum X_j - n\mu = n(\bar{X} - \mu)$. Tomando la esperanza a ambos lados de (2) y utilizando el Problema 5.7 hallamos

$$E\left[\sum (X_j - \bar{X})^2\right] = E\left[\sum (X_j - \mu)^2\right] - nE[(\bar{X} - \mu)^2]$$
$$= n\sigma^2 - n\left(\frac{\sigma^2}{n}\right) = (n-1)\sigma^2$$

de donde
$$E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

5.21. Demostrar el Teorema 5-4, página 158.

Si X_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, está distribuida normalmente con media μ y varianza σ^2, entonces su función característica es (véase Tabla 4-2, página 111)

$$\phi_j(\omega) = e^{i\mu\omega - (\sigma^2\omega^2)/2}$$

La función característica de $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ es, por el Teorema 3-12,

$$\phi(\omega) = \phi_1(\omega)\,\phi_2(\omega)\cdots\phi_n(\omega) = e^{in\mu\omega - (n\sigma^2\omega^2)/2}$$

puesto que las X_j son independientes. Entonces, por el Teorema 3-11, la función característica de

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

es
$$\phi_{\bar{X}}(\omega) = \phi\left(\frac{\omega}{n}\right) = e^{i\mu\omega - [(\sigma^2/n)\omega^2]/2}$$

Pero ésta es la función característica para una distribución normal con media μ y varianza σ^2/n, y el resultado deseado se deduce del Teorema 3-13.

5.22. Demostrar el Teorema 5-6, página 161.

Por definición, $(n-1)\hat{S}^2 = \sum_{j=1}^{n} (X_j - \bar{X})^2$. Se deduce de (2) del Método 2 en el Problema 5.20 que $V = V_1 + V_2$, donde

$$V = \sum_{j=1}^{n} \frac{(X_j - \mu)^2}{\sigma^2}, \qquad V_1 = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2}, \qquad V_2 = \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2/n}$$

Entonces por el Teorema 4-3, página 116, V tiene distribución chi-cuadrado con n grados de libertad [como se ve remplazando X_j por $(X_j - \mu)/\sigma$]. También, por el Problema 5.21, $\bar{X}$ tiene distribución normal con media μ y varianza σ^2/n. Por tanto, del Teorema 4-3 con $\nu = 1$ y X_1 remplazada por $(\bar{X} - \mu)/\sqrt{\sigma^2/n}$, vemos que V_2 tiene una distribución chi-cuadrado con 1 grado de libertad. Se deduce del Teorema 4-5, página 116, que si V_1 y V_2 son independientes entonces V_1 tiene distribución chi-cuadrado con $n - 1$ grados de libertad. Ya que podemos demostrar que V_1 y V_2 son independientes (Problema 5.135) se sigue el resultado pedido.

5.23. (*a*) Emplear el Teorema 5-6 para determinar el número esperado de muestras en el Problema 5.1 para las cuales las varianzas muestrales son mayores que 7.2. (*b*) Verificar el resultado en (*a*) con el resultado real.

(*a*) Tenemos $n = 2$, $\sigma^2 = 10.8$ [del Problema 5.1(*b*)]. Para $s_1^2 = 7.2$, tenemos

$$\frac{ns_1^2}{\sigma^2} = \frac{(2)(7.2)}{10.8} = 1.33.$$

Entonces de acuerdo con el Teorema 5-6 $\chi^2 = nS^2/\sigma^2 = 2S^2/10.8$ tiene la distribución chi-cuadrado con 1 grado de libertad. De la tabla en el Apéndice E se deduce que

$$P(S^2 \geqq s_1^2) \;=\; P(\chi^2 \geqq 1.33) \;=\; 0.25$$

Por tanto esperaríamos que alrededor del 25% de las muestras, o 6, tengan varianzas mayores a 7.2.

(*b*) Del Problema 5.18 hallamos al contar que realmente hay 6 varianzas mayores que 7.2, de modo que los resultados son iguales.

CASO DONDE SE DESCONOCE LA VARIANZA POBLACIONAL

5.24. Demostrar el Teorema 5-7, página 161.

Si $Y = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, $Z = \dfrac{nS^2}{\sigma^2}$, $\nu = n - 1$. Entonces puesto que las X_j están distribuidas normalmente con media μ y varianza σ^2 sabemos (Problema 5.21) que $\bar{X}$ está distribuida normalmente con media μ y varianza σ^2/n, de modo que Y está distribuida normalmente con media 0 y varianza 1. También, del Teorema 5-6, página 161, o del Problema 5.22 Z tiene distribución chi-cuadrado con $\nu = n - 1$ grados de libertad.

Se deduce del Teorema 4-6, página 117, que

$$T \;=\; \frac{Y}{\sqrt{Z/\nu}} \;=\; \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n-1}} \;=\; \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{S}/\sqrt{n}}$$

tiene la distribución t con $n - 1$ grados de libertad.

5.25. De acuerdo con la tabla de la distribución t de Student para un grado de libertad (Apéndice D) tenemos $P(-1.376 \leqq T \leqq 1.376) = 0.60$. Verificar si este resultado se confirma con los obtenidos en el Problema 5.1.

De los valores de $\bar{X}$ en (*1*) de la página 166 y los valores de S^2 en el Problema 5.18(*a*) obtenemos los valores siguientes para $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{1})$:

$-\infty$	-7.0	-1.0	-0.33	0.11
-7.0	$-\infty$	-1.0	-0.20	0.25
-1.0	-1.0	...	1.0	1.0
-0.33	-0.20	1.0	∞	2.33
0.11	0.25	1.0	2.33	∞

Realmente hay 16 valores para los cuales $-1.376 \leqq T \leqq 1.376$ mientras que esperaríamos $(0.60)(25) = 15$. Esto no es tan malo si se considera la pequeña cantidad de datos involucrados. Este método de muestreo fue efectivamente la manera como "Student" originalmente obtuvo la distribución *t*.

DISTRIBUCION MUESTRAL DE RELACIONES DE VARIANZAS

5.26. Demostrar el Teorema 5-8, página 161.

Denótense las muestras de tamaños m y n por $X_1, \ldots, X_m$ y $Y_1, \ldots, Y_n$ respectivamente. Entonces las varianzas muestrales están dadas por

$$S_1^2 \;=\; \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(X_j - \bar{X})^2, \qquad S_2^2 \;=\; \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \bar{Y})^2$$

donde $\bar{X}$, $\bar{Y}$ son las medias muestrales.

Entonces del Teorema 5-6, página 161, sabemos que mS_1^2/σ_1^2 y nS_2^2/σ_2^2 tienen distribución chi-cuadrado con $m - 1$ y $n - 1$ grados de libertad respectivamente. Por tanto del Teorema 4-7, página 117, se deduce que

$$F \;=\; \frac{mS_1^2/(m-1)\sigma_1^2}{nS_2^2/(n-1)\sigma_2^2} \;=\; \frac{\hat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2}$$

tiene la distribución F con $m - 1$, $n - 1$ grados de libertad.

5.27. Dos muestras de tamaños 8 y 10 se extraen de dos poblaciones distribuidas normalmente con varianza 20 y 36 respectivamente. Hallar la probabilidad de que la varianza de la primera muestra sea más de dos veces la varianza de la segunda.

Tenemos $m = 8$, $n = 10$, $\sigma_1^2 = 20$, $\sigma_2^2 = 36$. Por tanto

$$F = \frac{8S_1^2/(7)(20)}{10S_2^2/(9)(36)} = 1.85\frac{S_1^2}{S_2^2}$$

El número de grados de libertad para el numerador y el denominador son $\nu_1 = m - 1 = 7$, $\nu_2 = n - 1 = 9$. Entonces si S_1^2 es más de dos veces S_2^2, es decir $S_1^2 > 2S_2^2$, entonces $F > 3.70$. Refiriéndonos a las tablas en el Apéndice F vemos que la probabilidad es menor que 0.05 pero mayor que 0.01. Para valores exactos necesitamos una tabulación más amplia de la distribución F.

DISTRIBUCION DE FRECUENCIA

5.28. En la Tabla 5-4 se registran los pesos de 40 estudiantes en State University con aproximación de una libra. Construir una distribución de frecuencias.

Tabla 5-4

138	164	150	132	144	125	149	157
146	158	140	147	136	148	152	144
168	126	138	176	163	119	154	165
146	173	142	147	135	153	140	135
161	145	135	142	150	156	145	128

El peso mayor es 176 libras y el menor 119 libras, de modo que el recorrido es 176 — 119 = 57 libras.

Si utilizamos 5 intervalos de clase, el tamaño de cada uno es 57/5 = 11 aproximadamente.

Si utilizamos 20 intervalos de clase, el tamaño de cada uno es 57/20 = 3 aproximadamente.

Una elección conveniente para el tamaño del intervalo de clase es de 5 libras. También conviene elegir las marcas de clase en 120, 125, 130, 135, . . . libras. Así los intervalos de clase pueden ser 118—122, 123—127, 128—132, . . . Con esta elección los límites reales de clase serán 117.5, 122.5, 127.5, . . . que no coinciden con los datos observados.

La distribución de frecuencias pedida aparece en la Tabla 5-5. La columna central, denominada *columna de cuenta*, se utiliza para tabular las frecuencias de clase de la totalidad de los datos y generalmente se omite en la presentación final de la distribución de frecuencias.

Tabla 5-5

Peso (libras)	Cuenta	Frecuencia
118–122	/	1
123–127	//	2
128–132	//	2
133–137	////	4
138–142	~~////~~ /	6
143–147	~~////~~ ///	8
148–152	~~////~~	5
153–157	////	4
158–162	//	2
163–167	///	3
168–172	/	1
173–177	//	2
	TOTAL	40

Otro método.

Naturalmente, son posibles otras distribuciones de frecuencia. La Tabla 5-6, por ejemplo, muestra una distribución de frecuencias con 7 clases solamente en las que el intervalo de clase es de 9 libras.

Tabla 5-6

Peso (libras)	Cuenta	Frecuencia
118–126	///	3
127–135	~~////~~	5
136–144	~~////~~ ////	9
145–153	~~////~~ ~~////~~ //	12
154–162	~~////~~	5
163–171	////	4
172–180	//	2
	TOTAL	40

5.29. Construir un histograma y un polígono de frecuencia para la distribución de los pesos del Problema 5.28.

El histograma y el polígono de frecuencias para cada uno de los dos casos considerados en el Problema 5.28 están dados en las Figs. 5-7 y 5-8. Nótese que los centros de las bases de los rectángulos se encuentran en las marcas de clase.

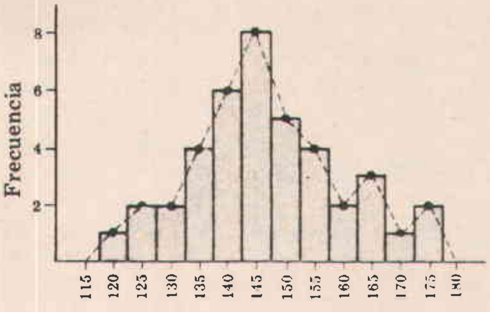


Fig. 5-7

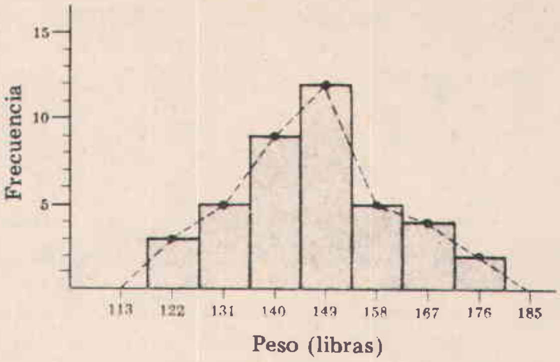


Fig. 5-8

5.30. Se lanzan cinco monedas simultáneamente 1000 veces y en cada lanzamiento se observa el número de caras. Los números de lanzamientos durante los cuales se obtienen 0, 1, 2, 3, 4 y 5 caras se muestran en la Tabla 5-7. (*a*) Representar los datos gráficamente. (*b*) Construir una tabla que muestra el porcentaje de lanzamientos que resultan en un número de caras menor que 0, 1, 2, 3, 4, 5 ó 6. (*c*) Representar gráficamente los datos de la tabla construida en (*b*).

Tabla 5-7

Número de caras	Número de lanzamientos (frecuencia)
0	38
1	144
2	342
3	287
4	164
5	25
TOTAL	1000

(*a*) Los datos aparecen gráficamente en la Fig. 5-9 o en la Fig. 5-10.

La Fig. 5-9 es un gráfico de empleo más lógico, puesto que, por ejemplo, el número de caras no pueden ser 1.5 ó 3.2. Este gráfico es una especie de gráfico de barras en el que las barras tienen una anchura cero y a veces se llama *gráfico de vara*. Se utiliza especialmente cuando los datos son discretos.

La Fig. 5-10 muestra un histograma de los datos. El área total del histograma es la frecuencia total 1000. Al emplear la representación de histograma o el correspondiente polígono de frecuencia se están tratando los datos *como si* fuesen continuos.

Fig. 5-9

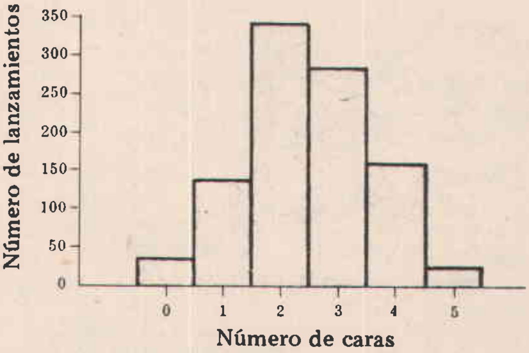


Fig. 5-10

(*b*) Refiriéndose a la Tabla 5-8, adviértase que muestra únicamente una distribución de frecuencias acumuladas y una distribución acumulada porcentual del número de caras. Las entradas reflejadas como "menor que 1", "menor que 2", etc., podrían igualmente haber sido "menor que o igual a 0", "menor que o igual a 1", etc.

Tabla 5-8

Número de caras	Número de lanzamientos (frecuencia acumulada)	Porcentaje de lanzamientos (frecuencias acumuladas porcentuales)
menor que 0	0	0.0
menor que 1	38	3.8
menor que 2	182	18.2
menor que 3	524	52.4
menor que 4	811	81.1
menor que 5	975	97.5
menor que 6	1000	100.0

Fig. 5-11

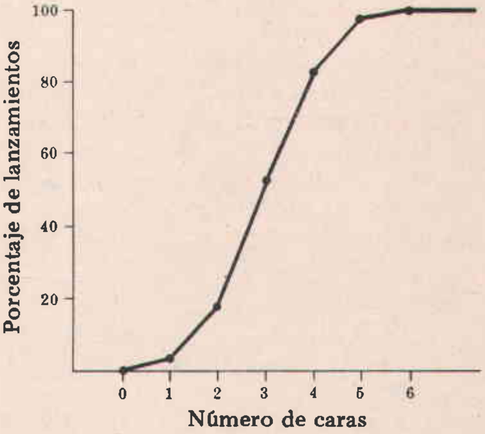


Fig. 5-12

(*c*) La representación gráfica puede indicarse como en la Fig. 5-11 o en la Fig. 5-12.

La Fig. 5-11 es la más lógica para representar datos discretos; así por ejemplo, el porcentaje de lanzamientos en los que haya menos de 2 caras es igual al porcentaje en las que haya menos de 1.75, 1.56 ó 1.23 caras, de modo que el mismo porcentaje 18.2%, aparece para todos estos valores (indicado por la línea horizontal).

La Fig. 5-12 muestra el polígono de frecuencias acumuladas u ojiva de los datos y los trata como si en esencia fuesen continuos.

Nótese que las Figs. 5-11 y 5-12 corresponden a las Figs. 5-9 y 5-10 de la parte (*a*).

CALCULO DE LA MEDIA, VARIANZA Y MOMENTOS PARA MUESTRAS

5.31. Hallar la media aritmética de los números 5, 3, 6, 5, 4, 5, 2, 8, 6, 5, 4, 8, 3, 4, 5, 4, 8, 2, 5, 4.

Método 1.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{5+3+6+5+4+5+2+8+6+5+4+8+3+4+5+4+8+2+5+4}{20}$$

$$= \frac{96}{20} = 4.8$$

Método 2.

Hay seis 5, dos 3, dos 6, cinco 4, dos 2 y tres 8. Entonces

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{(6)(5)+(2)(3)+(2)(6)+(5)(4)+(2)(2)+(3)(8)}{6+2+2+5+2+3} = \frac{96}{20} = 4.8$$

5.32. Cuatro grupos de estudiantes, formados por 15, 20, 10 y 18 individuos registran una media de pesos de 162, 148, 153 y 140 libras, respectivamente. Hallar el peso medio de todos los estudiantes.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{(15)(162) + (20)(148) + (10)(153) + (18)(140)}{15 + 20 + 10 + 18} = 150 \text{ libras}$$

5.33. Utilizar la distribución de frecuencias de estaturas en la Tabla 5-2, página 163, para hallar la estatura media de los 100 estudiantes de la Universidad, XYZ.

La solución se indica en la Tabla 5-9. Adviértase que todos los estudiantes con estaturas de 60—62 pulgadas, 63—65 pulgadas, etc., se consideran como teniendo estaturas de 61, 64, etc., pulgadas. El problema entonces se reduce a encontrar la estatura media de 100 estudiantes, si 5 tienen una estatura de 61 pulgadas, 18 tienen una estatura de 64 pulgadas, etc.

Tabla 5-9

Estatura (pulgadas)	Marca de clase (x)	Frecuencia (f)	fx
60—62	61	5	305
63—65	64	18	1152
66—68	67	42	2814
69--71	70	27	1890
72—74	73	8	584
		$n = \Sigma f = 100$	$\Sigma fx = 6745$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{6745}{100} = 67.45 \text{ pulgadas}$$

Los cálculos involucrados pueden convertirse en tediosos, especialmente para los casos en los que los números son grandes y hay muchas clases. Técnicas breves se encuentran disponibles para disminuir el trabajo en tales casos. Véase Problema 5.35, por ejemplo.

5.34. Derivar la fórmula clave (27), página 164, para la media aritmética.

Denótese la clave de marca j-ésima por x_j. Entonces la desviación de x_j con respecto a alguna marca de clase determinada a, $x_j - a$, es igual al tamaño de intervalo de clase c multiplicado por algún entero u_j, es decir $x_j - a = cu_j$ ó $x_j = a + cu_j$ (también escrito brevemente como $x = a + cu$).

La media está dada por

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_j x_j}{n} = \frac{\Sigma f_j (a + cu_j)}{n} = \frac{a \Sigma f_j}{n} + c\frac{\Sigma f_j u_j}{n}$$

$$= a + c\frac{\Sigma f_j u_j}{n} = a + c\bar{u}$$

ya que $n = \Sigma f_j$.

5.35. Utilizar la fórmula clave del Problema 5.34 para hallar la estatura media de los 100 estudiantes de la Universidad XYZ (véase Problema 5-33).

La solución puede ordenarse como se indica en la Tabla 5-10. El método se denomina el *método clave* y debe emplearse siempre que sea posible.

Tabla 5-10

x	u	f	fu
61	−2	5	−10
64	−1	18	−18
$a \rightarrow$ 67	0	42	0
70	1	27	27
73	2	8	16
		$n = 100$	$\Sigma fu = 15$

$$\bar{x} = a + \left(\frac{\Sigma fu}{n}\right)c = 67 + \left(\frac{15}{100}\right)(3) = 67.45 \text{ pulgadas}$$

5.36. Hallar (*a*) la varianza y (*b*) la desviación típica para los números en el Problema 5.31.

(*a*) **Método 1.**

Como en el Problema 5.31 tenemos $\bar{x} = 4.8$. Entonces

$$s^2 = \frac{\Sigma (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{(5-4.8)^2 + (3-4.8)^2 + (6-4.8)^2 + (5-4.8)^2 + \cdots + (4-4.8)^2}{20}$$

$$= \frac{59.20}{20} = 2.96$$

Método 2.

$$s^2 = \frac{\Sigma f(x-\bar{x})^2}{n} = \frac{6(5-4.8)^2 + 2(3-4.8)^2 + 2(6-4.8)^2 + 5(4-4.8)^2 + 2(2-4.8)^2 + 3(8-4.8)^2}{20}$$

$$= \frac{59.20}{20} = 2.96$$

(*b*) De (*a*), $s^2 = 2.96$ y $s = \sqrt{2.96} = 1.36$.

5.37. Hallar la desviación típica de los pesos de los estudiantes del Problema 5.32.

$$s^2 = \frac{\Sigma f(x-\bar{x})^2}{n} = \frac{15(162-150)^2 + 20(148-150)^2 + 10(153-150)^2 + 18(140-150)^2}{15+20+10+18}$$

$$= \frac{4130}{63} = 65.6 \text{ en unidades libras cuadradas o (libras)}^2$$

Entonces $s = \sqrt{65.6 \text{ (libras)}^2} = \sqrt{65.6}$ libras $= 8.10$ libras, donde hemos utilizado el hecho de que las unidades siguen la leyes comunes del álgebra.

5.38. Hallar la desviación típica de las estaturas de los 100 estudiantes de la Universidad XYZ Véase Problema 5.33.

Del Problema 5.33, $x = 67.45$ pulgadas. La solución puede ordenarse como se indica en la Tabla 5-11.

Tabla 5-11

Estatura (pulgadas)	Marca de clase x	$x - \bar{x} = x - 67.45$	$(x-\bar{x})^2$	Frecuencia f	$f(x-\bar{x})^2$
60–62	61	−6.45	41.6025	5	208.0125
63–65	64	−3.45	11.9025	18	214.2450
66–68	67	−0.45	0.2025	42	8.5050
69–71	70	2.55	6.5025	27	175.5675
72–74	73	5.55	30.8025	8	246.4200
				$n = \Sigma f = 100$	$\Sigma f(x-\bar{x})^2 =$ 852.7500

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f(x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{852.7500}{100}} = \sqrt{8.5275} = 2.92 \text{ pulgadas}$$

5.39. Derivar la fórmula clave (*28*), página 164, para la varianza.

Como en el Problema 5.34 tenemos $x_j = a + cu_j$ y

$$\bar{x} = a + c\frac{\Sigma f_j u_j}{n} = a + c\bar{u}$$

Entonces

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n}\sum f_j(x_j-\bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum f_j(cu_j-c\bar{u})^2 \\ &= \frac{c^2}{n}\sum f_j(u_j-\bar{u})^2 \\ &= \frac{c^2}{n}\sum f_j(u_j^2-2u_j\bar{u}+\bar{u}^2) \\ &= \frac{c^2}{n}\sum f_ju_j^2 - \frac{2\bar{u}c^2}{n}\sum f_ju_j + \frac{c^2}{n}\sum f_j\bar{u}^2 \\ &= c^2\frac{\sum f_ju_j^2}{n} - 2\bar{u}^2c^2 + c^2\bar{u}^2 \\ &= c^2\frac{\sum f_ju_j^2}{n} - c^2\left(\frac{\sum f_ju_j}{n}\right)^2 \\ &= c^2\left[\frac{\sum fu^2}{n} - \left(\frac{\sum fu}{n}\right)^2\right] \\ &= c^2[\overline{u^2}-\bar{u}^2] \end{aligned}$$

5.40. Utilizar la fórmula clave del Problema 5.39 para hallar la desviación típica de las estaturas en el Problema 5.33.

La solución puede ordenarse como se indica en la Tabla 5-12. Esto nos permite hallar x como en el Problema 5.35. De la última columna tenemos

$$\begin{aligned} s^2 &= c^2\left[\frac{\sum fu^2}{n} - \left(\frac{\sum fu}{n}\right)^2\right] = c^2(\overline{u^2}-\bar{u}^2) \\ &= (3)^2\left[\frac{97}{100} - \left(\frac{15}{100}\right)^2\right] = 8.5275 \end{aligned}$$

y $s = 2.92$ pulgadas.

Tabla 5-12

x	u	f	fu	fu^2
61	−2	5	−10	20
64	−1	18	−18	18
$a \rightarrow$ 67	0	42	0	0
70	1	27	27	27
73	2	8	8	32
		$n = \sum f = 100$	$\sum fu = 15$	$\sum fu^2 = 97$

5.41. Hallar los primeros cuatro momentos con respecto a la media para la distribución de estaturas del Problema 5.33.

Continuando el método del Problema 5.40 obtenemos la Tabla 5-13.

Tabla 5-13

x	u	f	fu	fu^2	fu^3	fu^4
61	−2	5	−10	20	−40	80
64	−1	18	−18	18	−18	18
67	0	42	0	0	0	0
70	1	27	27	27	27	27
73	2	8	16	32	64	128
		$n = \sum f = 100$	$\sum fu = 15$	$\sum fu^2 = 97$	$\sum fu^3 = 33$	$\sum fu^4 = 253$

Entonces, utilizando la notación de la página 165, tenemos

$$M_1' = \frac{\Sigma fu}{n} = 0.15 \qquad M_3' = \frac{\Sigma fu^3}{n} = 0.33$$

$$M_2' = \frac{\Sigma fu^2}{n} = 0.97 \qquad M_4' = \frac{\Sigma fu^4}{n} = 2.53$$

y de (*32*),

$$\begin{aligned} m_1 &= 0 \\ m_2 &= c^2(M_2' - M_1'^2) = 9[0.97 - (0.15)^2] = 8.5275 \\ m_3 &= c^3(M_3' - 3M_1'M_2' + 2M_1'^3) = 27[0.33 - 3(0.15)(0.97) + 2(0.15)^3] = -2.6932 \\ m_4 &= c^4(M_4' - 4M_1'M_3' + 6M_1'^2M_2' - 3M_1'^4) \\ &= 81[2.53 - 4(0.15)(0.33) + 6(0.15)^2(0.97) - 3(0.15)^4] = 199.3759 \end{aligned}$$

5.42. Hallar los coeficientes de (*a*) sesgo y (*b*) curtosis para la distribución de estaturas del Problema 5.33.

(*a*) Del Problema 5.41,

$$m_2 = s^2 = 8.5275 \qquad m_3 = -2.6932$$

Entonces Coeficiente de sesgo $= a_3 = \dfrac{m_3}{s^3}$

$$= \frac{-2.6932}{\sqrt{(8.5275)^3}} = -0.14$$

(*b*) Del Problema 5.41,

$$m_4 = 199.3759 \qquad m_2 = s^2 = 8.5275$$

Entonces Coeficiente de curtosis $= a_4 = \dfrac{m_4}{s^4}$

$$= \frac{199.3759}{(8.5275)^2} = 2.74$$

De (*a*) vemos que la distribución está moderadamente sesgada a la izquierda. De (*b*) vemos que es menos apuntada que la distribución normal (que tiene un coeficiente de curtosis = 3).

PROBLEMAS DIVERSOS

5.43. (*a*) Demostrar cómo escoger 30 muestras aleatorias de 4 estudiantes cada una (con remplazamiento) de la tabla de estaturas en la página 163 utilizando números aleatorios. (*b*) Hallar la media y la desviación típica de la distribución muestral de medias en (*a*). (*c*) Comparar los resultados de (*b*) con los valores teóricos, explicando cualquier discrepancia.

(*a*) Emplear dos dígitos para numerar a cada uno de los 100 estudiantes: 00, 01, 02, . . . , 99 (véase Tabla 5-14). Así los 5 estudiantes con estaturas 60—62 pulgadas se numeran 00—04, los 18 estudiantes con estaturas 63—65 pulgadas se numeran 05—22, etc. Cada número de estudiantes se denomina *número muestral.*

Entonces extraeremos números muestrales de la tabla de números aleatorios (Apéndice I). Del primer renglón hallamos la secuencia 51, 77, 27, 46, 40, etc., que tomamos como números muestrales aleatorios, cada uno de los cuales determina la estatura de un estudiante determinado. Así 51 corresponde a un estudiante con estatura 66—68 pulgadas, que tomamos como 67 pulgadas (la marca de clase). En forma semejante 77, 27, 46 resultan en estaturas de 70, 67, 67 pulgadas respectivamente.

Tabla 5-14

Estatura (pulgadas)	Frecuencia	Número muestral
60—62	5	00—04
63—65	18	05—22
66—68	42	23—64
69—71	27	65—91
72—74	8	92—99

Por este proceso obtenemos la Tabla 5-15 que muestra los números muestrales extraídos, las estaturas correspondientes y la estatura media para cada una de las 30 muestras. Debe mencionarse que aunque escogimos el primer renglón de la tabla de números aleatorios habríamos podido iniciar *en cualquier parte* y escoger cualquier patrón determinado.

Tabla 5-15

Números muestrales extraídos	Estaturas correspondientes	Estatura media	Números muestrales extraídos	Estaturas correspondientes	Estatura media
1. 51, 77, 27, 46	67, 70, 67, 67	67.75	**16.** 11, 64, 55, 58	64, 67, 67, 67	66.25
2. 40, 42, 33, 12	67, 67, 67, 64	66.25	**17.** 70, 56, 97, 43	70, 67, 73, 67	69.25
3. 90, 44, 46, 62	70, 67, 67, 67	67.75	**18.** 74, 28, 93, 50	70, 67, 73, 67	69.25
4. 16, 28, 98, 93	64, 67, 73, 73	69.25	**19.** 79, 42, 71, 30	70, 67, 70, 67	68.50
5. 58, 20, 41, 86	67, 64, 67, 70	67.00	**20.** 58, 60, 21, 33	67, 67, 64, 67	66.25
6. 19, 64, 08, 70	64, 67, 64, 70	66.25	**21.** 75, 79, 74, 54	70, 70, 70, 67	69.25
7. 56, 24, 03, 32	67, 67, 61, 67	65.50	**22.** 06, 31, 04, 18	64, 67, 61, 64	64.00
8. 34, 91, 83, 58	67, 70, 70, 67	68.50	**23.** 67, 07, 12, 97	70, 64, 64, 73	67.75
9. 70, 65, 68, 21	70, 70, 70, 64	68.50	**24.** 31, 71, 69, 88	67, 70, 70, 70	69.25
10. 96, 02, 13, 87	73, 61, 64, 70	67.00	**25.** 11, 64, 21, 87	64, 67, 64, 70	66.25
11. 76, 10, 51, 08	70, 64, 67, 64	66.25	**26.** 03, 58, 57, 93	61, 67, 67, 73	67.00
12. 63, 97, 45, 39	67, 73, 67, 67	68.50	**27.** 53, 81, 93, 88	67, 70, 73, 70	70.00
13. 05, 81, 45, 93	64, 70, 67, 73	68.50	**28.** 23, 22, 96, 79	67, 64, 73, 70	68.50
14. 96, 01, 73, 52	73, 61, 70, 67	67.75	**29.** 98, 56, 59, 36	73, 67, 67, 67	68.50
15. 07, 82, 54, 24	64, 70, 67, 67	67.00	**30.** 08, 15, 08, 84	64, 64, 64, 70	65.50

Tabla 5-16

Media muestral	Cuenta	f	u	fu	fu^2
64.00	/	1	−4	−4	16
64.75		0	−3	0	0
65.50	//	2	−2	−4	8
66.25	𝍸 /	6	−1	−6	6
$a \longrightarrow$ 67.00	////	4	0	0	0
67.75	////	4	1	4	4
68.50	𝍸 //	7	2	14	28
69.25	𝍸	5	3	15	45
70.00	/	1	4	4	16
		$\Sigma f = n = 30$		$\Sigma fu = 23$	$\Sigma fu^2 = 123$

(*b*) La Tabla 5-16 da la distribución de frecuencias de la media muestral de las estaturas obtenidas en (*a*). Esta es una *distribución muestral de medias.* La media y la desviación típica se obtienen como es usual por los métodos claves descritos anteriormente.

$$\text{Media} \;=\; a + c\bar{u} \;=\; a + \frac{c\,\Sigma fu}{n} \;=\; 67.00 + \frac{(0.75)(23)}{30} \;=\; 67.58 \text{ pulgadas}$$

$$\text{Desviación típica} \;=\; c\sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2} \;=\; c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fu}{n}\right)^2}$$

$$= \;(0.75)\sqrt{\frac{123}{30} - \left(\frac{23}{30}\right)^2} \;=\; 1.41 \text{ pulgadas}$$

(*c*) La media teórica de la distribución muestral de medias, dada por $\mu_{\bar{X}}$, es igual a la media poblacional μ que es 67.45 pulgadas (véase Problema 5.33), de acuerdo con el valor de 67.58 pulgadas de la parte (*b*).

La desviación típica teórica (error típico) de la distribución muestral de medias, dada por $\sigma_{\bar{X}}$, es igual a $\sigma/\sqrt{n}$, donde la desviación típica poblacional $\sigma = 2.92$ pulgadas (véase Problema 5.40) y el tamaño de la muestra $n = 4$. Puesto que $\sigma/\sqrt{n} = 2.92/\sqrt{4} = 1.46$ pulgadas, estamos de acuerdo con el valor de 1.41 pulgadas de la parte (*b*). Las discrepancias se deben a que solamente 30 muestras fueron seleccionadas y el tamaño de la muestra fue pequeño.

5.44. La desviación típica de los pesos de una población muy grande de estudiantes es de 10.0 libras. Se escogen muestras de 200 estudiantes de esta población y se calculan las desviaciones típicas de las estaturas de cada muestra. Hallar (*a*) la media y (*b*) la desviación típica de la distribución muestral de las desviaciones típicas.

Podemos considerar que el muestreo es o de una población infinita o con remplazamiento de una población finita. De la Tabla 5-1, página 162, tenemos:

(*a*)
$$\mu_S = \sigma = 10.0 \text{ lb}$$

(*b*)
$$\sigma_S = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = \frac{10}{\sqrt{400}} = 0.50 \text{ lb}$$

5.45. ¿Qué porcentaje de las muestras del Problema 5.44 tendrían desviaciones típicas (*a*) mayores que 11.0 libras, (*b*) menores que 8.8 libras?

La distribución muestral de desviaciones típicas es aproximadamente normal con media 10.0 libras y desviación típica 0.50 libras.

(*a*) 11.0 libras en unidades típicas = (11.0 − 10.0)/0.50 = 2.0. El área bajo la curva normal a la derecha de $z = 2.0$ es (0.5 − 0.4772) = 0.0228; por tanto el porcentaje pedido es 2.3%.

(*b*) 8.8 libras en unidades típicas = (8.8 − 10.0)/0.50 = −2.4. El área bajo la curva normal a la izquierda de $z = -2.4$ es (0.5 − 0.4918) = 0.0082; por tanto el porcentaje pedido es 0.8%.

5.46. Una muestra de 6 observaciones se hace aleatoriamente de una población. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos últimas observaciones sean menores que las primeras cuatro?

Suponemos que la población tiene función de densidad $f(x)$. La probabilidad de que 3 de las primeras 4 observaciones sean mayores a u mientras que la cuarta observación se encuentre entre u y $u + du$ está dada por

(*1*)
$$ {}_4C_3 \left[\int_u^\infty f(x)\,dx \right]^3 f(u)\,du $$

La probabilidad de que las 2 últimas observaciones sean menores que u (y por tanto menores que las primeras 4) está dada por

(*2*)
$$ \left[\int_{-\infty}^u f(x)\,dx \right]^2 $$

Entonces la probabilidad de que las primeras 4 sean mayores que u y las 2 últimas sean menores que u es el producto de (*1*) y (*2*), es decir

(*3*)
$$ {}_4C_3 \left[\int_u^\infty f(x)\,dx \right]^3 f(u)\,du \left[\int_{-\infty}^u f(x)\,dx \right]^2 $$

Puesto que u puede tomar valores entre $-\infty$ e ∞ la probabilidad total de que las 2 últimas observaciones sean menores que las primeras 4 es la integral de (*3*) desde $-\infty$ hasta ∞, esto es

(*4*)
$$ {}_4C_3 \int_{-\infty}^\infty \left[\int_u^\infty f(x)\,dx \right]^3 \left[\int_{-\infty}^u f(x)\,dx \right]^2 f(u)\,du $$

Para evaluar esta expresión hacemos

$$(5) \qquad v = \int_{-\infty}^{u} f(x)\,dx$$

Entonces

$$(6) \qquad dv = f(u)\,du \qquad 1 - v = \int_{u}^{\infty} f(x)\,dx$$

Cuando $u = \infty$, $v = 1$ y cuando $u = -\infty$, $v = 0$. Por tanto (*4*) se convierte en

$${}_4C_3 \int_0^1 v^2(1-v)^3\,dv = 4\,\frac{\Gamma(3)\,\Gamma(4)}{\Gamma(7)} = \frac{1}{15}$$

que es la probabilidad pedida. Es interesante notar que la probabilidad no depende de la distribución de probabilidad $f(x)$. Este es un ejemplo del *estadístico no paramétrico* puesto que no se necesita conocer ningún parámetro poblacional.

5.47. Sea $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ una muestra aleatoria de tamaño n extraída sin remplazamiento de una población finita de tamaño N. Demostrar que si la media y varianza poblacional son μ y σ^2 entonces (*a*) $E(X_j) = \mu$, (*b*) $\operatorname{Cov}(X_j, X_k) = -\sigma^2/(N-1)$.

Suponer que la población consiste del conjunto de números $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N\}$, donde las α no son necesariamente distintas. Un procedimiento de muestreo aleatorio es aquel bajo el cual cada selección de n de un total de N α tiene la misma probabilidad (es decir $1/{}_NC_n$). Esto quiere decir que las X_j están distribuidas idénticamente.

$$X_j = \begin{cases} \alpha_1 & \text{prob. } 1/N \\ \alpha_2 & \text{prob. } 1/N \\ \vdots & \\ \alpha_N & \text{prob. } 1/N \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Sin embargo, no son mutuamente independientes. En verdad, cuando $j \neq k$, la distribución conjunta de X_j y X_k está dada por

$$\begin{aligned} P(X_j = \alpha_\lambda, X_k = \alpha_\nu) &= P(X_j = \alpha_\lambda)\,P(X_k = \alpha_\nu \mid X_j = \alpha_\lambda) \\ &= \frac{1}{N} P(X_k = \alpha_\nu \mid X_j = \alpha_\lambda) \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{1}{N-1}\right) & \lambda \neq \nu \\ 0 & \lambda = \nu \end{cases} \end{aligned}$$

donde λ y ν varían de 1 a N.

$$(a) \qquad E(X_j) = \sum_{\lambda=1}^{N} \alpha_\lambda P(X_j = \alpha_\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{\lambda=1}^{N} \alpha_\lambda = \mu$$

$$\begin{aligned} (b) \qquad \operatorname{Cov}(X_j, X_k) &= E[X_j - \mu)(X_k - \mu)] \\ &= \sum_{\lambda=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N} (\alpha_\lambda - \mu)(\alpha_\nu - \mu)\,P(X_j = \alpha_\lambda, X_k = \alpha_\nu) \\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N-1}\right) \sum_{\lambda \neq \nu = 1}^{N} (\alpha_\lambda - \mu)(\alpha_\nu - \mu) \end{aligned}$$

donde la última suma contiene un total de $N(N-1)$ términos, que corresponden a todas las parejas posibles de λ y ν desiguales.

Entonces, por álgebra elemental,

$$[(\alpha_1 - \mu) + (\alpha_2 - \mu) + \cdots + (\alpha_N - \mu)]^2 = \sum_{\lambda=1}^{N} (\alpha_\lambda - \mu)^2 + \sum_{\lambda \neq \nu = 1}^{N} (\alpha_\lambda - \mu)(\alpha_\nu - \mu)$$

En esta ecuación, el lado izquierdo es cero, ya que por definición

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N = N\mu$$

y la primera suma en el lado derecho es igual a $N\sigma^2$, por definición. Por tanto

$$\sum_{\lambda \neq \nu = 1}^{N} (\alpha_\lambda - \mu)(\alpha_\nu - \mu) = -N\sigma^2$$

y

$$\text{Cov}(X_j, X_k) = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N-1}\right)(-N\sigma^2) = -\frac{\sigma^2}{N-1}$$

5.48. Demostrar que (*a*) la media y (*b*) la varianza de la media muestral del Problema 5.47 están dadas respectivamente por

$$\mu_{\bar{X}} = \mu \qquad \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

(*a*)

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}[E(X_1) + \cdots + E(X_n)]$$

$$= \frac{1}{n}(\mu + \cdots + \mu) = \mu$$

donde hemos empleado el Problema 5.47 (*a*).

(*b*) Utilizando los Teoremas 3-5 y 3-16 (generalizados), y el Problema 5-47, obtenemos

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\,\text{Var}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{j=1}^{n} \text{Var}(X_j) + \sum_{j\neq k=1}^{n} \text{Cov}(X_j, X_k)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[n\sigma^2 + n(n-1)\left(-\frac{\sigma^2}{N-1}\right)\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}\left[1 - \frac{n-1}{N-1}\right] = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Problemas suplementarios

DISTRIBUCION MUESTRAL DE MEDIAS

5.49. Una población está formada por los cuatro números 3, 7, 11, 15. Considerar todas las posibles muestras de tamaño dos que pueden extraerse de esta población con remplazamiento. Hallar (*a*) la media poblacional, (*b*) la desviación típica poblacional, (*c*) la media de la distribución muestral de medias, (*d*) la desviación típica de la distribución muestral de medias. Encontrar (*c*) y (*d*) directamente de (*a*) y (*b*) mediante las fórmulas adecuadas.

5.50. Resolver el Problema 5.49 si el muestreo fuese sin remplazamiento.

5.51. Los pesos de 1500 cojinetes de bolas se distribuyen normalmente con media 22.40 onzas y desviación típica 0.048 onzas. Si se extraen 300 muestras de tamaño 36 de esta población, determinar la media y la desviación típica esperadas de la distribución muestral de medias si el muestreo se hace (*a*) con remplazamiento, (*b*) sin remplazamiento.

5.52. Resolver el Problema 5.51 si la población se compone de 72 cojinetes.

5.53. En el Problema 5.51, ¿en cuántas de las muestras aleatorias cabe esperar que sus medias (*a*) estén entre 22.39 y 22.41 onzas, (*b*) sean mayor de 22.42 onzas, (*c*) sean menor de 22.37 onzas, (*d*) sean menor de 22.38 o mayor de 22.41 onzas?

5.54. Ciertos tubos fabricados por una compañía tienen una duración media de 800 horas y una desviación típica de 60 horas. Hallar la probabilidad de que una muestra aleatoria de 16 tubos, tomada de entre ellos tenga una duración media de (*a*) entre 790 y 810 horas, (*b*) menor de 785, (*c*) mayor de 820 horas, (*d*) entre 770 y 830 horas.

5.55. Lo mismo del Problema 5.54 si la muestra extraída es de 64 tubos. Explicar la diferencia.

5.56. Los pesos de los paquetes recibidos en un departamento de almacenamiento tienen una media de 300 libras y una desviación típica de 50 libras. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso de 25 paquetes recibidos aleatoriamente y cargados en un ascensor supere el límite de seguridad del ascensor, que es de 8200 libras?

DISTRIBUCION MUESTRAL DE PROPORCIONES

5.57. Hallar la probabilidad de que de los próximos 200 niños nacidos (*a*) menos del 40% sean niños, (*b*) entre el 43% y el 57% sean niñas, (*c*) más del 54% sean niños. Supónganse iguales las probabilidades de nacimientos de niño y niña.

5.58. De un total de 1000 muestras de 200 niños cada una, ¿en cuántas cabe esperar que (*a*) menos del 40% sean niños, (*b*) entre el 40% y el 60% sean niñas, (*c*) el 53% o más sean niñas?

5.59. Resolver el Problema 5.57 si se consideran 100 en lugar de 200 niños y explicar las diferencias en los resultados.

5.60. Una urna contiene 80 bolas de las que 60% son rojas y 40% blancas. De un total de 50 muestras de 20 bolas cada una, sacadas de la urna con remplazamiento, ¿en cuántas cabe esperar (*a*) igual número de bolas rojas y blancas, (*b*) 12 bolas rojas y 8 blancas, (*c*) 8 bolas rojas y 12 blancas, (*d*) 10 o más bolas blancas?

5.61. Diseñar un experimento que ponga de manifiesto los resultados del Problema 5.60. En lugar de bolas rojas y blancas, se pueden usar hojas de papel, sobre las que se escriba la inicial R o B en las proporciones adecuadas. ¿Qué errores pueden introducirse al utilizar dos conjuntos diferentes de monedas?

5.62. Un fabricante despacha 1000 lotes de 100 bombillas cada uno. Si normalmente el 5% de las bombillas es defectuoso, ¿en cuántos lotes cabe esperar (*a*) menos de 90 bombillas buenas, (*b*) 98 o más bombillas buenas?

DISTRIBUCIONES MUESTRALES DE DIFERENCIAS Y SUMAS

5.63. A y B fabrican dos tipos de cables, que tienen unas resistencias medias a la rotura de 4000 y 4500 libras con desviaciones típicas de 300 y 200 libras, respectivamente. Si se comprueban 100 cables de A y 50 cables de B, ¿cuál es la probabilidad de que la media de resistencia a la rotura sea de (*a*) al menos 600 libras más que A, (*b*) al menos 450 libras más que A?

5.64. ¿Cuáles son las probabilidades del Problema 5.63 si se comprueban 100 cables de cada fabricante? Explicar las diferencias.

5.65. En una prueba de aptitud la puntuación media de los estudiantes es de 72 puntos y la desviación típica de 8 puntos. ¿Cuál es la probabilidad de que dos grupos de estudiantes, formados de 28 y 36 estudiantes, respectivamente, difieran en su puntuación media en (*a*) 3 o más puntos, (*b*) 6 o más puntos, (*c*) entre 2 y 5 puntos?

5.66. Una urna tiene 60 bolas rojas y 40 blancas. Se extraen dos colecciones de 30 bolas cada una con remplazamiento y se anotan sus colores. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos colecciones difieran en 8 o más bolas rojas?

5.67. Resolver el Problema 5.66 si las extracciones son sin remplazamiento al obtener cada colección.

5.68. Los resultados de una elección mostraron que un cierto candidato recibió el 65% de los votos. Hallar la probabilidad de que en dos muestras aleatorias compuesta cada una de 200 votantes, haya una diferencia superior al 10% en las proporciones que votaron por dicho candidato.

5.69. Si U_1 y U_2 son los conjuntos de números del Problema 5.12, comprobar que

(a) $\mu_{U_1+U_2} = \mu_{U_1} + \mu_{U_2}$; (b) $\sigma_{U_1+U_2} = \sqrt{\sigma^2_{U_1} + \sigma^2_{U_2}}$.

5.70. Se pesan tres cantidades dando 20.48, 35.97 y 62.34 libras con desviaciones típicas de 0.21, 0.46 y 0.54 libras, respectivamente. Hallar (a) la media y (b) la desviación típica de la suma de las cantidades.

5.71. El voltaje medio de una batería es de 15.0 voltios y la desviación típica 0.2 voltios. ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro de estas baterías conectadas en serie tengan un voltaje conjunto de 60.8 o más voltios?

DISTRIBUCION MUESTRAL DE VARIANZAS

5.72. Con referencia al Problema 5.49, hallar (a) la media de la distribución muestral de varianzas, (b) el error típico de varianzas.

5.73. Resolver el Problema 5.72 si el muestreo es sin remplazamiento.

5.74. Una población normal tiene una varianza de 15. Si se extraen muestras de tamaño 5 de esta población, ¿qué porcentaje puede tener varianzas (a) menores que 10, (b) mayores que 20, (c) entre 5 y 10?

5.75. Se halla que la duración de tubos de televisión fabricados por una compañía tienen una media de 2000 horas y una desviación de 60 horas. Si se seleccionan 10 tubos aleatoriamente hallar la probabilidad de que la desviación típica muestral (a) no exceda a 50 horas, (b) se encuentre entre 50 y 70 horas.

CASO DONDE SE DESCONOCE LA VARIANZA POBLACIONAL

5.76. De acuerdo con la tabla de distribución t de Student para 1 grado de libertad (Apéndice D) tenemos $P(-1 \leqq T \leqq 1) = 0.50$. Verificar si los resultados del Problema 5.1 se confirman por este valor y explicar cualquier diferencia.

5.77. Verificar si los resultados del Problema 5.49 se confirman utilizando (a) $P(-1 \leqq T \leqq 1) = 0.50$, (b) $P(-1.376 \leqq T \leqq 1.376) = 0.60$, donde T tiene una distribución t de Student con $\nu = 1$.

5.78. Explicar cómo podría utilizar el Teorema 5-7, página 161, para diseñar una tabla de distribución t de Student como la dada en el Apéndice D.

DISTRIBUCION MUESTRAL DE RELACIONES DE VARIANZAS

5.79. Dos muestras de tamaños 4 y 8 se extraen de una población distribuida normalmente. ¿Es la probabilidad de que una varianza sea mayor que 1.5 veces la otra mayor que 0.05, entre 0.05 y 0.01, o menor que 0.01?

5.80. Dos compañías, A y B fabrican bombillas. La duración para A tiene una desviación de 40 horas en tanto que la duración de B tiene una desviación típica de 50 horas. Una muestra de 8 bombillas se toma de A y 16 de B. Determinar la probabilidad de que la varianza de la primera muestra sea mayor que (a) dos veces, (b) 1.2 veces, la de la segunda.

5.81. Solucionar el Problema 5.80 si las desviaciones típicas de las duraciones son (a) ambas 40 horas, (b) ambas 50 horas.

DISTRIBUCION DE FRECUENCIA

5.82. La Tabla 5-17 muestra una distribución de frecuencias de la duración de 400 tubos de radio comprobados en la L & M Tube Company. Con referencia a esta tabla determinar:

(a) Límite superior de la quinta clase.
(b) Límite inferior de la octava clase.
(c) Marca de clase de la séptima clase.
(d) Límites reales de la última clase.
(e) Tamaño del intervalo de clase.
(f) Frecuencia de la cuarta clase.
(g) Frecuencia relativa de la sexta clase.
(h) Porcentaje de tubos cuya duración no sobrepasa las 600 horas.

Tabla 5-17

Duración (horas)	Número de tubos
300 – 399	14
400 – 499	46
500 – 599	58
600 – 699	76
700 – 799	68
800 – 899	62
900 – 999	48
1000–1099	22
1100–1199	6
TOTAL	400

(*i*) Porcentaje de tubos cuya duración es mayor o igual a 900 horas.
(*j*) Porcentaje de tubos cuya duración es al menos de 500 horas pero menor de 1000 horas.

5.83. Construir (*a*) un histograma y (*b*) un polígono de frecuencias correspondientes a la distribución de frecuencias del Problema 5.82.

5.84. Para los datos del Problema 5.82 construir (*a*) una distribución de frecuencias relativas o porcentual, (*b*) un histograma de frecuencias relativas, (*c*) un polígono de frecuencias relativas.

5.85. Para los datos del Problema 5.82 construir (*a*) una distribución de frecuencias acumuladas, (*b*) una distribución acumulada relativa o porcentual, (*c*) una ojiva, (*d*) una ojiva porcentual.

5.86. Estimar el porcentaje de tubos del Problema 5.82 con duraciones de (*a*) menos de 560 horas, (*b*) 970 o más horas, (*c*) entre 620 y 890 horas.

5.87. Los diámetros interiores de las arandelas producidas por una compañía pueden medirse con aproximación de milésimas de pulgada. Si las marcas de clase de una distribución de frecuencias de estos diámetros vienen dadas en pulgadas por los números 0.321, 0.324, 0.327, 0.330, 0.333 y 0.336, hallar (*a*) el tamaño de intervalo de clase, (*b*) los límites reales de clase, (*c*) los límites de clase.

5.88. La Tabla 5-18 muestra los diámetros en pulgadas de una muestra de 60 cojinetes de bolas fabricados por una compañía. Construir una distribución de frecuencias de los diámetros utilizando intervalos de clase adecuados.

Tabla 5-18

0.738	0.729	0.743	0.740	0.736	0.741	0.735	0.731	0.726	0.737
0.728	0.737	0.736	0.735	0.724	0.733	0.742	0.736	0.739	0.735
0.745	0.736	0.742	0.740	0.728	0.738	0.725	0.733	0.734	0.732
0.733	0.730	0.732	0.730	0.739	0.734	0.738	0.739	0.727	0.735
0.735	0.732	0.735	0.727	0.734	0.732	0.736	0.741	0.736	0.744
0.732	0.737	0.731	0.746	0.735	0.735	0.729	0.734	0.730	0.740

5.89. Con los datos del Problema 5.88 construir (*a*) un histograma, (*b*) un polígono de frecuencias, (*c*) una distribución de frecuencias relativas, (*d*) un histograma de frecuencias relativas, (*e*) un polígono de frecuencias relativas, (*f*) una distribución de frecuencias acumuladas, (*g*) una distribución acumulada porcentual, (*h*) una ojiva, (*i*) una ojiva porcentual.

5.90. Con los resultados del Problema 5.89 determinar el porcentaje de cojinetes de bolas que tienen diámetros (*a*) superiores a 0.732 pulgadas, (*b*) no superiores a 0.736 pulgadas, (*c*) entre 0.730 y 0.738 pulgadas. Comparar estos resultados con los obtenidos directamente de la colección de datos de la Tabla 5-18.

5.91. Resolver el Problema 5.89 para los datos del Problema 5.82.

CALCULO DE LA MEDIA, DESVIACION TIPICA Y MOMENTOS PARA MUESTRAS

5.92. Las calificaciones de un estudiante en cinco asignaturas fueron 85, 76, 93, 82 y 96. Hallar la media aritmética de dichas calificaciones.

5.93. Los tiempos de reacción de un individuo a determinados estímulos fueron 0.53, 0.46, 0.50, 0.49, 0.52, 0.53, 0.44 y 0.55 segundos, respectivamente. Determinar el tiempo medio de reacción del individuo a los estímulos.

5.94. Una serie de números está formada por seis 6, siete 7, ocho 8, nueve 9 y diez 10. ¿Cuál es su media aritmética ?

5.95. Las calificaciones de un estudiante en las tres asignaturas del curso fueron 71, 78 y 89. (*a*) Si las ponderaciones asignadas a cada asignatura son 2, 4 y 5, respectivamente, ¿cuál es el promedio adecuado para sus calificaciones? (*b*) ¿Cuál sería si todas las ponderaciones son iguales?

5.96. Tres profesores de economía registraron una calificación media en sus exámenes de 79, 74 y 82; sus clases

estaban formadas por 32, 25 y 17 estudiantes, respectivamente. Determinar la calificación media para todas las clases.

5.97. **El salario medio anual pagado a todos los empleados de una compañía fue de \$5000. Los salarios medios anuales pagados a hombres y mujeres de la compañía fueron \$5200 y \$4200, respectivamente. Determinar el porcentaje de hombres y mujeres empleados en la compañía.**

5.98. **La Tabla 5-19 muestra la distribución de las cargas máximas en toneladas cortas (1 tonelada corta = 2000 libras) que soportan ciertos cables producidos por una compañía. Determinar la media de la carga máxima empleando (*a*) el "método largo", (*b*) el método clave.**

Tabla 5-19

Carga máxima (toneladas cortas)	Número de cables
9.3– 9.7	2
9.8–10.2	5
10.3–10.7	12
10.8–11.2	17
11.3–11.7	14
11.8–12.2	6
12.3–12.7	3
12.8–13.2	1
TOTAL	60

5.99. **Hallar $\bar{x}$ para los datos de la Tabla 5-20 empleando (*a*) el "método largo", (*b*) el método clave.**

Tabla 5-20

x	462	480	498	516	534	552	570	588	606	624
f	98	75	56	42	30	21	15	11	6	2

5.100. **La Tabla 5-21 muestra la distribución de los diámetros de las cabezas de los remaches fabricados por una compañía. Calcular el diámetro medio.**

Tabla 5-21

Diámetro (pulgadas)	Frecuencia
0.7247–0.7249	2
0.7250–0.7252	6
0.7253–0.7255	8
0.7256–0.7258	15
0.7259–0.7261	42
0.7262–0.7264	68
0.7265–0.7267	49
0.7268–0.7270	25
0.7271–0.7273	18
0.7274–0.7276	12
0.7277–0.7279	4
0.7280–0.7282	1
TOTAL	250

Tabla 5-22

Clase	Frecuencia
10—menos de 15	3
15—menos de 20	7
20—menos de 25	16
25—menos de 30	12
30—menos de 35	9
35—menos de 40	5
40—menos de 45	2
TOTAL	54

5.101. **Calcular la media de los datos de la Tabla 5-22.**

5.102. **Hallar la desviación típica de los números:**
(*a*) 3, 6, 2, 1, 7, 5; (*b*) 3.2, 4.6, 2.8, 5.2, 4.4; (*c*) 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1.

5.103. (*a*) **Sumando 5 a cada uno de los números de la serie 3, 6, 2, 1, 7, 5 se obtiene la serie 8, 11, 7, 6, 12, 10. Demostrar que las dos series tienen las mismas desviaciones típicas, pero diferentes medias. ¿Cómo están relacionadas las medias?**

(*b*) **Multiplicando cada uno de los números 3, 6, 2, 1, 7, 5 por 2 y después sumando 5 se obtiene la serie 11, 17, 9, 7, 19, 15. ¿Cuáles son las relaciones entre las desviaciones típicas y las medias de las dos series?**

(*c*) **¿Qué propiedades de la media y de la desviación típica se ponen de manifiesto por las series de los números de los apartados (*a*) y (*b*)?**

5.104. **Hallar la desviación típica de la serie de números de la progresión aritmética 4, 10, 16, 22, . . . , 154.**

5.105. **Hallar la desviación típica para las distribuciones del (*a*) Problema 5.98, (*b*) 5.99.**

5.106. Hallar (*a*) la media y (*b*) la desviación típica para la distribución del Problema 5.30 explicando el significado de los resultados obtenidos.

5.107. (*a*) Hallar la desviación típica s de los diámetros de los remaches del Problema 5.100. (*b*) ¿Qué porcentaje de diámetros se encuentra entre $(\bar{x} \pm s)$, $(\bar{x} \pm 2s)$, $(\bar{x} \pm 3s)$? (*c*) Comparar los porcentajes de (*b*) con los teóricos esperados, si la distribución fuese normal, y comentar las diferencias observadas.

5.108. (*a*) Hallar la media y desviación típica para los datos del Problema 5.28.
(*b*) Construir una distribución de frecuencias para los datos y hallar la desviación típica.
(*c*) Comparar el resultado de (*b*) con el de (*a*).

5.109. Lo mismo del Problema 5.108 para los datos del Problema 5.88.

5.110. (*a*) De un total de n números, la fracción p son unos mientras que la fracción $q = 1 - p$ son ceros. Demostrar que la desviación típica de la serie de números es $\sqrt{pq}$. Aplicar el resultado de (*a*) al Problema 5.102(*c*).

5.111. Hallar los momentos de (*a*) primero, (*b*) segundo, (*c*) tercero y (*d*) cuarto orden de los números 4, 7, 5, 9, 8, 3, 6.

5.112. Hallar los momentos de (*a*) primero, (*b*) segundo, (*c*) tercero y (*d*) cuarto orden con respecto a la media de los números del Problema 5.111.

5.113. Hallar los momentos de (*a*) primero, (*b*) segundo, (*c*) tercero y (*d*) cuarto orden respecto al punto 7 para los números del Problema 5.111.

5.114. Con los resultados de los Problemas 5.111 y 5.112, comprobar las relaciones entre momentos (*a*) $m_2 = m_2' - m_1'^2$, (*b*) $m_3 = m_3' - 3m_1'm_2' + 2m_1'^3$, (*c*) $m_4 = m_4' - 4m_1'm_3' + 6m_1'^2m_2' - 3m_1'^4$.

5.115. Hallar los cuatro primeros momentos con respecto a la media de los números de la progresión aritmética 2, 5, 8, 11, 14, 17.

5.116. Si el momento de primer orden con respecto al punto 2 es igual a 5, ¿cuál es la media?

5.117. Si los cuatro primeros momentos de una serie de números respecto al punto 3 son iguales a -2, 10, -25 y 50, determinar los correspondientes momentos (*a*) respecto a la media, (*b*) respecto al punto 5, (*c*) respecto al origen.

5.118. Hallar los cuatro primeros momentos con respecto a la media de los números 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1.

5.119. (a) Demostrar que $m_5 = m_5' - 5m_1'm_4' + 10m_1'^2m_3' - 10m_1'^3m_2' + 4m_1'^5$. (*b*) Derivar una fórmula análoga para m_6.

5.120. De un total de n números, la fracción p son unos mientras que la fracción $q = 1 - p$ son ceros. Hallar (*a*) m_1, (*b*) m_2, (*c*) m_3 y (*d*) m_4 para los números. Comparar con el Problema 5.118.

5.121. Calcular los primeros cuatro momentos con respecto a la media para la distribución de la Tabla 5-23.

Tabla 5-23

x	f
12	1
14	4
16	6
18	10
20	7
22	2
TOTAL	30

5.122. Calcular los cuatro primeros momentos con respecto a la media para la distribución del Problema 5.98.

5.123. Hallar (*a*) m_1, (*b*) m_2, (*c*) m_3, (*d*) m_4, (*e*) $\bar{x}$, (*f*) s, (*g*) $\overline{x^2}$, (*h*) $\overline{x^3}$, (*i*) $\overline{x^4}$, y (*j*) $\overline{(x+1)^3}$ para la distribución del Problema 5.101.

5.124. Hallar el coeficiente de (*a*) sesgo, (*b*) curtosis para la distribución del Problema 5.121.

5.125. Hallar el coeficiente de (*a*) sesgo, (*b*) curtosis para la distribución del Problema 5.98. Véase Problema 5.122.

5.126. Los momentos de segundo orden con respecto a la media de dos distribuciones son 9 y 16, mientras que los momentos de tercer orden con respecto a la media son -8.1 y -12.8 respectivamente. ¿Qué distribución está más sesgada a la izquierda?

5.127. Los momentos de cuarto orden respecto a la media de las dos distribuciones del Problema 5.126 son 230 y 780 respectivamente. ¿Qué distribución se aproxima más a la distribución normal desde el punto de vista de (*a*) apuntamiento, (*b*) asimetría?

PROBLEMAS DIVERSOS

5.128. Una población de 7 números tiene una media de 40 y una desviación típica de 3. Si muestras de tamaño 5 se extraen de esta población y se calcula la varianza de cada muestra, hallar la media de la distribución muestral de varianzas si el muestreo es (*a*) con remplazamiento, (*b*) sin remplazamiento.

5.129. Determinados tubos producidos por una compañía tienen una duración de 900 horas y una desviación típica de 80 horas. La compañía envía 1000 lotes de 100 tubos cada uno. ¿En cuántos lotes cabe esperar que (*a*) la duración exceda 910 horas, (*b*) la desviación típica de la duración exceda 95 horas? ¿Qué suposiciones deben hacerse?

5.130. En el Problema 5.129 si la mediana de duración es de 900 horas, ¿en cuántos lotes cabe esperar que la mediana de duración exceda a 910 horas? Comparar su solución con el Problema 5.129(*a*) y explicar sus resultados.

5.131. En un examen las calificaciones fueron normalmente distribuidas con media 72 y desviación típica 8. (*a*) Hallar la calificación mínima del 20% superior de los estudiantes. (*b*) Hallar la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 100 estudiantes la calificación mínima del 20% superior sea menor que 76.

5.132. (*a*) Demostrar que las varianzas del conjunto de n números $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d$ (es decir una progresión aritmética con primer término a y razón d) está dada por $1/12\ (n^2-1)d^2$. [*Sugerencia:* Utilizar $1+2+3+\cdots+(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$, $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$.] (*b*) Emplear (*a*) en el Problema 5.104.

5.133. Demostrar que los primeros cuatro momentos con respecto a la media de progresión aritmética $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d$ son

$$m_1 = 0, \quad m_2 = \frac{1}{12}(n^2-1)d^2, \quad m_3 = 0, \quad m_4 = \frac{1}{240}(n^2-1)(3n^2-7)d^4$$

Comparar con el Problema 5.115. [*Sugerencia:* $1^4+2^4+3^4+\cdots+(n-1)^4 = \frac{1}{30}n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)$.]

5.134. Una muestra de 8 observaciones se hace aleatoriamente de una población. ¿Cuál es la probabilidad de que las primeras tres observaciones sean mayores que las últimas cinco?

5.135. Demostrar que V_1 y V_2 definidas en el Problema 5.22, página 175, son independientes.

5.136. Demostrar el resultado (*19*), página 160.

Capítulo 6

Teoría de estimación

ESTIMAS INSESGADAS Y ESTIMAS EFICIENTES

En el Capítulo 5 indicábamos que un estadístico se llama *estimador insesgado* de un parámetro poblacional si la media o esperanza del estadístico es igual al parámetro. El valor correspondiente del estadístico se llama *estima insesgada* del parámetro.

EJEMPLO 6.1. La media $\bar{X}$ y la varianza $\hat{S}^2$ definidas en las páginas 157 y 160 son estimadores insesgados de la media poblacional μ y de la varianza poblacional σ^2, puesto que $E(\bar{X}) = \mu$, $E(\hat{S}^2) = \sigma^2$. Los valores $\bar{x}$ y $\hat{s}^2$ se llaman estimas insesgadas. Sin embargo, $\hat{S}$ realmente es un estimador sesgado de σ, ya que en general $E(\hat{S}) \neq \sigma$.

Si las distribuciones muestrales de dos estadísticos tienen la misma media, el estadístico con la menor varianza se llama *estimador eficiente* de la media. El valor correspondiente del estadístico eficiente se llama *estima eficiente.* Lógicamente se prefiere tener estimas que sean eficientes e insesgadas, pero esto no siempre es posible.

EJEMPLO 6.2. La distribución muestral de la media y la mediana, ambas tienen la misma media, la media poblacional. Sin embargo, la varianza de la distribución muestral de medias es más pequeña que la distribución muestral de medianas. Por tanto, la media provee una estima más eficiente que la mediana. Véase Tabla 5-1, página 162.

En la práctica se utilizan estimas sesgadas o no eficientes, por la relativa facilidad con que algunas de ellas pueden obtenerse.

ESTIMAS POR PUNTOS Y ESTIMAS POR INTERVALOS. SEGURIDAD

La estima de un parámetro poblacional dada por un número se llama *estima de punto* del parámetro. La estima de un parámetro poblacional dada por dos números entre los cuales se considera que se encuentra dicho parámetro se llama *estima de intervalo* del parámetro.

EJEMPLO 6.3. Si se dice que una distancia viene dada por 5.28 pies, se está dando una estima de punto. Si, por otra parte, se dice que la distancia es 5.28 ± 0.03 pies, es decir, la distancia real se encuentra entre 5.25 y 5.31 pies, se está dando una estima de intervalo.

La precisión o conocimiento del error de una estima se conoce también como su *seguridad.*

ESTIMAS POR INTERVALOS DE CONFIANZA, DE PARAMETROS POBLACIONALES

Sean μ_S y σ_S la media y la desviación típica (error típico) de la distribución muestral de un estadístico S. Entonces, si la distribución muestral de S es aproximadamente normal (lo que se ha visto, que es cierto para muchos estadísticos, si el tamaño de muestra es $n \geqq 30$), cabe esperar que el estadístico S se encuentre en los intervalos $\mu_S - \sigma_S$ a $\mu_S + \sigma_S$, $\mu_S - 2\sigma_S$ a $\mu_S + 2\sigma_S$ ó $\mu_S - 3\sigma_S$ a $\mu_S + 3\sigma_S$, el 68.27%, 95.45% y 99.73% de las veces, respectivamente.

Análogamente cabe esperar o se puede *confiar* en encontrar, μ_S en los intervalos $S-\sigma_S$ a $S+\sigma_S$, $S-2\sigma_S$ a $S+2\sigma_S$ ó $S-3\sigma_S$ a $S+3\sigma_S$ en el 68.27%, 95.45% y 99.73% de las veces, respectivamente. Por estos se pueden llamar a estos intervalos los *intervalos de confianza* del 68.27%, 95.45% y 99.73% para la estima de μ_S (es decir, para estimar el parámetro poblacional, en el caso de un S insesgado). Los números extremos de estos intervalos ($S\pm\sigma_S$, $S\pm 2\sigma_S$, $S\pm 3\sigma_S$) son llamados *los límites de confianza* del 68.27%, 95.45% y 99.73% o, como otras veces se conocen, *límites fiduciales.*

Análogamente, $S\pm 1.96\,\sigma_S$ y $S\pm 2.58\,\sigma_S$ son los límites de confianza del 95% y 99% (ó 0.95 y 0.99) para μ_S. El porcentaje de confianza se llama también *nivel de confianza.* Los números 1.96, 2.58, etc., de los límites de confianza se llaman *coeficientes de confianza* o *valores críticos* y se denotan por z_c. De los niveles de confianza se pueden obtener los coeficientes de confianza y recíprocamente.

En la Tabla 6-1 se dan los valores de z_c que corresponden a distintos niveles de confianza utilizados en la práctica. Para niveles de confianza que no se encuentran en la tabla, los valores de z_c pueden sacarse de las tablas de la curva normal en el Apéndice C.

Tabla 6-1

Nivel de confianza	99.73%	99%	98%	96%	95.45%	95%	90%	80%	68.27%	50%
z_c	3.00	2.58	2.33	2.05	2.00	1.96	1.645	1.28	1.00	0.6745

En los casos donde un estadístico tiene una distribución muestral que es diferente de la distribución normal (como chi-cuadrado, t ó F) se hacen fácilmente modificaciones apropiadas para obtener los intervalos de confianza.

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA MEDIAS

1. **Grandes muestras** ($n \geqq 30$).

Si el estadístico S es la media muestral $\bar{X}$, entonces los límites de confianza del 95% y 99% para la estimación de la media poblacional μ, vienen dados por $\bar{X}\pm 1.96\,\sigma_{\bar{X}}$ y $\bar{X}\pm 2.58\,\sigma_{\bar{X}}$ respectivamente. Más generalmente, los límites de confianza están dados por $\bar{X}\pm z_c\sigma_{\bar{X}}$ donde z_c depende del nivel de confianza que en cada caso se desee y puede obtenerse de la tabla anterior. Utilizando los valores de $\sigma_{\bar{X}}$, obtenidos en el Capítulo 5, se puede ver que los límites de confianza para la media poblacional vienen dados por

$$\bar{X} \pm z_c\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1}$$

en el caso de muestreo en una población infinita o si el muestreo es con remplazamiento en una población finita y por

$$\bar{X} \pm z_c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \tag{2}$$

si el muestreo es sin remplazamiento en una población finita de tamaño N.

En general, la desviación típica poblacional σ es desconocida, de modo que para obtener los límites de confianza anteriores, se utiliza la estima muestral $\hat{S}$ o S.

2. **Pequeñas muestras** ($n < 30$).

En este caso utilizamos la distribución t para obtener los niveles de confianza. Por ejemplo si $-t_{.975}$ y $t_{.975}$ son los valores de T para los que el 2.5% del área se encuentra en cada "cola" de la distribución t, entonces un intervalo de confianza para T está dado por (véase página 161)

$$-t_{.975} < \frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{\hat{S}} < t_{.975} \tag{3}$$

de lo que se deduce que μ se encuentra en el intervalo

$$\bar{X} - t_{.975}\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{.975}\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

con el 95% de confianza. En general los límites de confianza para medias poblacionales están dados por

$$\bar{X} \pm t_c \frac{S}{\sqrt{n}} \tag{5}$$

donde el valor t_c puede leerse del Apéndice D.

Comparando (*5*) con (*1*) se observa que para pequeñas muestras remplazamos z_c por t_c. Para $n \geqq 30$, z_c y t_c son realmente iguales. Debe anotarse que una ventaja de la teoría de pequeñas muestras (que lógicamente puede emplearse para grandes muestras, es decir, es *exacta*) es que $\hat{S}$ aparece en (*5*) de modo que la desviación típica puede utilizarse en cambio de la desviación típica poblacional (que generalmente se desconoce) en (*1*).

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA PROPORCIONES

Si el estadístico S es la proporción de "éxitos" en una muestra de tamaño $n \geqq 30$ extraída de una población binomial en la que p es la proporción de éxito (es decir, la probabilidad de éxito), los límites de confianza para p vienen dados por $P \pm z_c\sigma_P$, donde P es la proporción de éxitos en la muestra de tamaño n. Con los valores obtenidos en el Capítulo 5 de σ_P, se tiene que los límites de confianza para la proporción poblacional son dados por

$$P \pm z_c\sqrt{\frac{pq}{n}} = P \pm z_c\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \tag{6}$$

para el caso de muestreo en una población infinita, o con remplazamiento en una población finita. Análogamente los límites de confianza son

$$P \pm z_c\sqrt{\frac{pq}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \tag{7}$$

si el muestreo es sin remplazamiento en una población finita de tamaño N. Obsérvese que estos resultados se obtienen de (*1*) y (*2*) remplazando $\bar{X}$ por P y σ por $\sqrt{pq}$.

Para calcular estos límites de confianza puede utilizarse la estima muestral P para p. Un método más exacto se da en el Problema 6.27.

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA DIFERENCIAS Y SUMAS

Si S_1 y S_2 son dos estadísticos muestrales con distribuciones muestrales aproximadamente normales, los límites de confianza para la diferencia de los parámetros poblacionales correspondientes a S_1 y S_2 vienen dados por

$$S_1 - S_2 \pm z_c\sigma_{S_1-S_2} = S_1 - S_2 \pm z_c\sqrt{\sigma^2_{S_1} + \sigma^2_{S_2}} \tag{8}$$

mientras que los límites de confianza para la suma de los parámetros poblacionales son

$$S_1 + S_2 \pm z_c\sigma_{S_1+S_2} = S_1 + S_2 \pm z_c\sqrt{\sigma^2_{S_1} + \sigma^2_{S_2}} \tag{9}$$

con tal de que las muestras sean independientes.

Por ejemplo, los límites de confianza para la diferencia de dos medias poblacionales, en el caso de que las poblaciones sean infinitas, vienen dados por

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm z_c\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm z_c\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \tag{10}$$

donde $\bar{X}_1, \sigma_1, n_1$ y $\bar{X}_2, \sigma_2, n_2$ son las respectivas medias, desviaciones típicas y tamaños de las dos muestras extraídas de las poblaciones.

Análogamente, los límites de confianza para la diferencia de dos proporciones poblacionales, siendo las poblaciones infinitas, están dados por

$$P_1 - P_2 \pm z_c\sigma_{P_1-P_2} \;=\; P_1 - P_2 \pm z_c\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} \tag{11}$$

donde P_1 y P_2 son las dos proporciones muestrales, n_1 y n_2 son los tamaños de las dos muestras extraídas de las poblaciones, y p_1 y p_2 son las proporciones en las dos poblaciones (estimadas por P_1 y P_2).

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA VARIANZAS

El hecho de que $nS^2/\sigma^2 = (n-1)\hat{S}^2/\sigma^2$ tenga una distribución chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad nos permite obtener los límites de confianza para σ^2 ó σ. Por ejemplo si $\chi^2_{.025}$ y $\chi^2_{.975}$ son los valores de χ^2 para los cuales 2.5% del área se encuentra en cada "cola" de la distribución, entonces un intervalo de confianza del 95% es

$$\chi^2_{.025} \leqq \frac{nS^2}{\sigma^2} \leqq \chi^2_{.975} \tag{12}$$

o de manera equivalente

$$\chi^2_{.025} \leqq \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \leqq \chi^2_{.975} \tag{13}$$

De esto vemos que σ puede estimarse que se encuentra en el intervalo

$$\frac{S\sqrt{n}}{\chi_{.975}} \leqq \sigma \leqq \frac{S\sqrt{n}}{\chi_{.025}} \tag{14}$$

ó

$$\frac{\hat{S}\sqrt{n-1}}{\chi_{.975}} \leqq \sigma \leqq \frac{\hat{S}\sqrt{n-1}}{\chi_{.025}} \tag{15}$$

con confianza de 95%. En forma semejante otros intervalos de confianza pueden encontrarse.

Generalmente es deseable que la amplitud del intervalo de confianza sea tan pequeño como posible. Para estadísticos con distribuciones muestrales simétricas, como las distribuciones normal y t, esto se consigue utilizando colas de áreas iguales. Sin embargo, para distribuciones no simétricas, como la distribución chi-cuadrado puede ser deseable ajustar las áreas en las colas de tal manera que se obtenga el intervalo más pequeño. El proceso se ilustra en el Problema 6.28.

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA RELACIONES DE VARIANZAS

En el Capítulo 5, página 161, vimos que si dos muestras aleatorias independientes de tamaños m y n con varianzas S_1^2, S_2^2 se extraen de dos poblaciones distribuidas normalmente de varianzas σ_1^2, σ_2^2 respectivamente, entonces la variable aleatoria $\dfrac{\hat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2}$ tiene una distribución F con $m-1, n-1$ grados de libertad. Así por ejemplo si denotamos por $F_{.01}$ y $F_{.99}$ los valores de F para los cuales 1% del área se encuentra en cada "cola" de la distribución F, entonces con 98% de confianza tenemos

$$F_{.01} \leqq \frac{\hat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2} \leqq F_{.99} \tag{16}$$

De esto podemos ver que un intervalo de confianza del 98% para la relación de varianzas σ_1^2/σ_2^2 de las dos poblaciones viene dada por

$$\frac{1}{F_{.99}}\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \leqq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leqq \frac{1}{F_{01}}\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \tag{17}$$

Adviértase que $F_{.99}$ se obtiene de la tabla del Apéndice F. El valor de $F_{.01}$ es el inverso de $F_{.99}$ con los grados de libertad para el numerador y el denominador invertidos, de acuerdo con el Teorema 4-8, página 118.

De una manera semejante podríamos hallar un intervalo de confianza del 90% empleando la tabla apropiada en el Apéndice F. Esto vendría dado por

$$\frac{1}{F_{.95}}\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{1}{F_{.05}}\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \tag{18}$$

ESTIMAS DE MAXIMA VEROSIMILITUD

Aunque los límites de confianza tienen valor para estimar un parámetro poblacional es conveniente tener un estimador por punto. Para obtener el "mejor" de tales estimadores, empleamos una técnica conocida como el *estimador de máxima verosimilitud*, debida a Fisher.

Para ilustrar el método suponemos que la población tiene una función de densidad que contiene un parámetro poblacional, por ejemplo θ, que se va a estimar por un estadístico determinado. Por tanto, la función de densidad puede denotarse por $f(x, \theta)$. Suponiendo que hay n observaciones independientes $X_1, \ldots, X_n$, la función de densidad conjunta para estas observaciones es

$$L = f(x_1, \theta)\, f(x_2, \theta) \cdots f(x_n, \theta) \tag{19}$$

que se llama la *verosimilitud*. La *máxima verosimilitud* puede obtenerse tomando la derivada de L con respecto a θ e igualándola a cero. Para este propósito es conveniente tomar primero el logaritmo y luego la derivada. De esta manera hallamos

$$\frac{1}{f(x_1, \theta)}\frac{\partial f(x_1, \theta)}{\partial \theta} + \cdots + \frac{1}{f(x_n, \theta)}\frac{\partial f(x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0 \tag{20}$$

De aquí podemos obtener θ en términos de x_k.

El método puede generalizarse. Así para el caso donde existan varios parámetros tomamos las derivadas parciales con respecto a cada uno de los parámetros, los igualamos a cero y resolvemos las ecuaciones resultantes simultáneamente.

Problemas resueltos

ESTIMAS INSESGADAS Y EFICIENTES

6.1. Dar ejemplos de estimadores (o estimas) que sean (*a*) insesgados y eficientes, (*b*) insesgados y no eficientes, (*c*) sesgados y no eficientes.

(*a*) **La media muestral $\bar{X}$ y la varianza muestral modificadas $\hat{S}^2 = \frac{n}{n-1} S^2$ son dos de tales ejemplos.**

(*b*) **La mediana muestral y el estadístico muestral $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3)$, donde Q_1 y Q_3 son las cuartilas muestrales inferior y superior, son dos de tales ejemplos. Los dos son estimadores insesgados de la media poblacional, puesto que la media de sus distribuciones muestrales es la media poblacional. Sin embargo ambos no son eficientes si se les compara con $\bar{X}$.**

(*c*) **La desviación típica muestral S, la desviación típica modificada $\hat{S}$, la desviación media y el recorrido semi-intercuartílico son cuatro de tales ejemplos.**

6.2. Una muestra de cinco medidas del diámetro de una esfera se registraron como 6.33, 6.37, 6.36, 6.32 y 6.37 centímetros. Determinar unas estimas insesgadas y eficientes de (*a*) la verdadera media, (*b*) la verdadera varianza.

(*a*) Estima insesgada y eficiente de la verdadera media (es decir, de la media poblacional).

$$\bar{x} \;=\; \frac{\Sigma x}{n} \;=\; \frac{6.33 + 6.37 + 6.36 + 6.32 + 6.37}{5} \;=\; 6.35 \text{ cm}$$

(*b*) Estima insesgada y eficiente de la verdadera varianza (es decir, de la varianza poblacional).

$$\hat{s}^2 \;=\; \frac{n}{n-1}s^2 \;=\; \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n-1}$$

$$=\; \frac{(6.33-6.35)^2 + (6.37-6.35)^2 + (6.36-6.35)^2 + (6.32-6.35)^2 + (6.37-6.35)^2}{5-1}$$

$$=\; 0.00055 \text{ cm}^2$$

Nótese que $\hat{s} = \sqrt{0.00055} = 0.023$ es una estima de la verdadera desviación típica pero esta estima no es insesgada ni eficiente.

6.3. Supóngase que las estaturas de 100 estudiantes de la Universidad XYZ representan una muestra aleatoria de las estaturas de los 1546 estudiantes de la universidad. Determinar unas estimas insesgadas y eficientes de (*a*) la verdadera media, (*b*) la verdadera varianza.

(*a*) Del Problema 5.33:

Estima insesgada y eficiente de la verdadera altura media $= \bar{x} = 67.45$ pulgadas.

(*b*) Del Problema 5.38:

Estima insesgada y eficiente de la verdadera varianza $= \hat{s}^2 = \dfrac{n}{n-1}s^2 = \dfrac{100}{99}(8.5275) = 8.6136$

Así $\hat{s} = \sqrt{8.6136} = 2.93$. Adviértase que puesto que n es grande, no hay esencialmente diferencia entre s^2 y $\hat{s}^2$ o entre s y $\hat{s}$.

6.4. Dar una estima insesgada y no eficiente del verdadero diámetro medio de la esfera del Problema 6.2.

La mediana es un ejemplo de una estima insesgada y no eficiente de la media poblacional. Para las cinco medidas puestas en orden de magnitud la mediana es 6.36 cm.

ESTIMAS POR INTERVALOS DE CONFIANZA PARA MEDIAS (GRANDES MUESTRAS)

6.5. Hallar los intervalos de confianza del (*a*) 95% y (*b*) 99% para estimar la estatura media de los estudiantes de la Universidad XYZ del Problema 6.3.

(*a*) Los límites de confianza del 95% son $\bar{X} \pm 1.96\sigma/\sqrt{n}$.

Utilizando $\bar{x} = 67.45$ pulgadas y $\hat{s} = 2.93$ pulgadas como una estima de σ (véase Problema 6.3), los límites de confianza son $67.45 \pm 1.96(2.93/\sqrt{100})$ ó 67.45 ± 0.57 pulgadas. Así, pues, el intervalo de confianza del 95% para la media poblacional μ es 66.88 a 68.02 pulgadas, que puede denotarse por $66.88 < \mu < 68.02$.

Se puede, por tanto, decir que la probabilidad de que la estatura media de la población se encuentre entre 66.88 y 68.02 pulgadas es del 95% ó 0.95. En símbolos se escribirá $P(66.88 < \mu < 68.02) = 0.95$. Esto es equivalente a decir que se tiene un 95% de *confianza* en que la media de la población (o verdadera media) se encuentre entre 66.88 y 68.02 pulgadas.

(*b*) Los límites de confianza del 99% son $\bar{X} \pm 2.58\sigma/\sqrt{n}$. Para la muestra dada

$$\bar{x} \pm 2.58\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} \;=\; 67.45 \pm 2.58\frac{2.93}{\sqrt{100}} \;=\; 67.45 \pm 0.76 \text{ pulgadas}$$

Así, pues, el intervalo de confianza del 99% para la media poblacional μ es 66.69 a 68.21 pulgadas, que puede denotarse por $66.69 < \mu < 68.21$.

Para obtener los intervalos de confianza, se supone que la población es infinita o tan grande que se pueda considerar que las condiciones son las mismas que si el muestreo fuese con remplazamiento. Para poblaciones finitas y muestreo sin remplazamiento, se utilizaría $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ en lugar de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Sin embargo, se puede considerar el factor $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{1546-100}{1546-1}} = 0.967$ como 1.0, de modo que no es necesario utilizarlo. Si se utiliza, los límites de confianza anteriores se convierten en 67.45 ± 0.56 y 67.45 ± 0.73 pulgadas, respectivamente.

6.6. Las medidas de los diámetros de una muestra de 200 cojinetes de bolas hechos por una determinada máquina durante una semana dieron una media de 0.824 pulgadas y una desviación típica de 0.042 pulgadas. Hallar los límites de confianza del (*a*) 95% y (*b*) 99% para el diámetro medio de todos los cojinetes.

(*a*) Los límites de confianza del 95% son

$$\bar{X} \pm 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{x} \pm 1.96\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} = 0.824 \pm 1.96\frac{0.042}{\sqrt{200}} = 0.824 \pm 0.0058 \text{ pulgadas}$$

ó 0.824 ± 0.006 pulgadas

(*b*) Los límites de confianza del 99% son

$$\bar{X} \pm 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{x} \pm 2.58\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} = 0.824 \pm 2.58\frac{0.042}{\sqrt{200}} = 0.824 \pm 0.0077 \text{ pulgadas}$$

ó 0.824 ± 0.008 pulgadas.

Adviértase que se ha supuesto que la desviación típica dada es la desviación típica *modificada* $\hat{s}$. Si la desviación típica dada fuese S, se habría empleado $\hat{s} = \sqrt{n/(n-1)}\, s = \sqrt{200/199}\, s$ que puede tomarse como $\hat{s}$ para todos los propósitos prácticos. En general, para $n \geqq 30$ se puede asumir que s y $\hat{s}$ son prácticamente iguales.

6.7. Hallar los límites de confianza del (*a*) 98%, (*b*) 90% y (*c*) 99.73% para el diámetro medio de los cojinetes del Problema 6.6.

(*a*) Sea z_c tal que el área bajo la curva normal a la derecha de $z = z_c$ es 1%. Entonces por simetría, el área a la izquierda de $z = -z_c$ es también 1%, de modo que el área sombreada es el 98% del área total.

Puesto que el área total bajo la curva es 1, el área desde $z = 0$ es $z = z_c$ es 0.49; de aquí que $z_c = 2.33$.

Así, pues, los límites de confianza del 98% son

$$\bar{x} \pm 2.33\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.824 \pm 2.33\frac{0.042}{\sqrt{200}} = 0.824 \pm 0.0069 \text{ pulgadas}$$

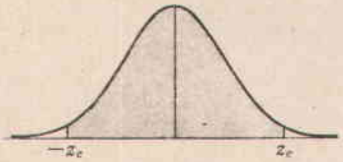


Fig. 6-1

(*b*) Se busca z_c tal que el área desde $z = 0$ a $z = z_c$ sea 0.45; entonces $z_c = 1.645$.

Así, pues, los límites de confianza del 90% son

$$\bar{x} \pm 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.824 \pm 1.645\frac{0.042}{\sqrt{200}} = 0.824 \pm 0.0049 \text{ pulgadas}$$

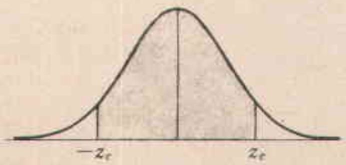


Fig. 6-2

(*c*) Los límites de confianza del 99.73% son

$$\bar{x} \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.824 \pm 3\frac{0.042}{\sqrt{200}} = 0.824 \pm 0.0089 \text{ pulgadas.}$$

6.8. Al medir el tiempo de reacción, un sicólogo estima que la desviación típica del mismo es de 0.05 segundos. ¿Cuál es el número de medidas que deberá hacer para que sea del (*a*) 95% y (*b*) 99% la confianza de que el error de su estima no exceda de 0.01 segundos?

(*a*) Los límites de confianza del 95% son $\bar{X} \pm 1.96\sigma/\sqrt{n}$, siendo el error de la estima $1.96\sigma/\sqrt{n}$. Tomando $\sigma = s = 0.05$ segundos, se tiene que el error será igual a 0.01 si $(1.96)(0.05)/\sqrt{n} = 0.01$, es decir, $\sqrt{n} = (1.96)(0.05)/0.01 = 9.8$ ó $n = 96.04$. Así, pues, se puede estar en la confianza del 95% de que el error de la estima será menor de 0.01 si n es 97 o mayor.

(*b*) Los límites de confianza del 99% son $\bar{X} \pm 2.58\sigma/\sqrt{n}$. Entonces $(2.58)(0.05)/\sqrt{n} = 0.01$, ó $n = 166.4$. Así, pues, se tiene la confianza del 99% de que el error de la estima será menor de 0.01 solamente si n es 167 o mayor.

6.9. Una muestra aleatoria de 50 calificaciones de matemáticas de un total de 200, arrojó una media de 75 y una desviación típica de 10. (*a*) ¿Cuáles son los límites de confianza del 95% para la estima de la media de las 200 calificaciones? (*b*) ¿Con qué grado de confianza podrá decirse que la media de las 200 calificaciones es 75 ± 1?

(*a*) Puesto que la población no es muy grande en relación con el tamaño de la muestra, debe emplearse la fórmula para poblaciones finitas con muestreo sin remplazamiento. Entonces los límites de confianza del 95% son

$$\bar{X} \pm 1.96\sigma_{\bar{X}} = \bar{X} \pm 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = 75 \pm 1.96\frac{10}{\sqrt{50}}\sqrt{\frac{200-50}{200-1}} = 75 \pm 2.4$$

(*b*) Los límites de confianza pueden representarse por

$$\bar{X} \pm z_c\sigma_{\bar{X}} = \bar{X} \pm z_c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = 75 \pm z_c\frac{(10)}{\sqrt{50}}\sqrt{\frac{200-50}{200-1}} = 75 \pm 1.23\,z_c$$

Puesto que esto debe ser igual a 75 ± 1, se tiene que $1.23\,z_c = 1$ ó $z_c = 0.81$. El área bajo la curva normal desde $z = 0$ a $z = 0.81$ es 0.2910; de aquí que el grado de confianza pedido será 2(0.2910) = 0.582 ó 58.2%.

ESTIMAS POR INTERVALOS DE CONFIANZA PARA MEDIAS (PEQUEÑAS MUESTRAS)

6.10. Los coeficientes de confianza del 95% ("doble cola") para la distribución normal vienen dados por ±1.96. ¿Cuáles son los coeficientes correspondientes para la distribución t si (*a*) $\nu = 9$, (*b*) $\nu = 20$, (*c*) $\nu = 30$, (*d*) $\nu = 60$?

Para los coeficientes de confianza del 95% ("doble cola") el área total en la Fig. 6-3 debe ser 0.05. Así el área sombreada en la cola derecha es 0.025 y el valor crítico correspondiente es $t_{.975}$. Entonces los coeficientes de confianza pedidos son $\pm t_{.975}$. Para los valores de ν dados estos son (*a*) ±2.26, (*b*) ±2.09, (*c*) ±2.04, (*d*) ±2.00.

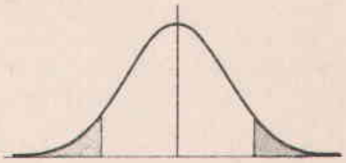


Fig. 6-3

6.11. Una muestra de 10 medidas del diámetro de una esfera dio una media $\bar{x} = 4.38$ pulgadas y una desviación típica $s = 0.06$ pulgadas. Hallar los límites de confianza para el diámetro verdadero del (*a*) 95% y (*b*) 99%.

(*a*) Los límites de confianza del 95% están dados por $\bar{X} \pm t_{.975}(S/\sqrt{n-1})$.

Puesto que $\nu = n - 1 = 10 - 1 = 9$, hallamos $t_{.975} = 2.26$ [véase también Problema 6.10(*a*)]. Entonces utilizando $\bar{x} = 4.38$ y $s = 0.06$, los límites de confianza del 95% pedidos son

$$4.38 \pm 2.26\frac{0.06}{\sqrt{10-1}} = 4.38 \pm 0.0452 \text{ pulgadas}$$

Así, pues, se puede estar en la confianza del 95% de que el valor verdadero se encuentra entre 4.38 − 0.045 = 4.335 pulgadas y 4.38 + 0.045 = 4.425 pulgadas.

(*b*) **Para $\nu = 9$, $t_{.995} = 3.25$. Entonces los límites de confianza del 99% son**

$$\bar{X} \pm t_{.995}(S/\sqrt{n-1}) = 4.38 \pm 3.25(0.06/\sqrt{10-1}) = 4.38 \pm 0.0650 \text{ pulgadas}$$

y el intervalo de confianza del 99% es 4.315 a 4.445 pulgadas.

6.12. (*a*) Solucionar el Problema 6.11 suponiendo válidos los métodos de la teoría de grandes muestras. (*b*) Comparar los resultados de los dos métodos.

(*a*) **Mediante los métodos de la teoría de grandes muestras los límites de confianza del 95% son**

$$\bar{X} \pm 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4.38 \pm 1.96\frac{0.06}{\sqrt{10}} = 4.38 \pm 0.037 \text{ pulgadas}$$

donde se ha utilizado la desviación típica muestral 0.06 como estima de σ. Análogamente, los límites de confianza del 99% son $4.38 \pm (2.58)(0.06)/\sqrt{10} = 4.38 \pm 0.049$ pulgadas.

(*b*) **En cada caso, los intervalos de confianza obtenidos mediante los métodos de pequeñas muestras o teoría exacta del muestreo son más anchos que los obtenidos por los métodos de grandes muestras. Esto era de esperarse dada la menor precisión que se obtiene en pequeñas muestras con relación a las grandes muestras.**

ESTIMAS POR INTERVALOS DE CONFIANZA DE PROPORCIONES

6.13. Una muestra de 100 votantes elegidos aleatoriamente entre todos los de un distrito dado, indicó que el 55% de ellos estaban a favor de un determinado candidato. Hallar los límites de confianza del (*a*) 95%, (*b*) 99% y (*c*) 99.73% para la proporción de todos los votantes que estaban a favor de este candidato.

(*a*) **Los límites de confianza del 95% para la población p son**

$$P \pm 1.96\,\sigma_P = P \pm 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.55 \pm 1.96\sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{100}} = 0.55 \pm 0.10$$

donde se ha tomado la proporción muestral 0.55 para estimar p.

(*b*) **Los límites de confianza del 99% para p son $0.55 \pm 2.58\sqrt{(0.55)(0.45)/100} = 0.55 \pm 0.13$.**

(*c*) **Los límites de confianza del 99.73% para p son $0.55 \pm 3\sqrt{(0.55)(0.45)/100} = 0.55 \pm 0.15$.**

Para hacer este problema de una forma más exacta, véase Problema 6.27.

6.14. ¿Qué tamaño de muestra debe tomarse en el Problema 6.13 para que la confianza de que el candidato sea elegido sea del 95%?

El candidato se elige si $p > 0.50$, y para tener una confianza del 95% de su elección necesitamos que Prob $(p > 0.50) = 0.95$. Puesto que $(P-p)/\sqrt{p(1-p)/n}$ es normal asintóticamente,

$$\text{Prob}\left(\frac{P-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < \beta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\beta} e^{-u^2/2}\,du$$

ó

$$\text{Prob}(p > P - \beta\sqrt{p(1-p)/n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\beta} e^{-u^2/2}\,du$$

Al comparar con Prob$(p > 0.50) = 0.95$ utilizando el Apéndice C indica que

$$P - \beta\sqrt{p(1-p)/n} = 0.50 \qquad \text{donde} \qquad \beta = 1.645$$

Entonces, utilizando $P = 0.55$ y la estima $p = 0.55$ del Problema 6.13, tenemos

$$0.55 - 1.645\sqrt{(0.55)(0.45)/n} = 0.50 \qquad \text{ó} \qquad n = 271$$

6.15. En 40 lanzamientos de una moneda, se obtuvieron 24 caras. Hallar los límites de confianza del (*a*) 95% y (*b*) 99.73% para la proporción de caras que se obtendrían en un ilimitado número de lanzamientos de la moneda.

(*a*) Al nivel del 95%, $z_c = 1.96$. Sustituyendo los valores $P = 24/40 = 0.6$ y $n = 40$ en la fórmula $p = P \pm z_c \sqrt{P(1-P)/n}$, se tiene $p = 0.60 \pm 15$, dando el intervalo 0.45 a 0.75.

(*b*) Al nivel del 99.73%, $z_c = 3$. Mediante la fórmula aproximada $p = P \pm z_c\sqrt{P(1-P)/n}$, se tiene $p = 0.60 \pm 0.23$, dando, pues, el intervalo 0.37 a 0.83.

La fórmula más exacta del Problema 6.27 da el intervalo de confianza del 95% como 0.45 a 0.74 y el intervalo de confianza del 99.73% como 0.37 a 0.79.

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA DIFERENCIAS Y SUMAS

6.16. Una muestra de 150 bombillas del fabricante *A* dieron una vida media de 1400 horas y una desviación típica de 120 horas. Una muestra de 100 bombillas del fabricante *B* dieron una vida media de 1200 horas y una desviación típica de 80 horas. Hallar los límites de confianza del (*a*) 95% y 99% para la diferencia de las vidas medias de las poblaciones *A* y *B*.

Los límites de confianza para la diferencia de medias de *A* y *B* son dados por

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B \pm z_c \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}$$

(*a*) Los límites de confianza del 95% son: $1400 - 1200 \pm 1.96\sqrt{(120)^2/150 + (80)^2/100} = 200 \pm 24.8$.

Así, pues, se puede esperar con el 95% de confianza que la diferencia de las medias de las poblaciones se encuentre entre 175 y 225 horas.

(*b*) Los límites de confianza del 99% son: $1400 - 1200 \pm 2.58\sqrt{(120)^2/150 + (80)^2/100} = 200 \pm 32.6$.

Así, pues, se puede esperar con el 99% de confianza que la diferencia de las medias de las poblaciones se encuentre entre 167 y 233 horas.

6.17. En una muestra aleatoria de 400 adultos y 600 adolescentes que veían un cierto programa de televisión, 100 adultos y 300 adolescentes dijeron que les gustaba. Hallar los límites de confianza del (*a*) 95% y (*b*) 99% para la diferencia de proporciones de todos los adultos y adolescentes que ven el programa y les gusta.

Los límites de confianza para la diferencia de proporciones de los dos grupos están dados por

$$P_1 - P_2 \pm z_c \sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a adolescentes y adultos, respectivamente. Aquí $P_1 = 300/600 = 0.50$ y $P_2 = 100/400 = 0.25$ son las proporciones respectivas de adolescentes y adultos a quienes les gusta el programa.

(*a*) Los límites de confianza del 95% son $0.50 - 0.25 \pm 1.96\sqrt{(0.50)(0.50)/600 + (0.25)(0.75)/400} = 0.25 \pm 0.06$.

Así, pues, se puede esperar con confianza del 95% que la verdadera diferencia de proporciones se encuentre entre 0.19 y 0.31.

(*b*) Los límites de confianza del 99% son $0.50 - 0.25 \pm 2.58\sqrt{(0.50)(0.50)/600 + (0.25)(0.75)/400} = 0.25 \pm 0.08$.

Así, pues, se puede esperar con confianza del 99% que la verdadera diferencia de proporciones se encuentre entre 0.17 y 0.33.

6.18. El voltaje medio de las baterías producidas por una compañía es de 45.1 V y la desviación típica 0.04 V. Si se conectan 4 baterías en serie, hallar los límites de confianza del (*a*) 95%, (*b*) 99%, (*c*) 99.73% y (*d*) 50% para el voltaje total.

Si E_1, E_2, E_3 y E_4 representan los voltajes de las 4 baterías, se tiene

$$\mu_{E_1+E_2+E_3+E_4} = \mu_{E_1} + \mu_{E_2} + \mu_{E_3} + \mu_{E_4} \quad \text{y} \quad \sigma_{E_1+E_2+E_3+E_4} = \sqrt{\sigma^2_{E_1} + \sigma^2_{E_2} + \sigma^2_{E_3} + \sigma^2_{E_4}}$$

Entonces, puesto que $\mu_{E_1} = \mu_{E_2} = \mu_{E_3} = \mu_{E_1} = 45.1$ voltios y $\sigma_{E_1} = \sigma_{E_2} = \sigma_{E_3} = \sigma_{E_4} = 0.04$ voltios,

$$\mu_{E_1+E_2+E_3+E_4} = 4(45.1) = 180.4 \quad \text{y} \quad \sigma_{E_1+E_2+E_3+E_4} = \sqrt{4(0.04)^2} = 0.08$$

(*a*) Los límites de confianza del 95% son: $180.4 \pm 1.96(0.08) = 180.4 \pm 0.16$ voltios.

(*b*) Los límites de confianza del 99% son: $180.4 \pm 2.58(0.08) = 180.4 \pm 0.21$ voltios.

(*c*) Los límites de confianza del 99.73% son: $180.4 \pm 3(0.08) = 180.4 \pm 0.24$ voltios.

(*d*) Los límites de confianza del 50% son: $180.4 \pm 0.6745(0.08) = 180.4 \pm 0.054$ voltios.

El valor de 0.054 voltios se llama *error probable.*

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA VARIANZAS

6.19. La desviación típica de las duraciones de una muestra de 200 bombillas fue de 100 horas. Hallar los límites de confianza del (*a*) 95% y (*b*) 99% para la desviación típica de la población de tales bombillas.

En este caso se aplica la teoría de grandes muestras. Por tanto (véase Tabla 5-1, página 162) los límites de confianza para la desviación típica de la población son dados por $S \pm z_c\sigma/\sqrt{2n}$, donde z_c indica el nivel de confianza. Se utiliza la desviación típica muestral para estimar σ.

(*a*) Al nivel del 95% los límites de confianza son: $100 \pm 1.96(100)/\sqrt{400} = 100 \pm 9.8$.

Así, pues, se puede esperar con confianza del 95% que la desviación típica de la población se encuentre entre 90.2 y 109.8 horas.

(*b*) Al nivel del 99% los límites de confianza son: $100 \pm 2.58(100)/\sqrt{400} = 100 \pm 12.9$.

Así, pues, se puede esperar con confianza del 99% que la desviación típica de la población se encuentre entre 87.1 y 112.9 horas.

6.20. ¿Qué tamaño de muestra en el Problema 6.19 deberá tomarse para que con confianza del 99.73% la verdadera desviación típica de la población no difiera de la desviación típica muestral en más del (*a*) 5%, (*b*) 10%?

De igual forma que en el Problema 6.19, los límites de confianza del 99.73% para σ son $S \pm 3\sigma/\sqrt{2n} = s \pm 3s/\sqrt{2n}$, utilizando s como una estima de σ. Entonces el error porcentual de la desviación es

$$\frac{3s/\sqrt{2n}}{s} = \frac{300}{\sqrt{2n}}\%$$

(*a*) Si $300/\sqrt{2n} = 5$, entonces $n = 1800$. Así, pues, el tamaño de la muestra deberá ser 1800 o más.

(*b*) Si $300/\sqrt{2n} = 10$, entonces $n = 450$. Así, pues, el tamaño de la muestra deberá ser 450 o más.

6.21. La desviación típica de las estaturas de 16 estudiantes seleccionados aleatoriamente en un colegio de 1000 estudiantes es 2.40 pulgadas. Hallar los límites de confianza del (*a*) 95% y (*b*) 99% de la desviación típica para todos los estudiantes del colegio.

(*a*) Los límites de confianza del 95% están dados por $S\sqrt{n}/\chi_{.975}$ y $S\sqrt{n}/\chi_{.025}$.

Para $\nu = 16 - 1 = 15$ grados de libertad, $\chi^2_{.975} = 27.5$ ó $\chi_{.975} = 5.24$ y $\chi^2_{.025} = 6.26$ ó $\chi_{.025} = 2.50$.

Entonces los límites de confianza del 95% son $2.40\sqrt{16}/5.24$ y $2.40\sqrt{16}/2.50$, esto es, 1.83 y 3.84 pulgadas. Por tanto se tiene la confianza del 95% de que la desviación típica poblacional se encuentra entre 1.83 y 3.84 pulgadas.

(*b*) Los límites de confianza del 99% están dados por $S\sqrt{n}/\chi_{.995}$ y $S\sqrt{n}/\chi_{.005}$.

Para $\nu = 16 - 1 = 15$ grados de libertad, $\chi^2_{.995} = 32.8$ ó $\chi_{.995} = 5.73$ y $\chi^2_{.005} = 4.60$ ó $\chi_{.005} = 2.14$.

Entonces los límites de confianza del 99% son $2.40\sqrt{16}/5.73$ y $2.40\sqrt{16}/2.14$, es decir, 1.68 y 4.49 pulgadas. Por tanto se tiene la confianza del 99% de que la desviación típica poblacional se encuentra entre 1.68 y 4.49 pulgadas.

6.22. Solucionar el Problema 6.19 utilizando la teoría de pequeñas muestras.

(*a*) Los límites de confianza del 95% están dados por $S\sqrt{n}/\chi_{.975}$ y $S\sqrt{n}/\chi_{.025}$.

Para $\nu = 200 - 1 = 199$ grados de libertad, hallamos como en el Problema 4.11, página 137.

$$\chi^2_{.975} = \frac{1}{2}(z_{.975} + \sqrt{2(199) - 1})^2 = \frac{1}{2}(1.96 + 19.92)^2 = 239$$
$$\chi^2_{.025} = \frac{1}{2}(z_{.025} + \sqrt{2(199) - 1})^2 = \frac{1}{2}(-1.96 + 19.92)^2 = 161$$

de donde $\chi_{.975} = 15.5$ y $\chi_{.025} = 12.7$.

Entonces los límites de confianza del 95% son $100\sqrt{200}/15.5 = 91.2$ y $100\sqrt{200}/12.7 = 111.3$ horas respectivamente. Por tanto se tiene la confianza del 95% de que la desviación típica poblacional se encuentra entre 91.2 y 111.3 horas.

Este resultado debe compararse con el del Problema 6.19(*a*).

(*b*) Los límites de confianza del 99% están dados por $S\sqrt{n}/\chi_{.995}$ y $S\sqrt{n}/\chi_{.005}$.

Para $\nu = 200 - 1 = 199$ grados de libertad,

$$\chi^2_{.995} = \frac{1}{2}(z_{.995} + \sqrt{2(199) - 1})^2 = \frac{1}{2}(2.58 + 19.92)^2 = 253$$
$$\chi^2_{.005} = \frac{1}{2}(z_{.005} + \sqrt{2(199) - 1})^2 = \frac{1}{2}(-2.58 + 19.92)^2 = 150$$

de donde $\chi_{.995} = 15.9$ y $\chi_{.005} = 12.2$.

Entonces los límites de confianza del 99% son $100\sqrt{200}/15.9 = 88.9$ y $100\sqrt{200}/12.2 = 115.9$ horas respectivamente. Por tanto se tiene la confianza del 99% de que la desviación típica poblacional se encuentra entre 88.9 y 115.9 horas.

Este resultado debe compararse con el del Problema 6.19(*b*).

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA RELACIONES DE VARIANZAS

6.23. Dos muestras de tamaños 16 y 10 respectivamente se extraen aleatoriamente de dos poblaciones normales. Si se encuentra que sus varianzas son 24 y 18 respectivamente hallar los límites de confianza del (*a*) 98% y (*b*) 90% para la relación de varianzas.

(*a*) Tenemos $m = 16$, $n = 10$, $s_1^2 = 20$, $s_2^2 = 18$ de modo que

$$\hat{s}_1^2 = \frac{m}{m-1}s_1^2 = \left(\frac{16}{15}\right)(24) = 25.2$$

$$\hat{s}_2^2 = \frac{n}{n-1}s_2^2 = \left(\frac{10}{9}\right)(18) = 20.0$$

Del Problema 4.47(*b*), página 139, tenemos $F_{.99} = 4.96$ para $\nu_1 = 16 - 1 = 15$ y $\nu_2 = 10 - 1 = 9$ grados de libertad. También del Problema 4.47(*d*), tenemos para $\nu_1 = 15$ y $\nu_2 = 9$ grados de libertad $F_{.01} = 1/3.89$ de modo que $1/F_{.01} = 3.89$. Entonces utilizando (*17*), página 197, hallamos para el intervalo de confianza del 98%.

$$\left(\frac{1}{4.96}\right)\left(\frac{25.2}{20.0}\right) \leqq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leqq (3.89)\left(\frac{25.2}{20.0}\right)$$

ó

$$0.283 \leqq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leqq 4.90$$

(*b*) Como en (*a*) hallamos del Apéndice F que $F_{.95} = 2.84$ y $F_{.05} = 1/2.59$. Por tanto el intervalo de confianza del 90% es

$$\frac{1}{2.84}\left(\frac{25.2}{20.0}\right) \leqq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leqq (2.59)\left(\frac{25.2}{20.0}\right)$$

ó

$$0.4437 \leqq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leqq 3.263$$

Obsérvese que el intervalo de confianza del 90% es mucho más pequeño que el intervalo de confianza del 98%, como lógicamente era de esperarse.

6.24. Hallar los límites de confianza del (*a*) 98% y (*b*) 90% para la relación de las desviaciones típicas del Problema 6.23.

Al tomar la raíz cuadrada de las desigualdades del Problema 6.23 hallamos los límites de confianza para el 98% y el 90%.

(*a*)
$$0.53 \leqq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \leqq 2.21$$

(*b*)
$$0.67 \leqq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \leqq 1.39$$

ESTIMAS DE MAXIMA VEROSIMILITUD

6.25. Si n observaciones $X_1, \ldots, X_n$ se toman de una población distribuida normalmente de la cual se desconoce la media y se conoce la varianza. Hallar la estima de máxima verosimilitud de la media.

Puesto que
$$f(x_k, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x_k-\mu)^2/2\sigma^2}$$

tenemos

(*1*)
$$L = f(x_1, \mu) \cdots f(x_n, \mu) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-\Sigma(x_k-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Por tanto

(*2*)
$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_k - \mu)^2$$

Tomando la derivada parcial con respecto a μ, resulta

(*3*)
$$\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum(x_k - \mu)$$

Fijando $\partial L/\partial\mu = 0$ resulta

(*4*)
$$\sum(x_k - \mu) = 0 \quad \text{es decir} \quad \sum x_k - n\mu = 0$$

ó

(*5*)
$$\mu = \frac{\Sigma x_k}{n}$$

Así la estima de máxima verosimilitud es la media muestral.

6.26. Si en el Problema 6.25 se conoce la media pero se desconoce la varianza, hallar la estima de máxima verosimilitud de la varianza.

Si escribimos $f(x_k, \sigma^2)$ en cambio de $f(x_k, \mu)$, todo lo efectuado en el Problema 6.25 hasta la ecuación (*2*) se aplica. Entonces tomando la derivada parcial con respecto a σ^2, tenemos

$$\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum (x_k - \mu)^2$$

Fijando $\partial L/\partial \sigma^2 = 0$ hallamos

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma\,(x_k - \mu)^2}{n}$$

Véase Problema 6.63.

PROBLEMAS DIVERSOS

6.27. (*a*) Si P es la proporción observada de éxitos en una muestra de tamaño n, mostrar que los límites de confianza para estimar la proporción de éxitos p en la población a un nivel de confianza determinado por z_c están dados por

$$p = \frac{P + \dfrac{z_c^2}{2n} \pm z_c\sqrt{\dfrac{P(1-P)}{n} + \dfrac{z_c^2}{4n^2}}}{1 + \dfrac{z_c^2}{n}}$$

(*b*) Utilizar la fórmula de (*a*) para obtener los límites de confianza del 99.73% del Problema 6.13. (*c*) Mostrar que para grandes valores de n la fórmula de (*a*) se reduce a $p = P \pm z_c \sqrt{P(1-P)/n}$, como la utilizada en el Problema 6.13.

(*a*) La proporción muestral P en unidades tipificadas es $\dfrac{P-p}{\sigma_P} = \dfrac{P-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$.

Los valores mayor y menor de esta variable tipificada son $\pm z_c$, donde z_c determina el nivel de confianza. En estos valores extremos, por tanto, se tiene

$$P - p = \pm z_c\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros,

$$P^2 - 2pP + p^2 = z_c^2\frac{p(1-p)}{n}$$

Multiplicando los dos miembros por n y simplificando, queda,

$$(n + z_c^2)p^2 - (2nP + z_c^2)p + nP^2 = 0$$

Si $a = n + z_c^2$, $b = -(2nP + z_c^2)$ y $c = nP^2$, esta ecuación se reduce a $ap^2 + bp + c = 0$, cuyas soluciones para p son dadas por la fórmula cuadrática

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2nP + z_c^2 \pm \sqrt{(2nP + z_c^2)^2 - 4(n + z_c^2)(nP^2)}}{2(n + z_c^2)}$$

$$= \frac{2nP + z_c^2 \pm z_c\sqrt{4nP(1-P) + z_c^2}}{2(n + z_c^2)}$$

Dividiendo numerador y denominador por $2n$, se tiene

$$p = \frac{P + \dfrac{z_c^2}{2n} \pm z_c\sqrt{\dfrac{P(1-P)}{n} + \dfrac{z_c^2}{4n^2}}}{1 + \dfrac{z_c^2}{n}}$$

(*b*) Para los límites de confianza del 99.73%, $z_c = 3$. Entonces, utilizando $P = 0.55$ y $n = 100$ en la fórmula de (*a*), se tiene $p = 0.40$ y 0.69 en acuerdo con el Problema 6.13(*a*).

(*c*) Si n es grande, entonces $z_c^2/2n$, $z_c^2/4n^2$ y z_c^2/n son despreciables y pueden sustituirse por cero, de forma que se obtiene la fórmula pedida.

6.28. ¿Es posible obtener un intervalo de confianza del 95% para la desviación típica poblacional cuya amplitud sea menor que la del Problema 6.22(*a*)?

Los límites de confianza del 95% para la desviación típica poblacional como se hallaron en el Problema 6.22(*a*) fueron obtenidos escogiendo valores críticos de χ^2 de tal manera que las áreas en cada cola fueran 2.5%. Es posible hallar otros límites de confianza escogiendo valores críticos de χ^2 para los cuales la suma de las áreas en las colas sea 5%, ó 0.05, pero de tal manera que las áreas en cada cola no sean iguales.

En la Tabla 6-2 se indican varios valores críticos y los correspondientes intervalos de confianza del 95%.

Tabla 6-2

Valores Críticos	Intervalo de confianza del 95%	Amplitud
$\chi_{.01} = 12.44, \quad \chi_{.96} = 15.32$	92.3 a 113.7	21.4
$\chi_{.02} = 12.64, \quad \chi_{.97} = 15.42$	91.7 a 111.9	20.2
$\chi_{.03} = 12.76, \quad \chi_{.98} = 15.54$	91.0 a 110.8	19.8
$\chi_{.04} = 12.85, \quad \chi_{.99} = 15.73$	89.9 a 110.0	20.1

De la tabla se observa que un intervalo del 95%, de amplitud solamente 19.8, es de 91.0 a 110.8.

Un intervalo con amplitud aún menor puede hallarse continuando el mismo método de aproximación empleando valores críticos tales como $\chi_{.031}$ y $\chi_{.981}$, $\chi_{.032}$ y $\chi_{.982}$, etc.

Sin embargo, en general, la disminución en el intervalo que se obtiene es comúnmente despreciable y no justifica el trabajo involucrado.

Problemas suplementarios

ESTIMAS INSESGADAS Y EFICIENTES

6.29. Las medidas de pesos de una muestra fueron registradas como 8.3, 10.6, 9.7, 8.8, 10.2 y 9.4 libras, respectivamente. Determinar estimas insesgadas y eficientes de (*a*) la media de la población y (*b*) la varianza de la población. (*c*) Comparar la desviación típica muestral con la desviación típica de la población estimada.

6.30. Una muestra de 10 tubos de televisión producidos por una compañía, dieron una duración media de 1200 horas y una desviación típica de 100 horas. Estimar (*a*) la media y (*b*) la desviación típica de la población de todos los tubos de televisión producidos por esta compañía.

6.31. (*a*) Solucionar el Problema 6.30 si se obtienen los mismos resultados para 30, 50 y 100 tubos de televisión muestreados. (*b*) ¿Qué se puede deducir de la relación entre las desviaciones típicas muestrales y las estimas de las desviaciones típicas de la población para los diferentes tamaños de muestra?

ESTIMAS POR INTERVALO DE CONFIANZA DE MEDIAS (GRANDES MUESTRAS)

6.32. La media y la desviación típica de las cargas máximas soportadas por 60 cables (véase Problema 5.98) están dadas por 11.09 ton. y 0.73 ton., respectivamente. Hallar los límites de confianza del (*a*) 95% y (*b*) 99% para la media de las cargas máximas de todos los cables producidos por la compañía.

6.33. La media y la desviación típica de los diámetros de una muestra de 250 remaches fabricados por una compañía son 0.72642 pulgadas y 0.00058 pulgadas, respectivamente (véase Problema 5.100). Hallar los límites de confianza del (*a*) 99%, (*b*) 98%, (*c*) 95% y (*d*) 90% para el diámetro medio de todos los remaches fabricados por la compañía.

6.34. Hallar (*a*) los límites de confianza del 50% y (*b*) el error probable para la media de los diámetros del Problema 6.33.

6.35. Si la desviación típica de la duración de los tubos de televisión se estima en 100 horas, ¿qué tamaño de muestra deberá tomarse para que sea del (*a*) 95%, (*b*) 90%, (*c*) 99% y (*d*) 99.73% la confianza de que el error en la media de la duración estimada no exceda de 20 horas?

6.36. ¿Cuáles serán los tamaños de muestra en el Problema 6.35 si el error en la duración media estimada no debe superar las 10 horas?

ESTIMAS POR INTERVALO DE CONFIANZA DE MEDIAS (PEQUEÑAS MUESTRAS)

6.37. Una muestra de 12 medias de resistencia a la rotura de hebras de algodón dio una media de 7.38 onzas y una desviación típica de 1.24 onzas. Hallar los límites de confianza del (*a*) 95% y (*b*) 99% para la resistencia real.

6.38. Solucionar el Problema 6.37 suponiendo aplicables los métodos de la teoría de grandes muestras y comparar los resultados obtenidos.

6.39. Cinco medidas del tiempo de reacción de un individuo a un cierto estímulo fueron registradas como 0.28, 0.30, 0.27, 0.33, 0.31 segundos. Hallar los límites de confianza del (*a*) 95% y (*b*) 99% para el tiempo real de reacción.

ESTIMAS POR INTERVALO DE CONFIANZA PARA PROPORCIONES

6.40. Una urna contiene una proporción desconocida de bolas rojas y blancas. Una muestra aleatoria de 60 bolas extraídas con remplazamiento de la urna, dio el 70% de bolas rojas. Hallar los límites de confianza del (*a*) 95%, (*b*) 99% y (*c*) 99.73% para la proporción real de bolas rojas en la urna. Dar los resultados utilizando la fórmula aproximada y la más exacta del Problema 6.27.

6.41. ¿Qué tamaño de muestra se debería tomar en el Problema 6.40 para que la confianza de que la proporción verdadera no difiera de la proporción muestral en más del 5% sea (*a*) del 95%, (*b*) del 99%, (*c*) del 99.73%?

6.42. Se cree que una elección resultará muy reñida entre dos candidatos. ¿Cuál será el número mínimo de votantes que se deberá muestrear para que la confianza sea del (*a*) 80%, (*b*) 95%, (*c*) 99% de la decisión en favor de uno de los candidatos?

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA DIFERENCIAS Y SUMAS

6.43. De dos grupos análogos de enfermos A y B formados de 50 y 100 individuos, respectivamente, al primero le fue dado un nuevo tipo de somnífero y al segundo un tipo convencional. Para los pacientes del primer grupo el número medio de horas de sueño fue 7.82 con una desviación típica de 0.24 horas. Para los del grupo B fueron 6.75 y 0.30 horas, respectivamente. Hallar los límites de confianza del (*a*) 95% y (*b*) 99% para la diferencia del número medio de horas de sueño inducidas por los dos tipos de somníferos.

6.44. Una muestra de 200 cerrojos producidos por una máquina mostró que 15 eran defectuosos, mientras que de 100 cerrojos de otra máquina 12 eran defectuosos. Hallar los límites de confianza del (*a*) 95%, (*b*) 99% y (*c*) 99.73% para la diferencia de proporciones de cerrojos defectuosos de las dos máquinas. Estudiar los resultados obtenidos.

6.45. Una compañía fabrica cojinetes de bolas que tienen un peso medio de 0.638 libras y una desviación típica de 0.012 libras. Hallar los límites de confianza (*a*) del 95% y (*b*) del 99% para los pesos de lotes de 100 cojinetes cada uno.

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA VARIANZAS Y DESVIACIONES TIPICAS

6.46. La desviación típica de resistencia a la rotura de 100 cables producidos por una compañía fue de 180 libras. Hallar los límites de confianza del (*a*) 95%, (*b*) 99% y (*c*) 99.73% para la desviación típica de todos los cables producidos por la compañía.

6.47. Hallar el error probable de la desviación típica del Problema 6.46.

6.48. ¿Qué tamaño de muestra deberá tomarse para que la confianza sea del (*a*) 95%, (*b*) 99% y (*c*) 99.73% de que la desviación típica de una población no difiera de la desviación típica muestral en más del 2%?

6.49. La desviación típica de la duración de 10 bombillas fabricadas por una compañía es 120 horas. Hallar los límites de confianza del (*a*) 95% y (*b*) 99% para la desviación típica de todas las bombillas fabricadas por la compañía.

6.50. Solucionar el Problema 6.49 si 25 bombillas tienen la misma desviación típica de 120 horas.

6.51. Solucionar el Problema 6.49 utilizando la distribución χ^2 si una muestra de 100 bombillas tiene la misma desviación típica de 120 horas. Comparar los resultados con los obtenidos empleando la distribución normal.

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA RELACIONES DE VARIANZAS

6.52. Las desviaciones típicas de los diámetros de los cojinetes de bolas producidos por dos máquinas son 0.042 cm y 0.035 cm respectivamente, basados en muestras de tamaño 10 cada una. Hallar los intervalos de confianza del (*a*) 98% y (*b*) 90% para la relación de las varianzas.

6.53. Determinar los intervalos de confianza del (*a*) 98% y (*b*) 90% para la relación de las desviaciones típicas del Problema 6.52.

6.54. Dos muestras de tamaños 6 y 5 respectivamente tienen la misma varianza. Hallar los intervalos de confianza del (*a*) 98% y (*b*) 90% para la relación de las varianzas de las poblaciones de donde se extrajeron.

6.55. ¿Considera que las dos muestras del Problema 6.54 fueron extraídas de la misma población? Justificar su solución.

6.56. Solucionar el (*a*) Problema 6.52 y (*b*) Problema 6.54 si las muestras tienen tamaño 120 cada una.

ESTIMAS DE MAXIMA VEROSIMILITUD

6.57. Si n observaciones $X_1, \ldots, X_n$ se toman de una distribución de Poisson con parámetro λ desconocido. Hallar el estimador de máxima verosimilitud de λ.

6.58. Una población tiene una función de densidad dada por $f(x) = 2\nu\sqrt{\nu/\pi}\,x^2e^{-\nu x^2}$, $-\infty < x < \infty$. Si se toman n observaciones $X_1, \ldots, X_n$ de esta población, hallar la estima de máxima verosimilitud de ν.

6.59. Una población tiene una función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} (k+1)x^k & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Si se toman n observaciones $X_1, \ldots, X_n$ de esta población hallar la estima de máxima verosimilitud de k.

PROBLEMAS DIVERSOS

6.60. Los coeficientes de confianza del 99% ("doble cola") para la distribución normal están dados por ± 2.58. ¿Cuáles son los coeficientes correspondientes para la distribución t si (*a*) $\nu = 4$, (*b*) $\nu = 12$, (*c*) $\nu = 25$, (*d*) $\nu = 30$, (*e*) $\nu = 40$?

6.61. Una compañía tiene 500 cables. En una prueba de 40 cables seleccionados aleatoriamente resulta una media de la resistencia de rotura de 2400 libras y una desviación típica de 150 libras. (*a*) ¿Cuáles son los límites de confianza del 95% y 99% para estimar la media de la resistencia de rotura de los 460 cables restantes? (*b*) ¿Con qué grado de confianza podríamos decir que la media de la resistencia de rotura de los 460 cables restantes es de 2400 ± 35 libras?

6.62. ¿Cuál es el intervalo de confianza del 95% del Problema 6.51 que tiene la menor amplitud?

6.63. Si se toman n observaciones, $X_1, \ldots, X_n$ de una población distribuida normalmente con media μ y varianza σ^2 desconocidas. ¿Pueden determinarse estimas de máxima verosimilitud de μ y σ^2 en términos de $x_1, \ldots, x_n$? ¿Son los mismos a los dados en los Problemas 6.25 y 6.26? Explicar.

Capítulo 7

Ensayo de hipótesis y significación

DECISIONES ESTADISTICAS

Muy a menudo, en la práctica se tienen que tomar decisiones sobre poblaciones, partiendo de la información muestral de las mismas. Tales decisiones se llaman *decisiones estadísticas*. Por ejemplo, se puede querer decidir a partir de los datos del muestreo, si un suero nuevo es realmente efectivo para la cura de una enfermedad, si un sistema educacional es mejor que otro, si una moneda determinada está o no cargada, etc.

HIPOTESIS ESTADISTICAS. HIPOTESIS NULA

Para llegar a tomar decisiones, conviene hacer determinados supuestos o conjeturas acerca de las poblaciones que se estudian. Tales supuestos que pueden ser o no ciertos se llaman *hipótesis estadísticas* y, en general, lo son sobre las distribuciones de probabilidad de las poblaciones.

En muchos casos se formulan las hipótesis estadísticas con el solo propósito de rechazarlas o invalidarlas. Por ejemplo, si se quiere decidir si una moneda está cargada, se formula la hipótesis de que la moneda está bien, es decir, $p = 0.5$; donde p es la probabilidad de cara. Análogamente, si se quiere decidir sobre si un procedimiento es mejor que otro, se formula la hipótesis de que *no* hay *diferencia* entre los procedimientos (es decir, cualquier diferencia observada se debe meramente a fluctuaciones en el muestreo de la *misma* población). Tales hipótesis se llaman también *hipótesis nulas* y se denotan por H_0.

Cualquier hipótesis que difiera de una hipótesis dada se llama *hipótesis alternativa*. Por ejemplo, si una hipótesis es $p = 0.5$, hipótesis alternativas son $p = 0.7$; $p \neq 0.5$ ó $p > 0.5$. Una hipótesis alternativa de la hipótesis nula se denota por H_1.

ENSAYOS DE HIPOTESIS Y SIGNIFICACION

Si en el supuesto de que una hipótesis determinada es cierta, se encuentra que los resultados observados en una muestra aleatoria difieren marcadamente de aquellos que cabía esperar con la hipótesis y con la variación propia del muestreo, se diría que las diferencias observadas son *significativas* y se estaría en condiciones de rechazar la hipótesis (o al menos no aceptarla de acuerdo con la evidencia obtenida). Por ejemplo, si en 20 lanzamientos de una moneda se obtienen 16 caras, se estaría inclinado a rechazar la hipótesis de que la moneda está bien, aunque sería posible que fuese un rechazamiento erróneo.

Los procedimientos que facilitan el decidir si una hipótesis se acepta o se rechaza o el determinar si las muestras observadas difieren significativamente de los resultados esperados se llaman *ensayos de hipótesis*, *ensayos de significación* o *reglas de decisión*.

ERRORES DE TIPO I Y TIPO II

Si se rechaza una hipótesis cuando debería ser aceptada, se dice que se comete un *error del Tipo I*. Si por el contrario, se acepta una hipótesis que debería ser rechazada, se dice que se comete un *error del Tipo II.* En cualquiera de los dos casos se comete un error al tomar una decisión equivocada.

Para que cualquier ensayo de hipótesis o reglas de decisión sea bueno, debe diseñarse de forma que minimice los errores de decisión. Esto no es tan sencillo como pueda parecer puesto que para un tamaño de muestra dado, un intento de disminuir un tipo de error, va generalmente acompañado por un incremento en el otro tipo de error. En la práctica, un tipo de error puede tener más importancia que el otro, y así se tiende a conseguir poner una limitación al error de mayor importancia. La única forma de reducir al tiempo ambos tipos de error es incrementar el tamaño de la muestra, lo cual puede ser o no ser posible.

NIVEL DE SIGNIFICACION

La probabilidad máxima con la que en el ensayo de una hipótesis se puede cometer un error del Tipo I se llama *nivel de significación* del ensayo. Esta probabilidad se denota frecuentemente por α; generalmente se fija antes de la extracción de las muestras, de modo que los resultados obtenidos no influyen en la elección.

En la práctica se acostumbra a utilizar niveles de significación del 0.05 ó 0.01, aunque igualmente pueden emplearse otros valores. Si, por ejemplo se elige un nivel de significación del 0.05 ó 5% al diseñar un ensayo de hipótesis, entonces hay aproximadamente 5 ocasiones en 100 en que se rechazaría la hipótesis cuando debería ser aceptada, es decir, se está con un 95% de *confianza* de que se toma la decisión adecuada. En tal caso se dice que la hipótesis ha sido *rechazada al nivel de significación del* 0.05, lo que significa que se puede cometer error con una probabilidad de 0.05.

ENSAYOS REFERENTES A LA DISTRIBUCION NORMAL

Para aclarar las ideas anteriores, supóngase que con una hipótesis dada, la distribución muestral de un estadístico S es una distribución normal con media μ_S y desviación típica σ_S. Entonces la distribución de la variable tipificada dada por $Z = (S - \mu_S)/\sigma_S$, es una normal tipificada (media 0, varianza 1) y se muestra en la Fig. 7-1.

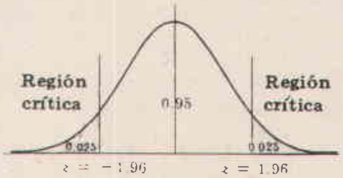


Fig. 7-1

Como se indica en la figura, se puede estar con el 95% de confianza de que, si la hipótesis es cierta, el valor de z obtenido de una muestra real para el estadístico S se encontrará entre − 1.96 y 1.96 (puesto que el área bajo la curva normal entre estos valores es 0.95).

Sin embargo, si al elegir una muestra aleatoria se encuentra que z para ese estadístico se halla *fuera* del recorrido − 1.96 a 1.96, lo que quiere decir que es un suceso con probabilidad de solamente 0.05 (área sombreada de la figura) si la hipótesis fuese verdadera. Entonces puede decirse que esta z difiere *significativamente* de la que cabía esperar bajo esta hipótesis y se estaría inclinado a rechazar la hipótesis.

El área total sombreada 0.05 es el nivel de significación del ensayo. Representa la probabilidad de cometer error al rechazar la hipótesis es decir, la probabilidad de cometer error del Tipo I. Así pues, se dice que la hipótesis se *rechaza al nivel de significación del* 0.05 o que la z obtenida del estadístico muestral dado es *significativa al nivel de significación del* 0.05.

El conjunto de las z que se encuentran fuera del rango −1.96 a 1.96 constituyen lo que se llama *región crítica* o *región de rechace de la hipótesis* o *región de significación.* El conjunto de las z que se encuentran dentro del recorrido − 1.96 a 1.96 podía entonces llamarse *región de aceptación de la hipótesis* o *región de no significación.*

De acuerdo con lo dicho hasta ahora, se puede formular la siguiente regla de decisión o ensayo de hipótesis o significación:

(*a*) Se rechaza la hipótesis al nivel de significación del 0.05 si la z obtenida para el estadístico S se encuentra fuera del recorrido − 1.96 a 1.96 (es decir, $z > 1.96$ ó $z < -1.96$). Esto equivale a decir que el estadístico muestral observado es significativo al nivel del 0.05.

(*b*) Se acepta la hipótesis (o si se desea no se toma decisión alguna) en caso contrario.

Debe ponerse de manifiesto que pueden igualmente emplearse otros niveles de significación. Por ejemplo, si se utilizase el nivel del 0.01 se sustituiría 1.96 en todo lo visto anteriormente por 2.58 (véase Tabla 7-1). La Tabla 6-1, página 195, puede también emplearse, puesto que la suma del nivel de significación y el nivel de confianza es 100%.

ENSAYOS DE UNA Y DOS COLAS

En el ensayo anterior se atendía a los valores extremos del estadístico S o su correspondiente z a ambos lados de la media, es decir, en las dos "colas" de la distribución. Por esta razón, tales ensayos se llaman *ensayos de dos colas* o *ensayos bilaterales.*

Sin embargo, con frecuencia se puede estar solamente interesado en los valores extremos a un solo lado de la media, es decir, en una "cola" de la distribución, como por ejemplo, cuando se está ensayando la hipótesis de que un proceso es mejor que otro (que es diferente a ensayar si un proceso es mejor o peor que otro). Tales ensayos se llaman *ensayos de una cola* o *ensayos unilaterales.* En tales casos, la región crítica es una región a un lado de la distribución, con área igual al nivel de significación.

La Tabla 7-1, que da los valores críticos de z para ensayos de una y dos colas a distintos niveles de significación, será de utilidad para propósitos de referencia. Valores críticos de z para otros niveles de significación, se pueden encontrar utilizando la tabla que da las áreas bajo la curva normal.

Tabla 7-1

Nivel de significación α	0.10	0.05	0.01	0.005	0.002
Valores críticos de z para ensayos unilaterales	-1.28 ó 1.28	-1.645 ó 1.645	-2.33 ó 2.33	-2.58 ó 2.58	-2.88 ó 2.88
Valores críticos de z para ensayos bilaterales	-1.645 y 1.645	-1.96 y 1.96	-2.58 y 2.58	-2.81 y 2.81	-3.08 y 3.08

ENSAYOS ESPECIALES DE SIGNIFICACION PARA GRANDES MUESTRAS

Para muestras grandes, las distribuciones muestrales de muchos estadísticos son distribuciones normales (o al menos casi normales) con media μ_S y desviación típica σ_S. En tales casos, se pueden utilizar los resultados anteriores para formular reglas de decisión o ensayos de hipótesis y significación. Los siguientes casos especiales son solamente unos pocos de los estadísticos de interés práctico. En cada caso, los resultados son para poblaciones infinitas o para muestreo con remplazamiento. Para muestreo sin remplazamiento de poblaciones finitas los resultados deberán modificarse. Véanse páginas 158 y 160.

1. Medias.

Aquí $S = \bar{X}$, la media muestral; $\mu_S = \mu_{\bar{X}} = \mu$, media poblacional; $\sigma_S = \sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$, donde σ es la desviación típica poblacional y n es el tamaño de la muestra. La variable tipificada viene dada por

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad (1)$$

Cuando es necesario se utiliza la desviación muestral observada s (ó $\hat{s}$), para estimar σ.

Para ensayar la hipótesis nula H_0 de que la media poblacional es $\mu = a$ utilizaríamos el estadístico (*1*). Entonces, utilizando un ensayo de dos colas, aceptaríamos H_0 (o al menos no lo rechazaríamos) al nivel 0.05 si para una muestra específica de tamaño n con media $\bar{x}$

$$-1.96 \leqq \frac{\bar{x}-a}{\sigma/\sqrt{n}} \leqq 1.96 \qquad (2)$$

y lo rechazaríamos por el contrario. Para otros niveles de significación cambiaríamos (*2*) apropiadamente.

Para ensayar la hipótesis de que la media poblacional es mayor que a utilizamos aun la hipótesis nula H_0 de que es igual a a. Entonces, utilizando un ensayo de una cola, aceptaríamos H_0 (o al menos no la rechazaríamos) al nivel 0.05 si

$$\frac{\bar{x}-a}{\sigma/\sqrt{n}} < 1.645 \qquad (3)$$

(véase Tabla 7-1). Para ensayar la hipótesis de que la media poblacional es menor que a aceptaríamos H_0 al nivel 0.05 si

$$\frac{\bar{x}-a}{\sigma/\sqrt{n}} > -1.645 \qquad (4)$$

2. Proporciones.

Aquí $S = P$, la proporción de "éxitos" en una muestra; $\mu_S = \mu_P = p$, donde p es la proporción de éxitos en la población y n es el tamaño de la muestra; $\sigma_S = \sigma_P = \sqrt{pq/n}$, donde $q = 1 - p$. La variable tipificada viene dada por

$$Z = \frac{P-p}{\sqrt{pq/n}} \qquad (5)$$

En el caso de que $P = X/n$, donde X es el número real de éxitos en una muestra, (*5*) se convierte en

$$Z = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \qquad (6)$$

Consideraciones semejantes a las hechas anteriormente para medias pueden hacerse.

3. Diferencias de medias.

Sean $\bar{X}_1$ y $\bar{X}_2$ las medias muestrales obtenidas en dos muestras grandes de tamaño n_1 y n_2 extraídas de poblaciones respectivas que tienen de media μ_1 y μ_2 y desviaciones típicas σ_1 y σ_2. Considérese la hipótesis nula de que *no hay diferencia* entre las medias poblacionales, es decir, $\mu_1 = \mu_2$. De (*11*), página 159, haciendo $\mu_1 = \mu_2$ se ve que la distribución muestral de la diferencia de medias se distribuye aproximadamente como una normal con media y desviación típica dadas por

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = 0 \qquad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \qquad (7)$$

donde se puede, si es necesario, utilizar las desviaciones típicas muestrales s_1 y s_2 (ó $\hat{s}_1$ y $\hat{s}_2$) como estimas de σ_1 y σ_2.

Con la variable tipificada dada por

$$Z = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-0}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} \qquad (8)$$

de una manera semejante a la descrita en la Parte 1 se puede ensayar la hipótesis nula contra la hipótesis alternativa (o la significación de una diferencia observada) a un nivel de significación apropiado.

4. Diferencias de Proporciones.

Sean P_1 y P_2 las proporciones muestrales de dos grandes muestras de tamaños n_1 y n_2 extraídas de poblaciones respectivas que tienen proporciones p_1 y p_2. Considérese la hipótesis nula de que *no hay diferencia* entre los parámetros poblacionales, es decir, $p_1 = p_2$, y así las muestras son realmente extraídas de la misma población.

De (*13*), página 159, haciendo $p_1 = p_2 = p$, se ve que la distribución muestral de la diferencia de proporciones se distribuye aproximadamente como una normal con media y desviación típica dadas por

$$\mu_{P_1-P_2} = 0 \qquad \sigma_{P_1-P_2} = \sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} \tag{9}$$

donde $\bar{P} = \dfrac{n_1P_1 + n_2P_2}{n_1 + n_2}$ se utiliza como una estima de la proporción poblacional p.

Con la variable tipificada

$$Z = \frac{P_1 - P_2 - 0}{\sigma_{P_1-P_2}} = \frac{P_1 - P_2}{\sigma_{P_1-P_2}} \tag{10}$$

se puede ensayar las diferencias observadas a un nivel de significación apropiado y de este modo ensayar la hipótesis nula.

Ensayos referentes a otros estadísticos pueden diseñarse análogamente. (véase Tabla 5-1, página 162).

ENSAYOS ESPECIALES DE SIGNIFICACION PARA PEQUEÑAS MUESTRAS

En el caso de pequeñas muestras ($n < 30$) podemos formular ensayos de hipótesis y significación utilizando otras distribuciones además de la normal, como la t de Student, chi-cuadrado, F, etc. Estas distribuciones incluyen la teoría de muestreo exacto y lógicamente son válidas aún cuando las muestras son grandes, en cuyo caso se reducen a las dadas anteriormente. Los siguientes son algunos ejemplos.

1. Medias.

Para ensayar la hipótesis H_0 de que una población normal tiene de media μ utilizamos

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{S}}\sqrt{n} \tag{11}$$

donde $\bar{X}$ es la media de una muestra de tamaño n. Esto es análogo al utilizar la variable tipificada $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ para grandes n, excepto que se utiliza $\hat{S} = \sqrt{n/(n-1)}\,S$ en lugar de σ. La diferencia estriba en que mientras Z se distribuye normalmente, T sigue una distribución de Student. Los resultados también pueden emplearse cuando la distribución no es exactamente normal pero tiene una curva de distribución en forma de campana. Ensayos de hipótesis semejantes a los de las medias en la página 213 pueden hacerse empleando valores críticos de t en cambio de valores críticos de z.

2. Diferencias de medias.

Supóngase que se extraen aleatoriamente dos muestras de tamaños n_1 y n_2 de poblaciones normales cuyas desviaciones típicas son iguales ($\sigma_1 = \sigma_2$). Supóngase también que estas dos muestras tienen medias y desviaciones típicas dadas por $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ y S_1 y S_2, respectivamente. Para ensayar la hipótesis H_0 de que las muestras provienen de la misma población (es decir, $\mu_1 = \mu_2$ lo mismo que $\sigma_1 = \sigma_2$) se utiliza el valor de t dado por

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \qquad \text{donde} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{n_1S_1^2 + n_2S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \tag{12}$$

La distribución de T es una distribución de Student con $\nu = n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad. El empleo de (*12*) está plenamente justificado al hacer $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ en (*12*), página 159, y después utilizar como estima de σ^2 la media ponderada

$$\frac{(n_1-1)\hat{S}_1^2 + (n_2-1)\hat{S}_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)} = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

donde $\hat{S}_1^2$ y $\hat{S}_2^2$ son estimas insesgadas de σ_1^2 y σ_2^2. Esta es la *varianza combinada* obtenida al combinar los datos.

3. Varianzas.

Para ensayar la hipótesis H_0 de que una población normal tiene varianza σ^2 consideramos la variable aleatoria

$$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \tag{13}$$

que (véase página 161) tiene la distribución chi-cuadrado con $n - 1$ grados de libertad. Entonces si una muestra aleatoria de tamaño n tiene varianza s^2 aceptaríamos H_0, basados en el ensayo de dos colas, (o al menos no la rechazaríamos) en el nivel 0.05 si

$$\chi^2_{.025} \leq \frac{ns^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{.975} \tag{14}$$

y la rechazaríamos de otra forma. Un resultado semejante puede obtenerse para el nivel 0.01 u otro nivel.

Para ensayar la hipótesis H_1 de que la varianza poblacional es mayor que σ^2 emplearíamos la hipótesis H_0, pero entonces emplearíamos un ensayo de una cola. Por tanto rechazaríamos H_0, en el nivel 0.05 (y por tanto concluiríamos que H_1 es correcta) si la varianza muestral específica, s^2, fuera tal que

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} > \chi^2_{.95} \tag{15}$$

y aceptaríamos H_0 (o al menos no la rechazaríamos) de otra forma.

4. Relaciones de varianzas.

En algunos problemas deseamos decidir si dos muestras de tamaños m y n respectivamente, cuyas varianzas medidas son s_1^2 y s_2^2, provienen o no de la misma población normal. En este caso utilizamos el estadístico (véase página 161)

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2} \tag{16}$$

donde σ_1^2, σ_2^2 son las varianzas de las dos poblaciones normales de donde se extraen las muestras. Si H_0 denota la hipótesis nula de que no hay diferencia entre las varianzas poblacionales, es decir $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Bajo esta hipótesis (*16*) se convierte en

$$F = \frac{S_1^2}{\hat{S}_2^2} \tag{17}$$

Para ensayar esta hipótesis al nivel 0.10, por ejemplo, primero anotamos que F en (*16*) tiene la distribución F con $m - 1$, $n - 1$ grados de libertad. Entonces, utilizando un ensayo de dos colas, aceptaríamos H_0 (o no la rechazaríamos) en el nivel 0.10 si

$$F_{.05} \leq \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \leq F_{.95} \tag{18}$$

y lo rechazaríamos en el caso contrario.

Procedimientos semejantes empleando ensayos de una cola pueden formularse en el caso que deseemos ensayar la hipótesis de que una varianza poblacional determinada sea mayor que otra.

RELACION ENTRE LA TEORIA DE ESTIMACION Y ENSAYO DE HIPOTESIS

De las anotaciones anteriores se puede observar que existe una relación entre la teoría de estimación involucrando los intervalos de confianza y la teoría de ensayo de hipótesis. Por ejemplo, notamos que el resultado (*2*) para aceptar H_0 en el nivel 0.05 es equivalente al resultado (*1*) en la página 195 conducente al intervalo de confianza del 95%

$$\bar{x} - \frac{1.96\,\sigma}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \bar{x} + \frac{1.96\,\sigma}{\sqrt{n}} \tag{19}$$

Por tanto, al menos en el caso de los ensayos de dos colas, podríamos realmente emplear el intervalo de confianza del Capítulo 6 para ensayar hipótesis. Un resultado semejante para ensayos de una cola requeriría intervalos de confianza unilaterales. A pesar de que la necesidad de tales intervalos es rara, es posible definirlos (véase Problema 7.136 y también Problema 6.14).

CURVAS CARACTERISTICAS DE OPERACION. POTENCIA DE UN ENSAYO

Se ha visto cómo el error del Tipo I puede limitarse eligiendo adecuadamente un nivel de significación. Es posible evitar el riesgo de error del Tipo II totalmente, simplemente no aceptando nunca la hipótesis. Sin embargo, en muchos casos prácticos esto no puede hacerse. En tales casos, se utilizan a menudo *curvas características de la operación* o *curvas OC*, que son gráficos que muestran las probabilidades de errores del Tipo II bajo diferentes hipótesis. Estas suministran información de cómo en ensayos dados se logra minimizar los errores del Tipo II, es decir, indican la *potencia de un ensayo* para evitar el tomar decisiones equivocadas. Son útiles en diseño de experimentos por mostrar, por ejemplo, qué tamaños de muestras deben emplearse.

GRAFICOS DE CONTROL DE CALIDAD

Es a menudo en la práctica importante conocer cuándo un proceso ha cambiado suficientemente, de modo que puedan darse los pasos para remediar la situación. Tales problemas aparecen, por ejemplo en *control de calidad*, donde se debe a veces rápidamente decidir si los cambios observados se deben simplemente a fluctuaciones aleatorias o a cambios reales en el proceso de fabricación a causa de deterioro en las máquinas, errores de los empleados, etc. Los *gráficos de control* suministran un método útil y sencillo para tratar tales problemas (véase Problema 7.29).

AJUSTE DE LAS DISTRIBUCIONES TEORICAS A DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIA MUESTRALES

Cuando se tiene alguna indicación sobre la distribución de una población por razonamientos probabilísticos u otra causa, es posible frecuentemente ajustar tales distribuciones teóricas (también llamadas "modelos" o distribuciones "esperadas") a distribuciones de frecuencia obtenidas de muestras de la población. El método utilizado generalmente consiste en emplear la media y la desviación típica de la muestra para estimar la media y desviación típica de la población. Véanse Problemas 7.30, 7.32 y 7.33.

El problema de ensayar la *bondad del ajuste* de las distribuciones teóricas a las distribuciones muestrales es esencialmente el mismo que el de decidir si hay diferencias importantes entre los valores de la población y la muestra. Un ensayo de significación importante para la bondad del ajuste de distribuciones teóricas, el *ensayo chi-cuadrado*, se describe más adelante.

En un intento para determinar si una distribución normal representa un buen ajuste para datos dados, conviene utilizar *papel gráfico de curva normal* o *papel gráfico de probabilidad*, como a veces se le llama (véase Problema 7.31).

ENSAYO CHI-CUADRADO PARA LA BONDAD DEL AJUSTE

Para determinar si la proporción P de "éxitos" en una muestra de tamaño n extraída de una población binomial difiere de la proporción poblacional p de éxitos, hemos utilizado el estadístico dado por *(5)* o *(6)* en la página 214. En este caso sencillo solamente dos sucesos A_1, A_2 pueden ocurrir, que los hemos llamado "éxito" y "fracaso" con probabilidades p y $q = 1 - p$. Un valor muestral específico de la variable aleatoria $X = nP$ se llama la *frecuencia observada* para el suceso A_1 en tanto que np se llama la *frecuencia esperada* o *teórica.*

EJEMPLO 7.1. Si obtenemos una muestra de 100 lanzamientos de una moneda honrada, de modo que $n = 100$, $p = 1/2$, entonces la frecuencia esperada de caras (éxitos) es $np = (100)(1/2) = 50$. La frecuencia observada en la muestra podría lógicamente ser diferente.

Una generalización al caso donde pueden ocurrir k sucesos posibles $A_1, A_2, \ldots, A_k$ con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_k$, respectivamente. En tal caso tenemos una *población multinomial* (véase página 113). Si extraemos una muestra de tamaño n de esta población las frecuencias observadas para los sucesos, $A_1, \ldots, A_k$ pueden describirse por las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_k$ (cuyos valores específicos $x_1, x_2, \ldots, x_k$ serían las frecuencias observadas para la muestra), en tanto que las frecuencias esperadas estarían dadas por $np_1, \ldots, np_k$ respectivamente. Los resultados pueden indicarse como se hace en la Tabla 7-2.

Tabla 7-2

Suceso	A_1	A_2	$\cdots$	A_k
Frecuencia observada	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
Frecuencia esperada	np_1	np_2	$\cdots$	np_k

EJEMPLO 7.2. Si obtenemos una muestra de 120 lanzamientos de un dado honrado, de modo que $n = 120$, entonces las probabilidades de las caras 1, 2, ..., 6 se denotan por $p_1, p_2, \ldots, p_6$ respectivamente y son todas iguales a 1/6. Las correspondientes frecuencias esperadas son $np_1, np_2, \ldots, np_6$ y todas iguales a $(120)(\frac{1}{6}) = 20$. Las frecuencias observadas de las diferentes caras que resultan en la muestra pueden lógicamente ser diferentes.

La clave para la posible generalización del estadístico *(6)* que podría medir las discrepancias existentes entre las frecuencias observadas y esperadas en la Tabla 7-2 se obtiene al elevar al cuadrado el estadístico *(6)* y escribiéndolo como

$$Z^2 = \frac{(X - np)^2}{npq} = \frac{(X_1 - np)^2}{np} + \frac{(X_2 - nq)^2}{nq} \tag{20}$$

donde $X_1 = X$ es la variable aleatoria asociada con "éxitos" y $X_2 = n - X_1$ es la variable aleatoria asociada con "fracaso". Nótese que nq en *(20)* es la frecuencia observada de fracasos.

La forma del resultado *(20)* sugiere que una medida de la discrepancia entre frecuencias observadas y esperadas para el caso general se suministra por el estadístico

$$\chi^2 = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2} + \cdots + \frac{(X_k - np_k)^2}{np_k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(X_j - np_j)^2}{np} \tag{21}$$

donde la frecuencia total (es decir el tamaño muestral) es n, de modo que

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_k = n \tag{22}$$

Una expresión equivalente a *(21)* es

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{X_j^2}{np_j} - n \tag{23}$$

Si $\chi^2 = 0$, las frecuencias observadas y esperadas concuerdan exactamente, mientras que si $\chi^2 > 0$, no coinciden exactamente. A valores mayores de χ^2, mayores son las discrepancias entre las frecuencias observadas y esperadas.

Como se demuestra en el Problema 7.62, la distribución muestral de χ^2 definida por (*21*) se aproxima muy estrechamente a la distribución chi-cuadrado por tanto, justificando la elección de símbolo en (*21*) si las frecuencias esperadas np_j son al menos iguales a 5, la aproximación mejora para los valores superiores. El número de grados de libertad ν está dado por

(*a*) $\nu = k - 1$ si las frecuencias esperadas pueden calcularse sin tener que estimar parámetros poblacionales con los estadísticos muestrales. Adviértase que el restar 1 a k es a causa de la condición restrictiva (*22*) que denota que si son conocidas $k - 1$ de las frecuencias esperadas, la frecuencia restante puede ser determinada.

(*b*) $\nu = k - 1 - m$ si las frecuencias esperadas solamente pueden calcularse estimando m parámetros de la población a partir de los estadísticos muestrales.

En la práctica, las frecuencias esperadas se calculan de acuerdo con una hipótesis H_0. Si bajo esta hipótesis el valor calculado de χ^2 dado por (*21*) o (*23*) es mayor que algún valor crítico (tal como $\chi^2_{.95}$ ó $\chi^2_{.99}$, que son los valores críticos a los niveles de significación de 0.05 y 0.01 respectivamente), se deduce que las frecuencias observadas difieren *significativamente* de las esperadas y se rechaza H_0 al nivel de significación correspondiente. En caso contrario, se aceptará o al menos no se rechazará. Este procedimiento se llama *ensayo* o *prueba de chi-cuadrado* de la hipótesis.

Debe advertirse que en aquellas circunstancias en que χ^2 esté *muy próximo a cero* debe mirarse con cierto recelo, puesto que es raro que las frecuencias observadas concuerden *demasiado bien* con las esperadas. Para examinar tales situaciones se puede determinar si el valor calculado de χ^2 es menor que $\chi^2_{.05}$ ó $\chi^2_{.01}$, en cuyos casos se decide que la concordancia es *bastante buena* a los niveles de significación de 0.05 a 0.01 respectivamente.

Además de aplicarse a la distribución multinomial, la prueba chi-cuadrado puede ser empleada para determinar de qué forma distribuciones teóricas tales como la normal, de Poisson, etc., se ajustan a distribuciones empíricas, es decir, aquellas que se obtienen de los datos muestrales. Véase Problema 7.44.

TABLAS DE CONTINGENCIA

La Tabla 7-2 en la que las frecuencias observadas ocupan una sola fila, es una *tabla de clasificación simple*. Puesto que el número de columnas es k, también se llama *tabla* $1 \times k$ (léase "1 por k"). Extendiendo estas ideas se llega a las *tablas de clasificación doble* o *tablas* $h \times k$, en las que las frecuencias observadas ocupan h filas y k columnas. Tales tablas se llaman a menudo *tablas de contingencia*.

Correspondiéndose con cada frecuencia observada en una tabla de contingencia $h \times k$, hay una *frecuencia teórica* o *esperada* que se calcula bajo alguna hipótesis y según las reglas de probabilidad. Estas frecuencias que ocupan las *casillas* de una tabla de contingencia se llaman *frecuencias elementales*. La frecuencia total de cada fila o columna es la llamada *frecuencia marginal*.

Para estudiar el acuerdo entre las frecuencias observadas y esperadas, se calcula el estadístico

$$\chi^2 = \sum_j \frac{(X_j - np_j)^2}{np_j} \qquad (24)$$

donde la suma se extiende a todas las casillas de la tabla de contingencia, los símbolos X_j y np_j representan respectivamente las frecuencias observadas y esperadas en la casilla j. Esta suma que es análoga a (*21*), contiene hk términos. La suma de todas las frecuencias observadas se denota por n y es igual a la suma de todas las frecuencias esperadas [comparar con la ecuación (*22*)].

Como antes el estadístico (*24*) tiene una distribución muestral muy próxima a la distribución chi-cuadrado, con tal de que las frecuencias esperadas no sean demasiado pequeñas. El número de grados de libertad ν de esta distribución chi-cuadrado está dado para $h > 1$, $k > 1$ por

(*a*) $\nu = (h-1)(k-1)$ si las frecuencias esperadas pueden calcularse sin tener que estimar parámetros poblacionales con los estadísticos muestrales. Para una prueba de esto véase el Problema 7.48.

(*b*) $\nu = (h-1)(k-1) - m$ si las frecuencias observadas pueden solamente calcularse estimando m parámetros poblacionales con los estadísticos muestrales.

Los ensayos de significación para tablas $h \times k$ son análogos a los de las tablas $1 \times k$. Las frecuencias esperadas son halladas bajo una determinada hipótesis H_0. Una hipótesis normalmente supuesta es la de que las dos clasificaciones son independientes entre sí.

Las tablas de contingencia pueden extenderse a un número mayor de dimensiones. Así por ejemplo, se pueden tener tablas $h \times k \times l$ donde estén presentes 3 clasificaciones.

CORRECCION DE YATES PARA LA CONTINUIDAD

Cuando se aplican a datos discretos los resultados para distribuciones continuas deben hacerse ciertas correcciones, como se ha visto en capítulos anteriores. Una corrección análoga es aplicable cuando se utiliza la distribución chi-cuadrado. La corrección consiste en poner (*21*) como sigue

$$\chi^2 \text{ (corregida)} = \frac{(|X_1 - np_1| - 0.5)^2}{np_1} + \frac{(|X_2 - np_2| - 0.5)^2}{np_2} + \cdots + \frac{(|X_k - np_k| - 0.5)^2}{np_k} \tag{25}$$

se conoce frecuentemente como *corrección de Yates.* También existe una modificación análoga de (*24*).

En general, la corrección se hace solamente cuando el número de grados de libertad es $\nu = 1$. En muestras grandes se obtienen prácticamente los mismos resultados que la χ^2 no corregida, pero pueden aparecer dificultades en relación con los valores críticos (véase Problema 7.41). Para muestras pequeñas, donde cada frecuencia esperada se encuentra entre 5 y 10, quizá sea lo mejor comparar los valores de χ^2 corregido y no corregido. Si ambos valores conducen a la misma conclusión, según una hipótesis, tal como rechazarla al nivel de 0.05 raramente se presentan dificultades. Si conducen a conclusiones diferentes, se puede o bien incrementar los tamaños muestrales o si esto no es posible, se pueden emplear métodos de probabilidad exactos, de acuerdo con la distribución multinomial.

COEFICIENTE DE CONTINGENCIA

Una medida del grado de relación, asociación o dependencia de las clasificaciones en una tabla de contingencia está dada por

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} \tag{26}$$

que se llama *coeficiente de contingencia.* A mayor valor de C, mayor es el grado de asociación. El número de filas y columnas de la tabla de contingencia determina el valor máximo de C, que no es nunca superior a uno. Si el número de filas y columnas de una tabla de contingencia es igual a k, el máximo valor de C viene dado por $\sqrt{(k-1)/k}$. (Véanse Problemas 7.52, 7.53 y 7.127).

Problemas resueltos

ENSAYOS DE MEDIAS Y PROPORCIONES UTILIZANDO DISTRIBUCIONES NORMALES

7.1. Hallar la probabilidad de obtener entre 40 y 60 caras inclusive en 100 lanzamientos de una moneda.

Según la distribución binomial, la probabilidad pedida es

$$ {}_{100}C_{40}\left(\frac{1}{2}\right)^{40}\left(\frac{1}{2}\right)^{60} + {}_{100}C_{41}\left(\frac{1}{2}\right)^{41}\left(\frac{1}{2}\right)^{59} + \cdots + {}_{100}C_{60}\left(\frac{1}{2}\right)^{60}\left(\frac{1}{2}\right)^{40} $$

La media y la desviación típica del número de caras en 100 lanzamientos vienen dadas por

$$ \mu = np = 100\left(\frac{1}{2}\right) = 50 \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(100)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = 5 $$

Puesto que np y nq son ambas mayores de 5, puede utilizarse para la evaluación de la suma anterior la aproximación normal a la distribución binomial.

En una escala continua, entre 40 y 60 caras inclusive es lo mismo que entre 39.5 y 60.5 caras.

39.5 en unidades tipificadas $= \dfrac{39.5 - 50}{5} = -2.10$ 60.5 en unidades tipificadas $= \dfrac{60.5 - 50}{5} = 2.10$

Probabilidad pedida = área bajo la curva normal entre $z = -2.10$ y $z = 2.10$
= 2(área entre $z = 0$ y $z = 2.10$)

7.2. Para ensayar la hipótesis de que una moneda está bien hecha, se toma la siguiente regla de decisión: (*1*) se acepta la hipótesis si el número de caras en una serie de 100 lanzamientos se encuentra entre 40 y 60, ambos inclusive; (*2*) de otro modo, se rechaza.

(*a*) Hallar la probabilidad de rechazar la hipótesis, cuando en realidad es cierta.

(*b*) Interpretar gráficamente la regla de decisión y el resultado del apartado (*a*).

(*c*) ¿Qué conclusiones se sacarían si en la muestra de 100 lanzamientos se obtuviesen 53 caras? ¿60 caras?

(*d*) ¿Podían ser erróneas las conclusiones de (*c*)? Explicar.

(*a*) Por el Problema 7.1, la probabilidad de no obtener entre 40 y 60 caras inclusive si la moneda está bien hecha 1 − 0.9642 = 0.0358. Entonces la probabilidad de rechazar la hipótesis cuando es correcta = 0.0358.

(*b*) La regla de decisión se ve gráficamente en la Fig. 7-2, que muestra la distribución de probabilidad de caras en 100 lanzamientos de una moneda bien hecha.

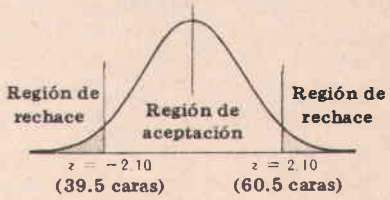


Fig. 7-2

Si en una serie de 100 lanzamientos se obtiene una z entre −2.10 y 210, se acepta la hipótesis; de otro modo se rechaza y se decide que la moneda no está bien hecha.

El error que se puede cometer de rechazar la hipótesis cuando debería aceptarse es el *error del Tipo I* de la regla de decisión y la probabilidad de cometer este error es igual a 0.0358 del apartado (*a*), está representado por el área total sombreada de la figura.

Si en una serie de 100 lanzamientos se obtiene un número de caras cuya z se encuentra en las regiones sombreadas, se dirá que esta z difiere *significativamente* de la que cabría esperar si la hipótesis fuese cierta. Por esta razón, el área total sombreada (es decir, probabilidad de error del Tipo I) se llama *nivel de significación* de la regla de decisión y es igual a 0.0358 en este caso. Así, pues se habla de rechazar la hipótesis a un nivel de significación de 0.0358 ó 3.58%.

(*c*) Según la regla de decisión, en ambos casos se aceptaría la hipótesis de que la moneda está bien hecha. Se puede argüir que con solo una cara más que se hubiese obtenido, se habría rechazado la hipótesis. Esto es lo que se debe afrontar cuando para tomar decisiones se toma cualquier línea de división.

(*d*) Si. Se puede aceptar la hipótesis cuando realmente debería rechazarse como, por ejemplo, sería el caso cuando la probabilidad de cara fuese realmente 0.7 en lugar de 0.5.

El error que se comete al aceptar la hipótesis cuando debería rechazarse es *error del Tipo II* de la decisión. Para mayor discusión véanse Problemas 7.23-7.25.

7.3. Diseñar una regla de decisión para ensayar la hipótesis de que una moneda está bien hecha si en una muestra de 64 lanzamientos de la moneda se toma un nivel de significación de (*a*) 0.05 y (*b*) 0.01.

(*a*) **Primer método:** Si el nivel de significación es 0.05, cada área sombreada en la Fig. 7-3 es 0.025 por simetría. Entonces el área entre 0 y $z_1 = 0.5000 - 0.0250 = 0.4750$, y $z_1 = 1.96$.

Así, pues, una posible regla de decisión es:

(*1*) Aceptar la hipótesis de que la moneda está bien hecha si Z está entre -1.96 y 1.96.

(*2*) Rechazar la hipótesis en cualquier otro caso.

Los valores críticos -1.96 y 1.96 pueden ser también sacados de la Tabla 7-1.

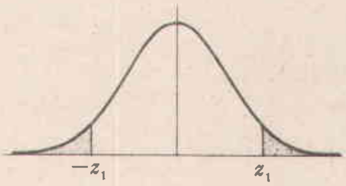


Fig. 7-3

Para expresar esta regla de decisión en términos del número de caras a obtenerse en los 64 lanzamientos de la moneda, nótese que la media y la desviación típica de la distribución binomial exacta de caras están dadas por

$$\mu = np = 64(0.5) = 32 \qquad \text{y} \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{64(0.5)(0.5)} = 4$$

bajo la hipótesis de que la moneda está bien hecha. Entonces $Z = (X - \mu)/\sigma = (X - 32)/4$.

Si $Z = 1.96$, $(X - 32)/4 = 1.96$ ó $X = 39.84$. Si $Z = -1.96$, $(X - 32)/4 = -1.96$ ó $X = 24.16$. Así pues, la regla de decisión resulta:

(*1*) Se acepta la hipótesis de que la moneda está bien hecha si el número de caras se encuentra entre 24.16 y 39.84, es decir, entre 25 y 39 ambos inclusive.

(*2*) Se rechazá la hipótesis en caso contrario.

Segundo método: Con probabilidad 0.95, el número de caras se encontrará entre $\mu - 1.96\sigma$ y $\mu + 1.96\sigma$, es decir, $np - 1.96\sqrt{npq}$ y $np + 1.96\sqrt{npq}$ o entre $32 - 1.96(4) = 24.16$ y $32 + 1.96(4) = 39.84$ que lleva a la regla de decisión anterior.

Tercer método: $-1.96 < Z < 1.96$ equivale a $-1.96 < (X - 32)/4 < 1.96$. Entonces $-1.96(4) < (X - 32) < 1.96(4)$ ó $32 - 1.96(4) < X < 32 + 1.96(4)$, es decir, $24.16 < X < 39.84$, que también conduce a la regla de decisión anterior.

(*b*) Si el nivel de significación es 0.01, cada área sombreada en la figura anterior es 0.005. Entonces, el área entre 0 y z_1 es $0.5000 - 0.0050 = 0.4950$ y $z_1 \mp 2.58$ (más exactamente 2.575). Esto puede también obtenerse de la Tabla 7-1.

Siguiendo el mismo procedimiento del método segundo del apartado (*a*), se ve que con probabilidad 0.99 el número de caras se encontrará entre $\mu - 2.58\sigma$ y $\mu + 2.58\sigma$, es decir, $32 - 2.58(4) = 21.68$ y $32 + 2.58(4) = 42.32$.

Entonces la regla de decisión sería:

(*1*) Aceptar la hipótesis si el número de caras se encuentra entre 22 y 42 inclusive.

(*2*) Rechazarla en cualquier otro caso.

7.4. ¿Cómo se podría diseñar una regla de decisión en el Problema 7.3 que evite el error del Tipo II?

El error del Tipo II se comete al aceptar una hipótesis que debería ser rechazada. Para evitar este error, en lugar de aceptar la hipótesis, lo que se hace es simplemente no rechazarla, lo que significaría que se rehusa cualquier decisión en este caso. Así por ejemplo, la regla de decisión del Problema 7.3(*b*) sería:

(*1*) No rechazar la hipótesis si el número de caras se encuentra entre 22 y 42 inclusive.

(*2*) Rechazar la hipótesis en caso contrario.

Sin embargo, en muchos ejemplos prácticos es importante decidir si una hipótesis debe ser aceptada o rechazada. Una completa discusión de tales casos requiere la consideración de errores del Tipo II (véanse Problemas 7.23-7.25).

7.5. En un experimento sobre percepción extrasensorial (E.S.P.) un individuo (sujeto) en una habitación fue preguntado sobre el color (rojo o azul) en una carta elegida por otro individuo en otra habitación de un conjunto de 50 cartas bien barajadas. Es desconocido para el sujeto cuántas cartas rojas o azules hay en el lote. Si el sujeto identifica correctamente 32 cartas, determinar si los resultados son significativos al nivel de significación de (*a*) 0.05 y (*b*) 0.01.

Si p es la probabilidad de que el sujeto elija correctamente el color de una carta, entonces se tiene que decidir entre las dos hipótesis siguientes:

H_0: $p = 0.5$ y el sujeto está simplemente adivinando, es decir, los resultados son totalmente casuales

H_1: $p > 0.5$ y el sujeto tiene fuerza de E.S.P.

Se elige un ensayo de una cola, puesto que no se está interesado en la facultad de obtener valores bajos, sino en la facultad de obtener aciertos numerosos.

Si la hipótesis H_0 es cierta, la media y la desviación típica del número de cartas identificadas correctamente está dado por

$$\mu = np = 50(0.5) = 25 \qquad \text{y} \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50(0.5)(0.5)} = \sqrt{12.5} = 3.54$$

(*a*) Para un ensayo de una cola al nivel de significación de 0.05 se debe elegir z_1 en la Fig. 7-4 de modo que el área sombreada en la región crítica de valores altos sea 0.05. Entonces el área entre 0 y $z_1 = 0.4500$, y $z_1 = 1.645$. Esto puede también sacarse de la Tabla 7-1.

Así, pues, la regla de decisión o ensayo de significación es:

(*1*) Si la z observada es mayor que 1.645, los resultados son significativos al nivel del 0.05 y el individuo tiene fuerza de E.S.P.

(*2*) Si z es menor de 1.645 los resultados se deben a la casualidad, es decir, no significativos al nivel del 0.05.

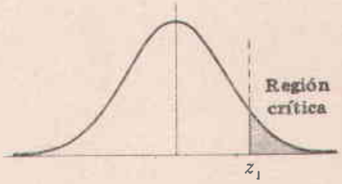


Fig. 7-4

Puesto que 32 unidades tipificadas $(32 - 25)/3.54 = 1.98$ es mayor que 1.645, la decisión (*1*) se mantiene es decir, se concluye que al nivel del 0.05 el individuo tiene fuerza de E.S.P.

Adviértase que realmente debería aplicarse una corrección de continuidad, puesto que 32 en una escala continua está entre 31.5 y 32.5. Sin embargo, 31.5 tiene un valor tipificado de $(31.5 - 25)/3.54 = 1.84$ llegándose a la misma conclusión anterior.

(*b*) Si el nivel de significación es 0.01, entonces el área entre 0 y $z_1 = 0.4900$ y $z_1 = 2.33$. Puesto que 32 (ó 31.5) en unidades tipificadas es 1.98 (ó 1.84) que es menor que 2.33, se deduce que los resultados *no son significativos* al nivel de 0.01.

Algunos estadísticos adoptan la terminología de que los resultados significativos al nivel del 0.01 son *altamente significativos*, los resultados significativos al nivel del 0.05 pero no al nivel del 0.01 son *probablemente significativos*, mientras que los resultados significativos a niveles superiores al 0.05 son *no significativos.*

Según la terminología, se concluye que los resultados del experimento anterior son *probablemente significativos*, de modo que posteriores investigaciones del fenómeno están probablemente justificadas.

Puesto que los niveles de significación sirven de guía en la toma de decisiones, algunos estadísticos citan las probabilidades reales inherentes. Por ejemplo, en este problema puesto que $P(Z \geqq 1.84) = 0.0322$ el estadístico puede decir que en base a la posibilidad de que en el experimento se llegue a una conclusión errónea sobre que el individuo tiene fuerza de E.S.P. es sobre el 3 por 100. La probabilidad citada en este caso 0.0322, se llama a veces *nivel de significación experimental* o *descriptivo*.

7.6. El fabricante de una patente médica sostiene que la misma tiene un 90% de efectividad en el alivio de una alergia, por un período de 8 horas. En una muestra de 200 individuos que tenían la alergia la medicina suministrada alivió a 160 personas. Determinar si la aseveración del fabricante es cierta.

Denótese por p la posibilidad de obtener alivio de la alergia utilizando la medicina. Entonces se debe decidir tre las dos hipótesis:

$$H_0:\ p = 0.9 \text{ y la aseveración es correcta}$$

$$H_1:\ p < 0.9 \text{ y la aseveración es falsa}$$

Se elige un ensayo unilateral, puesto que se está interesado en determinar si la proporción de gente aliviada por la medicina es demasiado baja.

Si se toma el nivel de significación del 0.01, es decir, si el área sombreada en la Fig. 7-5 es 0.01, entonces $z_1 = -2.33$, como puede deducirse del Problema 7.5(*b*), mediante la simetría de la curva, o de la Tabla 7-1.

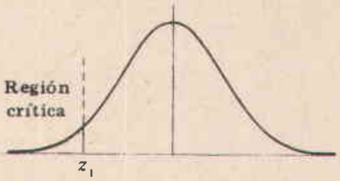


Fig. 7-5

Se toma como regla de decisión:

(*1*) La aseveración no es legítima si Z es menor de -2.33 (en cuyo caso se rechaza H_0).

(*2*) En caso contrario, la aseveración es legítima y los resultados obtenidos se deben a la casualidad (en cuyo caso se acepta H_0).

Si H_0 es cierta $\mu = np = 200(0.9) = 180$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(200)(0.9)(0.1)} = 4.23$.

Ahora 160 en unidades tipificadas $(160 - 180)/4.23 = -4.73$, que es mucho menor de -2.33. Así pues, por la regla de decisión se deduce que la aseveración no es legítima y que los resultados muestrales son *altamente significativos* (véase final del Problema 7.5).

7.7. La duración media de una muestra de 100 tubos fluorescentes producidos por una compañía resulta ser 1570 horas, con una desviación típica de 120 horas. Si μ es la duración media de todos los tubos producidos por la compañía, comprobar la hipótesis $\mu = 1600$ horas contra la hipótesis alternativa $\mu \neq 1600$ horas con un nivel de significación de (*a*) 0.05 y (*b*) 0.01.

Se tiene que decidir entre las dos hipótesis:

$$H_0:\ \mu = 1600 \text{ horas,}$$
$$H_1:\ \mu \neq 1600 \text{ horas}$$

Un ensayo bilateral debe utilizarse aquí puesto que $\mu \neq 1600$ incluye valores mayores y menores de 1600.

(*a*) Para un ensayo bilateral al nivel de significación de 0.05 se tiene la siguiente regla de decisión:

(*1*) Se rechaza H_0 si la z de la media muestral está fuera del rango -1.96 a 1.96.

(*2*) Se acepta H_0 (o no se toma decisión alguna) en caso contrario.

El estadístico bajo consideración es la media muestral $\bar{X}$. La distribución muestral de $\bar{X}$ tiene una media $\mu_{\bar{X}} = \mu$ y una desviación típica $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$, donde μ y σ son la media y la desviación típica de la población de todos los tubos producidos por la compañía.

Bajo la hipótesis H_0, se tiene $\mu = 1600$ y $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n} = 120/\sqrt{100} = 12$, utilizando la desviación típica muestral como una estima de σ. Puesto que $Z = (\bar{X} - 1600)/12 = (1570 - 1600)/12 = -2.50$ se encuentra fuera del rango -1.96 a 1.96, se rechaza H_0 al nivel de significación del 0.05.

(*b*) Si el nivel de significación es 0.01, el rango -1.96 a 1.96 en la regla de decisión del apartado (*a*) se sustituye por -2.58 a 2.58. Entonces, puesto que z -2.50 se encuentra dentro de este rango, se acepta H_0 (o no se toma ninguna decisión) al nivel de significación del 0.01.

7.8. En el Problema 7.7, ensayar la hipótesis $\mu = 1600$ horas frente a la alternativa $\mu < 1600$ horas, con los niveles de significación de (*a*) 0.05 y (*b*) 0.01.

Se debe decidir entre las dos hipótesis:

$$H_0:\ \mu = 1600 \text{ horas}, \qquad H_1: \mu < 1600 \text{ horas}.$$

Debe aquí utilizarse un ensayo unilateral (véase Fig. 7-5).

(*a*) Si el nivel de significación es 0.05, la región sombreada de la Fig. 7-5 tiene un área de 0.05 y se tiene que $z_1 = -1.645$. Se adopta, por tanto la regla de decisión:

(*1*) Se rechaza H_0 si Z es menor de -1.645.

(*2*) Se acepta H_0 (o no se toma ninguna decisión) en caso contrario.

Como en el Problema 7.7(*a*), el valor de z es -2.50, que es menor de -1.645, se rechaza pues, H_0 al nivel de significación del 0.05. Adviértase que esta decisión es idéntica a la obtenida en el Problema 7.7(*a*) mediante un ensayo bilateral.

(*b*) Si el nivel de significación es de 0.01 el valor de z_1 en la Fig. 7-5 es -2.33. De aquí que se adopte la regla de decisión:

(*1*) Se rechaza H_0 si Z es menor de -2.33.

(*2*) Se acepta H_0 (o no se toma ninguna decisión) en caso contrario.

Como en el Problema 7.7(*a*), el valor de z es -2.50, que es menor de -2.33, se rechaza pues, H_0 al nivel de significación del 0.01. Adviértase que esta decisión es la misma que la obtenida en el Problema 7.7(*b*) mediante un ensayo bilateral.

Las decisiones concernientes a hipótesis H_0 dadas, basadas en ensayos de una o dos colas, no están siempre en concordancia. Esto cabe, naturalmente esperarse, puesto que se ensaya H_0 contra una alternativa diferente en cada caso.

7.9. La resistencia a la rotura de los cables producidos por un fabricante tienen una media de 1800 libras y una desviación típica de 100 libras. Mediante una nueva técnica en el proceso de fabricación se aspira a que esta resistencia pueda ser incrementada. Para ensayar esta aspiración, se ensaya una muestra de 50 cables y se encuentra que su resistencia media es de 1850 libras. ¿Puede mantenerse que, en efecto, hay un aumento de resistencia al nivel de significación del 0.01?

Se tiene que decidir entre las dos hipótesis:

H_0: $\mu = 1800$ libras, y realmente no hay cambio en la resistencia

H_1: $\mu > 1800$ libras, y hay un cambio en la resistencia

Aquí debe emplearse un ensayo unilateral (véase Fig. 7-4). Al nivel de significación del 0.01 la regla de decisión es:

(*1*) Si el valor de z es mayor que 2.33 los resultados son significativos al nivel de 0.01 y H_0 es rechazada.

(*2*) De otro modo, H_0 es aceptada (o no se toma decisión alguna).

Bajo la hipótesis de que H_0 es cierta, se tiene

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1850 - 1800}{100/\sqrt{50}} = 3.55$$

que es mayor de 2.33. De aquí se deduce que los resultados son *altamente significativos* y la aspiración de mejora debe ser admitida.

ENSAYOS RELACIONADOS CON DIFERENCIAS DE MEDIAS Y PROPORCIONES

7.10. Se hizo un examen a dos clases formadas por 40 y 50 estudiantes respectivamente. En la primera clase la puntuación media fue de 74 con una desviación típica de 8, mientras que en la segunda clase la puntuación media fue de 78 con una desviación típica de 7. ¿Hay una diferencia significativa entre el resultado de las dos clases al nivel de significación de (*a*) 0.05, (*b*) 0.01?

Supóngase que las dos clases provienen de dos poblaciones que tienen de medias respectivas μ_1 y μ_2. Entonces, se tiene que decidir entre las hipótesis:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$, y la diferencia se debe simplemente al azar

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$, hay una diferencia significativa entre las dos clases

Bajo la hipótesis H_0, ambas clases provienen de la misma población. La media y la desviación típica de la diferencia de medias están dadas por

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = 0 \qquad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{8^2}{40}+\frac{7^2}{50}} = 1.606$$

donde se han utilizado las desviaciones típicas muestrales como estimas de σ_1 y σ_2.

Entonces $$Z = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} = \frac{74-78}{1.606} = -2.49$$

(*a*) Para un ensayo bilateral, los resultados son significativos al nivel de 0.05 si Z se encuentra fuera del recorrido —1.96 a 1.96. De aquí se deduce que al nivel de 0.05 hay una diferencia significativa entre las dos clases y la segunda es probablemente mejor.

(*b*) Para un ensayo bilateral, los resultados son significativos al nivel de 0.01 si Z se encuentra fuera del intervalo —2.58 y 2.58. De aquí se deduce que al nivel de 0.01 no hay diferencias significativas entre ambas clases.

Puesto que los resultados son significativos al nivel de 0.05 pero no al de 0.01, se deduce que los resultados son *probablemente significativos*, de acuerdo con la terminología utilizada al final del Problema 7.5.

7.11. La estatura media de 50 estudiantes de un colegio que tomaban parte en las pruebas atléticas fue de 68.2 pulgadas con desviación típica de 2.5 pulgadas, mientras que 50 estudiantes que no mostraban interés en tal participación tenían una estatura media de 67.5 pulgadas con desviación típica de 2.8 pulgadas. Ensayar la hipótesis de que los estudiantes que participan en las pruebas atléticas son más altos que los otros.

Se debe decidir entre las hipótesis:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$, no hay diferencia entre las estaturas medias

H_1: $\mu_1 > \mu_2$, la estatura media del primer grupo es mayor que la del segundo

Bajo la hipótesis H_0,

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = 0 \qquad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(2.5)^2}{50}+\frac{(2.8)^2}{50}} = 0.53$$

donde se han utilizado las desviaciones típicas muestrales como estimas de σ_1 y σ_2.

Entonces $$Z = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} = \frac{68.2-67.5}{0.53} = 1.32$$

Con un ensayo unilateral y al nivel de significación del 0.05, se rechaza la hipótesis H_0 si el valor de z fuese mayor de 1.645. Así pues, no se puede rechazar la hipótesis a este nivel de significación.

Debe sin embargo ponerse de manifiesto que la hipótesis puede rechazarse al nivel de 0.10 si se está dispuesto a correr el riesgo de tomar una decisión errónea con una probabilidad de 0.10, es decir, 1 vez cada 10.

7.12. ¿En cuánto deberían incrementarse los tamaños de muestra de cada uno de los dos grupos en el Problema 7.11 para que la diferencia observada de 0.7 pulgadas en las estaturas medias sea significativa al nivel de significación (*a*) 0.05, (*b*) 0.01?

Supóngase que el tamaño muestral de cada grupo es n y que las desviaciones típicas para los dos grupos permanecen iguales a las de antes. Entonces, bajo la hipótesis H_0, se tiene $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = 0$ y

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}} = \sqrt{\frac{(2.5)^2+(2.8)^2}{n}} = \sqrt{\frac{14.09}{n}} = \frac{3.75}{\sqrt{n}}$$

Para la diferencia de 0.7 observada en las estaturas medias se tiene

$$Z = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}} = \frac{0.7}{3.75/\sqrt{n}} = \frac{0.7\sqrt{n}}{3.75}$$

(*a*) La diferencia observada será significativa al nivel de 0.05 si

$$\frac{0.7\sqrt{n}}{3.75} \geqq 1.645 \quad \text{ó} \quad \sqrt{n} \geqq 8.8 \quad \text{ó} \quad n \geqq 78$$

Así pues, deberá incrementarse el tamaño de cada grupo en 78 − 50 = 28 al menos.

(*b*) La diferencia observada será significativa al nivel de 0.01 si

$$\frac{0.7\sqrt{n}}{3.75} \geqq 2.33 \quad \text{ó} \quad \sqrt{n} \geqq 12.5 \quad \text{ó} \quad n \geqq 157$$

De aquí que se debería incrementar cada muestra en al menos 157 − 50 = 107.

7.13. Dos grupos A y B formados cada uno de 100 individuos, padecen una enfermedad. Se administra un suero al grupo A, pero no al grupo B (que se llama *grupo control*); siendo en todo lo demás los dos grupos tratados idénticamente. Se encuentra que en los grupos A y B, 75 y 65 individuos, respectivamente se han recuperado de la enfermedad. Ensayar la hipótesis de que el suero ayuda a curar la enfermedad al nivel de significación del (*a*) 0.01, (*b*) 0.05, (*c*) 0.10.

Denótese por p_1 y p_2, respectivamente las proporciones poblacionales curadas (*1*) utilizando el suero, (*2*) sin utilizar suero. Se debe decidir entre las dos hipótesis:

H_0: $p_1 = p_2$, y las diferencias observadas son debidas al azar, es decir, el suero no es efectivo

H_1: $p_1 > p_2$, y el suero es efectivo

Bajo la hipótesis H_0,

$$\mu_{P_1-P_2} = 0 \qquad \sigma_{P_1-P_2} = \sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{(0.70)(0.30)\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100}\right)} = 0.0648$$

donde se ha utilizado como estima de la proporción p de curas en los dos grupos muestrales el valor $(75 + 65)/200 = 0.70$ y donde $q = 1 - p = 0.30$. Entonces

$$Z = \frac{P_1-P_2}{\sigma_{P_1-P_2}} = \frac{0.750-0.650}{0.0648} = 1.54$$

(*a*) De acuerdo con un ensayo unilateral al nivel de significación del 0.01, se rechazaría la hipótesis H_0 solamente si z fuese mayor de 2.33. Puesto que el valor de z es 1.54, se debe deducir que los resultados se deben al azar a este nivel de significación.

(*b*) De acuerdo con un ensayo unilateral al nivel de significación del 0.05, se rechazaría la hipótesis H_0 solamente si z fuese mayor de 1.645. De donde se deduce que a este nivel también las diferencias se deben al azar.

(*c*) Si se utilizase un ensayo unilateral al nivel de significación de 0.10 se rechazaría H_0 solamente si el valor de z fuese superior a 1.28. Puesto que esta condición es satisfecha, se deduciría que el suero es efectivo al nivel de significación de 0.10.

Adviértase que las conclusiones anteriores dependen de lo que se esté dispuesto a arriesgar de tomar una decisión errónea. Si los resultados se deben realmente al azar y se toma la decisión de que son debidos al suero (error del Tipo I), se puede proceder a dar el suero a grandes grupos de gente solamente para obtener entonces que realmente es inefectivo. Este es un riesgo que no siempre deseamos suponer.

Por otro lado, se puede deducir que el suero no ayuda cuando realmente sí lo hace (error del Tipo II). Tal decisión es muy importante especialmente si hay vidas humanas en juego.

7.14. Solucionar el Problema 7.13 si cada grupo se compone de 300 individuos y si se curan 225 individuos del Grupo A y 195 del grupo B.

Adviértase que en este caso la proporción de gente curada en los dos grupos son 225/300 = 0.750 y 195/300 = 0.650 respectivamente, que son las mismas del problema anterior. Bajo la hipótesis H_0,

$$\mu_{P_1-P_2} = 0 \qquad \sigma_{P_1-P_2} = \sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{(0.70)(0.30)\left(\frac{1}{300}+\frac{1}{300}\right)} = 0.0374$$

donde (225 — 195)/600 = 0.70 se utiliza como estima de p. Entonces

$$Z = \frac{P_1-P_2}{\sigma_{P_1-P_2}} = \frac{0.750-0.650}{0.0374} = 2.67$$

Puesto que el valor de z es mayor de 2.33, se puede rechazar la hipótesis al nivel de significación del 0.01, es decir, se deduce que el suero es efectivo con solo una probabilidad de 0.01 de equivocación.

Esto muestra cómo al incrementarse el tamaño de la muestra aumenta la seguridad de las decisiones. Sin embargo, en muchos casos es imposible el aumentar el tamaño de la muestra. En tales casos, se está forzado a tomar decisiones en acuerdo con la información utilizable y así se tendrá que correr mayor riesgo de tomar decisiones erróneas.

7.15. Una muestra de 300 votantes del distrito A y 200 del distrito B mostró que el 56% y el 48% respectivamente, estaban a favor de un candidato dado. Al nivel de significación del 0.05 ensayar la hipótesis de que (*a*) haya diferencia entre los distritos, (*b*) el candidato sea preferido en el distrito A.

Denótese por p_1 y p_2 las proporciones de todos los votantes de los distritos A y B, respectivamente, que están a favor del candidato.

Bajo la hipótesis ($H_0: p_1 = p_2$) se tiene

$$\mu_{P_1-P_2} = 0 \qquad \sigma_{P_1-P_2} = \sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{(0.528)(0.472)\left(\frac{1}{300}+\frac{1}{200}\right)} = 0.0456$$

donde se ha utilizado como estima de p y q los valores $[(0.56)(300)+(0.48)(200)]/500 = 0.528$ y $1-0.528 = 0.472$. Entonces

$$Z = \frac{P_1-P_2}{\sigma_{P_1-P_2}} = \frac{0.560-0.480}{0.0456} = 1.75$$

(*a*) Si solamente se desea determinar si hay diferencia entre los distritos, se debe decidir entre la hipótesis ($H_0: p_1 = p_2$) y ($H_1: p_1 \neq p_2$), que se estudia con un ensayo bilateral.

Con un ensayo bilateral y al nivel de significación del 0.05, se rechazaría H_0 si Z estuviese fuera del intervalo —1.96 a 1.96. Puesto que $Z = 1.75$, encontrándose dentro del intervalo no se puede rechazar H_0 a este nivel, es decir, no hay diferencia significativa entre los distritos.

(*b*) Si se desea determinar si el candidato es preferido en el distrito A, se debe decidir entre la hipótesis ($H_0: p_1 = p_2$) y ($H_1: p_1 > p_2$), que se estudia con un ensayo unilateral.

Con un ensayo unilateral y al nivel de significación del 0.05 se rechaza H_0 si Z fuese mayor de 1.645. Puesto que éste es el caso, se rechaza H_0 a este nivel y se deduce que el candidato es preferido en el distrito A.

ENSAYOS RELACIONADOS CON LA DISTRIBUCION t DE STUDENT

7.16. En el pasado una máquina ha producido arandelas con un grosor de 0.050 pulgadas. Para determinar si la máquina sigue en buenas condiciones de producción, se toma una muestra de 10 arandelas, que resulta tener un grosor medio de 0.053 pulgadas y una desviación típica de 0.003 pulgadas. Ensayar la hipótesis de que la máquina está en buenas condiciones de producción al nivel de significación del (*a*) 0.05, (*b*) 0.01.

Se desea decidir entre las hipótesis

H_0 : $\mu = 0.050$, y la máquina se encuentra en buenas condiciones

H_1 : $\mu \neq 0.050$, y la máquina no se encuentra en buenas condiciones

de modo que se requiere un ensayo bilateral.

Bajo la hipótesis H_0 se tiene $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n-1} = \dfrac{0.053 - 0.050}{0.003}\sqrt{10-1} = 3.00.$

(*a*) Para un ensayo bilateral al nivel de significación del 0.05 se adopta la regla de decisión:

(*1*) Se acepta H_0 si t se encuentra dentro del intervalo $-t_{.975}$ a $t_{.975}$, lo cual para $10 - 1 = 9$ grados de libertad es el intervalo -2.26 a 2.26.

(*2*) Se rechaza H_0 en caso contrario.

Puesto que $T = 3.00$, se rechaza H_0 al nivel de 0.05.

(*b*) Para un ensayo bilateral al nivel de significación del 0.01 se adopta la regla de decisión:

(*1*) Se acepta H_0 si T se encuentra dentro del intervalo $-t_{.995}$ a $t_{.995}$, que para $10-1 = 9$ grados de libertad es el intervalo -3.25 a 3.25.

(*2*) Se rechaza H_0 en caso contrario.

Puesto que $T = 3.00$, se acepta H_0 al nivel 0.01.

Ya que se rechaza H_0 al nivel 0.05 pero no al nivel 0.01, se dice que la muestra resulta *probablemente significativa* (véase la terminología del final del Problema 7.5). Así sería aconsejable comprobar la máquina o al menos tomar otra muestra.

7.17. Un ensayo sobre resistencia a la rotura de 6 cuerdas fabricadas por una compañía mostró una resistencia media de 7750 lb y una desviación típica de 145 lb mientras que el fabricante sostenía que la resistencia media de sus cuerdas era de 8000 lb. ¿Se puede admitir la afirmación del fabricante al nivel de significación del (*a*) 0.05, (*b*) 0.01?

Se tiene que decidir entre las hipótesis

H_0: $\mu = 8000$ libras, y la afirmación del fabricante está justificada

H_1 : $\mu < 8000$ libras, y la afirmación del fabricante es falsa

de modo que se requiere un ensayo unilateral.

Bajo la hipótesis H_0 se tiene $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n-1} = \dfrac{7750 - 8000}{145}\sqrt{6-1} = -3.86.$

(*a*) Para un ensayo unilateral al nivel de significación del 0.05, se adopta la regla de decisión:

(*1*) Se acepta H_0 si T es mayor de $-t_{.95}$, que para $6 - 1 = 5$ grados de libertad da $T > -2.01$.

(*2*) Se rechaza H_0 en caso contrario.

Puesto que $T = -3.86$, se rechaza H_0.

(*b*) Para un ensayo unilateral al nivel de significación del 0.01, se adopta la regla de decisión:

(*1*) Se acepta H_0 si T es mayor de $-t_{.99}$, que para 5 grados de libertad da $T > -3.36$.

(*2*) Se rechaza H_0 en caso contrario.

Puesto que $T = -3.86$, se rechaza H_0.

Se deduce que la afirmación del fabricante es extremadamente improbable que esté justificada.

7.18. El I. Q. (cociente de inteligencia) de 16 estudiantes de una zona de una ciudad dio una media de 107 con una desviación típica de 10, mientras que el I. Q. de 14 estudiantes de otra zona de la ciudad dio una media de 112 con desviación típica de 8. ¿Hay diferencia significativa entre el I. Q. de los dos grupos al nivel de significación del (*a*) 0.01, y (*b*) 0.05?

Si se denota por μ_1 y μ_2 las medias poblacionales del I. Q. de los estudiantes de las dos zonas, se tiene que decidir entre las hipótesis

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ y no hay diferencia esencial entre los grupos

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ y hay diferencia esencial entre los grupos

Bajo la hipótesis H_0,

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \quad \text{donde} \quad \sigma = \sqrt{\frac{n_1S_1^2 + n_2S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Entonces

$$\sigma = \sqrt{\frac{16(10)^2 + 14(8)^2}{16 + 14 - 2}} = 9.44 \quad \text{y} \quad T = \frac{112 - 107}{9.44\sqrt{1/16 + 1/14}} = 1.45$$

(*a*) Con un ensayo bilateral al nivel de significación del 0.01, se rechazará la hipótesis H_0 si T se encuentra fuera del recorrido $-t_{.995}$ a $t_{.995}$, que para $n_1 + n_2 - 2 = 16 + 14 - 2 = 28$ grados de libertad es el recorrido -2.76 a 2.76.

Así pues, no se puede rechazar H_0 al nivel de significación del 0.01.

(*b*) Con un ensayo bilateral al nivel de significación del 0.05, se rechazará H_0 si T se encuentra fuera del recorrido $-t_{.975}$ a $t_{.975}$, que para 28 grados de libertad es el recorrido -2.05 a 2.05.

Así pues, no se puede rechazar H_0 al nivel de significación del 0.05.

Se deduce que no hay diferencia significativa entre el I. Q. de los dos grupos.

7.19. En una estación agrícola se deseaba ensayar el efecto de un determinado fertilizante sobre la producción de trigo. Para ello, se eligieron 24 parcelas de terreno de igual superficie; la mitad de ellas fueron tratadas con el fertilizante y la otra mitad no (grupo control). Todas las demás condiciones fueron las mismas. La media de trigo conseguida en las parcelas no tratadas fue de 4.8 fanegadas con una desviación típica de 0.40 fanegadas, mientras que la media en las parcelas tratadas fue de 5.1 fanegadas con una desviación típica de 0.36 fanegadas. ¿Puede deducirse que hay un incremento significativo en la producción de trigo por el empleo del fertilizante al nivel de significación del (*a*) 1% y (*b*) 5%?

Si μ_1 y μ_2 son las producciones poblacionales medias en los suelos tratados y no tratados, respectivamente, se tiene que decidir entre las hipótesis

H_0: $\mu_1 = \mu_2$, y la diferencia se debe al azar

H_1: $\mu_1 > \mu_2$, y el fertilizante incrementa la producción

Bajo la hipótesis H_0,

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \quad \text{donde} \quad \sigma = \sqrt{\frac{n_1S_1^2 + n_2S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Entonces

$$\sigma = \sqrt{\frac{12(0.40)^2 + 12(0.36)^2}{12 + 12 - 2}} = 0.397 \quad \text{y} \quad T = \frac{5.1 - 4.8}{0.397\sqrt{1/12 + 1/12}} = 1.85$$

(*a*) Con un ensayo unilateral al nivel de significación del 0.01, se rechazará la hipótesis H_0 si T fuese mayor que $t_{.99}$, lo cual para $n_1 + n_2 - 2 = 12 + 12 - 2 = 22$ grados de libertad es 2.51.

Así pues, no se puede rechazar H_0 al nivel de significación del 0.01.

(*b*) Con un ensayo unilateral al nivel de significación del 0.05, se rechazará la hipótesis H_0 si T fuese mayor que $t_{.95}$, lo cual para 22 grados de libertad es 1.72.

Así, pues, se rechaza H_0 al nivel de significación del 0.05.

Se deduce que el incremento en la producción de trigo al utilizar el fertilizante es *probablemente significativo*. Sin embargo antes de sacar conclusiones definitivas referentes a la conveniencia del fertilizante, sería deseable tener alguna prueba más.

ENSAYOS RELACIONADOS CON LA DISTRIBUCION CHI-CUADRADO

7.20. En el pasado la desviación típica de los pesos de ciertos paquetes de 40.0 onzas, llenados por una máquina era de 0.25 onzas. Una muestra aleatoria de 20 paquetes dio una desviación típica de 0.32 onzas. ¿Es el aparente incremento de variabilidad significativa al nivel de significación del (*a*) 0.05 y (*b*) 0.01?

Hay que decidir entre las dos hipótesis:

H_0: $\sigma = 0.25$ onzas, y los resultados observados se deben al azar

H_1: $\sigma > 0.25$ onzas, y la variabilidad se ha incrementado

El valor de χ^2 para la muestra es $\chi^2 = ns^2/\sigma^2 = 20(0.32)^2/(0.25)^2 = 32.8$.

(*a*) Mediante un ensayo unilateral, se rechaza H_0 al nivel de significación del 0.05 si el valor de χ^2 muestral fuese mayor que $\chi^2_{.95}$, que es igual a 30.1 para $\nu = 20 - 1 = 19$ grados de libertad. Así pues, se rechaza H_0 al nivel de significación del 0.05.

(*b*) Mediante un ensayo unilateral, se rechazará H_0 al nivel de significación del 0.01 si el valor muestral de χ^2 fuese mayor que $\chi^2_{.99}$, que es igual a 36.2 para 19 grados de libertad. Así pues, no se rechaza H_0 al nivel de significación del 0.01.

Se deduce que la variabilidad se ha, probablemente incrementado. Y deberá efectuarse una revisión en la máquina.

ENSAYOS RELACIONADOS CON LA DISTRIBUCION *F*

7.21. Un instructor tiene dos clases, *A* y *B*, en una asignatura específica. La clase *A* tiene 16 estudiantes en tanto que la clase *B* tiene 25 estudiantes. En el mismo examen, aunque no hubo diferencia significativa en medias de las calificaciones, la clase *A* tuvo una desviación típica de 9 en tanto que la clase *B* tuvo una desviación típica de 12. ¿Podemos concluir al nivel de significación del (*a*) 0.01, (*b*) 0.05 que la variabilidad de la clase *B* es mayor que la de la clase *A*?

(*a*) Tenemos, empleando subíndices 1 y 2 para las clases *A* y *B* respectivamente, $s_1 = 9, s_2 = 12$ de modo que

$$\hat{s}_1^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} s_1^2 = \frac{16}{15}(9)^2 = 86.4, \qquad \hat{s}_2^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} s_2^2 = \frac{25}{24}(12)^2 = 150$$

Hay que decidir entre las dos hipótesis

H_0: $\sigma_1 = \sigma_2$, y cualquier variabilidad observada se debe al azar

H_1: $\sigma_1 > \sigma_2$, y la variabilidad de la clase *A* es mayor que la de la *B*

La decisión debe por tanto basarse en un ensayo unilateral de la distribución *F*. El número de grados de libertad para las clases son respectivamente $\nu_1 = 16 - 1 = 15, \nu_2 = 25 - 1 = 24$. Al nivel 0.01 para $\nu_1 = 15, \nu_2 = 24$ tenemos del Apéndice F, $F_{.99} = 2.89$. Entonces, para las muestras en cuestión,

$$F = \frac{\hat{s}_1^2}{\hat{s}_2^2} = \frac{150}{86.4} = 1.74$$

Entonces, ya que $F < F_{.99}$ no podemos rechazar H_0 al nivel 0.01.

(*b*) Ya que $F_{.95} = 2.11$ para 15, 24 grados de libertad (véase Apéndice F), vemos que $F < F_{.95}$. Por tanto tampoco podemos rechazar H_0 al nivel 0.05.

7.22. ¿Cambiarían sus conclusiones en el Problema 7.21 si existe una diferencia significativa en la media de las calificaciones de las clases? Justificar su solución.

Puesto que la media real de las calificaciones no se usó para nada en el Problema 7.21 no interesa sus valores. Esto es de esperarse ya que no estamos tratando de decidir si hay una diferencia en las medias de las calificaciones, sino solamente si hay una variabilidad en las calificaciones.

CURVAS CARACTERISTICAS DE OPERACION

7.23. Con referencia al Problema 7.2 ¿cuál es la probabilidad de aceptar la hipótesis de que la moneda está bien hecha cuando la probabilidad real de cara es $p = 0.7$?

La hipótesis H_0 de que la moneda está bien hecha, es decir, $p = 0.5$ se acepta cuando el número de caras en 100 lanzamientos se encuentra entre 39.5 y 60.5. La probabilidad de rechazar H_0 cuando debería aceptarse (es decir, probabilidad de error del Tipo I) viene dada por el área total α de la región sombreada bajo la curva normal de la izquierda en la Fig. 7-6. Calculada en el Problema 7.2(*a*), esta área α, que representa el nivel de significación del ensayo de H_0, es igual a 0.0358.

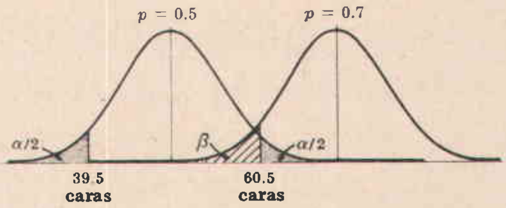


Fig. 7-6

Si la probabilidad de cara es $p = 0.7$, entonces la distribución de caras en 100 lanzamientos está representada por la curva normal de la derecha en la Fig. 7-6. En el diagrama se ve claramente que la probabilidad de aceptar H_0 cuando realmente $p = 0.7$ (es decir, probabilidad de error del Tipo II), está dada por el área rayada β de la figura. Para calcular esta área se observa que la distribución bajo la hipótesis $p = 0.7$ tiene una media y una desviación típica que son dadas por

$$\mu = np = (100)(0.7) = 70 \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(100)(0.7)(0.3)} = 4.58$$

$$60.5 \text{ en unidades tipificadas} = \frac{60.5 - 70}{4.58} = -2.07$$

$$39.5 \text{ en unidades tipificadas} = \frac{39.5 - 70}{4.58} = -6.66$$

Entonces

$$\beta = \text{área bajo la curva normal entre } z = -6.66 \text{ y } z = -2.07 = 0.0192$$

Así, pues, con la regla de decisión dada hay muy poco riesgo de aceptar la hipótesis de que la moneda está bien hecha, cuando realmente $p = 0.7$.

Adviértase que en este problema se tenía la regla de decisión de la que se obtenía α y β. En la práctica se pueden presentar otras dos posibilidades:

(*1*) Se decide sobre α (tal como 0.05 ó 0.01), llegando a una regla de decisión y después se calcula β.

(*2*) Se decide sobre α y β y después se llega a una regla de decisión.

7.24. Solucionar el Problema 7.23 si (*a*) $p = 0.6$, (*b*) $p = 0.8$, (*c*) $p = 0.9$, (*d*) $p = 0.4$.

(*a*) Si $p = 0.6$, la media y la desviación típica de la distribución de caras vienen dadas por

$$\mu = np = (100)(0.6) = 60 \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(100)(0.6)(0.4)} = 4.90$$

$$60.5 \text{ en unidades tipificadas} = \frac{60.5 - 60}{4.90} = 0.102$$

$$39.5 \text{ en unidades tipificadas} = \frac{39.5 - 60}{4.90} = -4.18$$

Entonces $\beta = \text{área bajo la curva normal entre } z = -4.18 \text{ y } z = 0.102 = 0.5405$

Así, pues, con la regla de decisión dada hay un gran riesgo de aceptar la hipótesis de que la moneda está bien hecha cuando realmente $p = 0.6$.

(*b*) Si $p = 0.8$, entonces $\mu = np = (100)(0.8) = 80$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(100)(0.8)(0.2)} = 4$.

$$60.5 \text{ en unidades tipificadas } = \frac{60.5 - 80}{4} = -4.88$$

$$39.5 \text{ en unidades tipificadas } = \frac{39.5 - 80}{4} = -10.12$$

Entonces β = área bajo la curva normal entre $z = -10.12$ y $z = -4.88 = 0.0000$ muy aproximadamente.

(*c*) Comparando con (*b*) o por cálculo, se ve que si $p = 0.9$, $\beta = 0$ para todos los propósitos prácticos.

(*d*) Por simetría $p = 0.4$ da el mismo valor de β que $p = 0.6$; es decir, $\beta = 0.5405$.

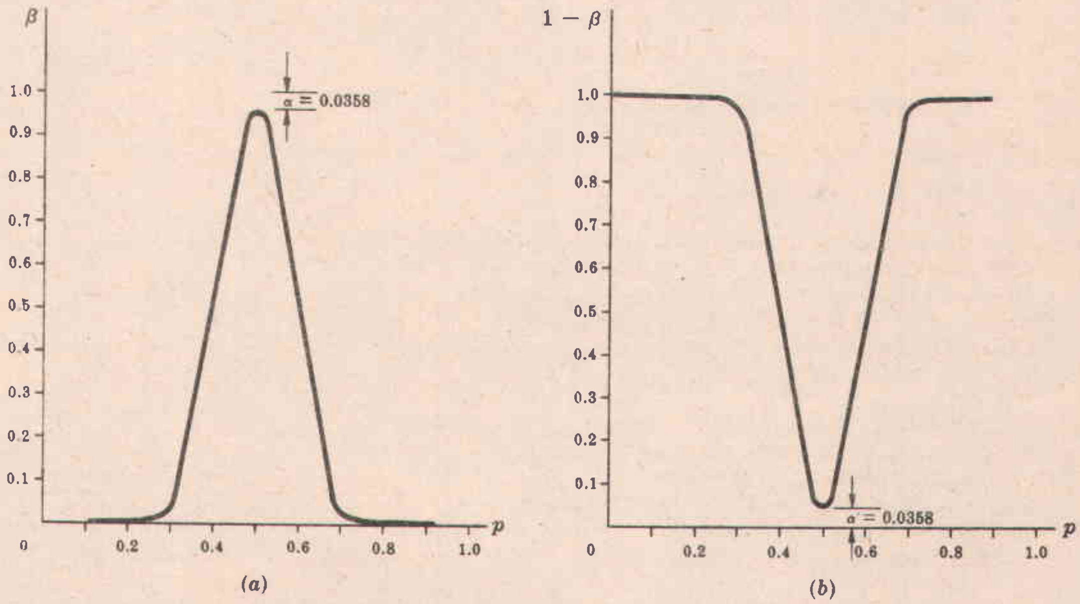
7.25. Representar gráficamente los resultados de los Problemas 7.23 y 7.24 construyendo un gráfico cuyos ejes sean (*a*) β y p, (*b*) $(1 - \beta)$ y p. Interpretar los gráficos obtenidos.

La Tabla 7-3 muestra los valores de β correspondientes a valores dados de p, como los obtenidos en los Problemas 7.23 y 7.24.

Tabla 7-3

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
β	0.0000	0.0000	0.0192	0.5405	0.9642	0.5405	0.0192	0.0000	0.0000

Nótese que β representa la probabilidad de aceptar la hipótesis $p = 0.5$ cuando realmente p tiene un valor distinto a 0.5. Sin embargo, si realmente $p = 0.5$ se puede interpretar β como la probabilidad de aceptar $p = 0.5$ cuando debiera ser aceptado. Esta probabilidad es igual a $1 - 0.0358 = 0.9642$ y ha sido introducida en la Tabla 7-3.



(*a*) (*b*)

Fig. 7-7

(*a*) El gráfico β, p se muestra en la Fig. 7-7(*a*), se llama *curva característica de operación* o *curva OC* de la regla de la decisión o ensayo de hipótesis.

La distancia del punto máximo de la curva OC a la línea $\beta = 1$ es igual a $\alpha = 0.0358$ al nivel de significación del ensayo.

En general, el apuntamiento mayor de la curva OC es la mejor regla de decisión para rechazar hipótesis que no son válidas.

(*b*) El gráfico $(1-\beta)$, p se muestra en la Fig. 7-7(*b*), se llama *curva de potencia* de la regla de decisión o ensayo de hipótesis. Esta curva se obtiene sencillamente invirtiendo la curva OC, de modo que realmente ambos gráficos son equivalentes.

La cantidad $(1-\beta)$ se llama a menudo *función de potencia*, puesto que indica la aptitud o *potencia de un ensayo* para rechazar hipótesis que son falsas, es decir, que debieran ser rechazadas. La cantidad β se llama también *función característica de operación* de un ensayo.

7.26. Una compañía fabrica cuerdas cuyas resistencias a la rotura tienen un valor medio de 300 libras y una desviación típica de 24 libras. Se cree que mediante un nuevo proceso de fabricación puede incrementarse la resistencia media. (*a*) Diseñar una regla de decisión para rechazar el proceso primitivo al nivel de significación del 0.01 si se pone de manifiesto que debe rechazarse al ensayar 64 cuerdas. (*b*) Bajo la regla de decisión adoptada en (*a*), ¿cuál es la probabilidad de aceptar el proceso primitivo cuando en efecto el nuevo proceso incremente la resistencia media a 310 libras? Supóngase que la desviación típica se mantiene en 24 libras.

(*a*) Si μ es la resistencia media, se quiere decidir entre las hipótesis:

H_0: $\mu = 300$ libras, y el nuevo proceso es igual que el primitivo

H_1: $\mu > 300$ libras, y el nuevo proceso es mejor que el primitivo

Para un ensayo unilateral al nivel de significación del 0.01, se tiene la siguiente regla de decisión (referente con la Fig. 7-8):

(*1*) Se rechaza H_0 si la z de la media de resistencia muestral es mayor que 2.33.

(*2*) Se acepta H_0 en caso contrario.

Puesto que $Z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{\bar{X}-300}{24/\sqrt{64}}$, $\bar{X} = 300 + 3Z$. Entonces si $Z > 2.33$, $\bar{X} > 300 + 3(2.33) = 307.0$ lb.

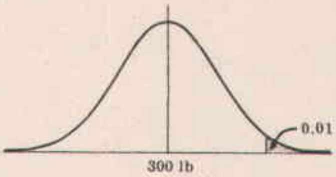


Fig. 7-8

Así, la regla de decisión anterior se convierte en:

(*1*) Se rechaza H_0 si la resistencia media de 64 cuerdas excede a 307.0 libras.

(*2*) Se acepta H_0 en caso contrario.

(*b*) Considérense las dos hipótesis (H_0: $\mu = 300$ libras) y (H_1: $\mu = 310$ libras). Las distribuciones de las resistencias medias correspondientes a estas dos hipótesis se representan, respectivamente con las distribuciones normales de la izquierda y de la derecha de la Fig. 7-9.

La probabilidad de aceptar el proceso primitivo cuando la nueva resistencia media sea realmente 310 libras se representa por el área β de la Fig. 7-9. Para hallar su valor nótese que 307.0 libras en unidades tipificadas $= (307.0 - 310)/3 = -1.00$; de aquí que

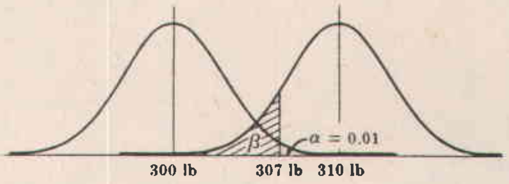


Fig. 7-9

$\beta =$ área bajo la curva normal de la derecha a la izquierda de $z = -1.00 = 0.1587$.

Esta es la probabilidad de aceptar H_0: $\mu = 300$ libras cuando realmente H_1: $\mu = 310$ libras es cierta, es decir, es la probabilidad de cometer error del Tipo II.

7.27. Construir (*a*) una curva OC y (*b*) una curva de potencia para el Problema 7.26, suponiendo que la desviación típica de las resistencias se mantiene en 24 libras.

Razonando análogamente a como se hizo en el Problema 7.26(*b*), se puede hallar β para los casos en que el

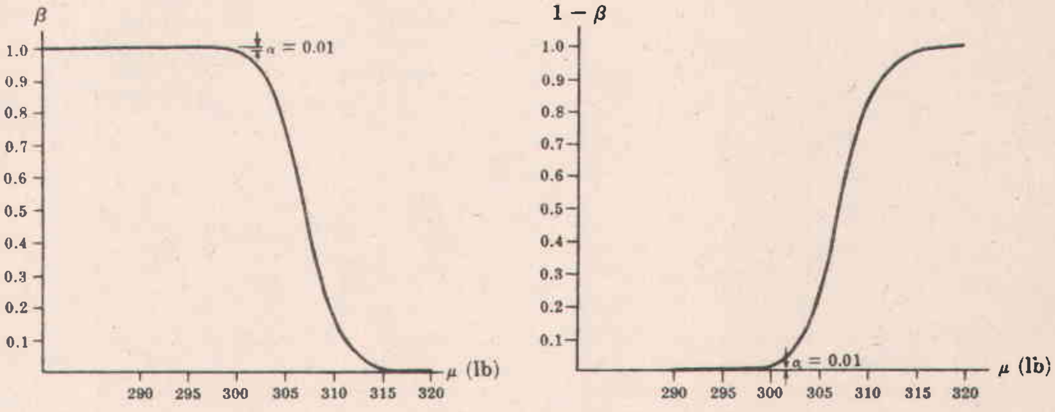
nuevo proceso da una resistencia media μ igual a 305 libras, 315 libras, etc. Por ejemplo, si $\mu = 305$ libras, entonces 307.0 libras en unidades tipificadas $= (307.0 - 305)/3 = 0.67$, y de aquí

$$\beta = \text{área bajo la curva normal de la derecha a la izquierda de } z = 0.67 = 0.7486$$

De esta forma se obtiene la Tabla 7-4.

Tabla 7-4

μ	290	295	300	305	310	315	320
β	1.0000	1.0000	0.9900	0.7486	0.1587	0.0038	0.0000



(*a*) (*b*)

Fig. 7-10

(*a*) La curva OC se muestra en la Fig. 7-10(*a*). En esta curva se ve que la probabilidad de seguir con el proceso primitivo, si el nuevo da una resistencia menor de 300 libras, es prácticamente 1 (excepto para el nivel de significación del 0.01 cuando el nuevo proceso da una media de 300 libras). Después, la curva baja rápidamente hacia cero, de modo que no hay probabilidad de seguir con el proceso primitivo cuando la media de resistencia es mayor de 315 libras.

(*b*) La curva de potencia se ve en la Fig. 7-10(*b*); se pueden obtener de ella las mismas interpretaciones que de la curva OC, ya que las dos curvas son esencialmente equivalentes.

7.28. Para ensayar la hipótesis de que una moneda está bien hecha (es decir, $p = 0.5$) mediante un número de lanzamientos de la moneda, se desea imponer las siguientes restricciones: (A) la probabilidad de rechazar la hipótesis cuando sea realmente correcta debe ser a lo sumo 0.05; (B) la probabilidad de aceptar la hipótesis cuando realmente p difiera de 0.5 en 0.1 o más (es decir, $p \geqq 0.6$ ó $p \leqq 0.4$) debe ser a lo sumo 0.05. Determinar el tamaño mínimo de muestra necesario y enunciar la regla de decisión resultante.

Aquí se ha puesto límite al riesgo de error del Tipo I y Tipo II. Por ejemplo, la restricción (A) impuesta requiere que la probabilidad de error del Tipo I sea a lo sumo $\alpha = 0.05$, mientras que la restricción (B) requiere que la probabilidad de error del Tipo II sea a lo sumo $\beta = 0.05$. La situación planteada se ve gráficamente en la Fig. 7-11.

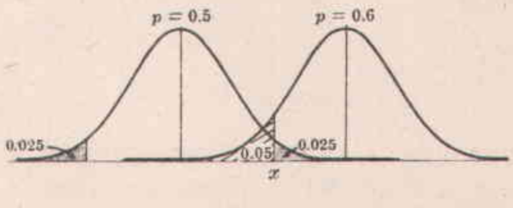


Fig. 7-11

Denótese por n el tamaño de muestra pedido y por x el número de caras en los n lanzamientos, por encima del cual se rechaza la hipótesis de que $p = 0.5$. De la Fig. 7-11 se tiene:

(*1*) El área bajo la curva normal $p = 0.5$ a la derecha de $\dfrac{x - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{x - 0.5\,n}{0.5\sqrt{n}}$ es 0.025.

(*2*) El área bajo la curva normal $p = 0.6$ a la izquierda de $\dfrac{x - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{x - 0.6\,n}{0.49\sqrt{n}}$ es 0.05.

Realmente el área entre

$$\frac{(n - x) - 0.6\,n}{0.49\sqrt{n}} \quad \text{y} \quad \frac{x - 0.6\,n}{0.49\sqrt{n}}$$

es 0.05; (*2*) es una cantidad muy aproximada. Obsérvese que tomando la probabilidad de aceptación como 0.05 en el "peor de los casos", $p = 0.6$, automáticamente tomaríamos como 0.05 o menos cuando p tiene cualquier otro valor por fuera del recorrido 0.4 a 0.6. Por tanto un promedio ponderado de todas estas probabilidades, que representan la probabilidad de error del tipo II, también será 0.05 o menos.

De (*1*) $\dfrac{x - 0.5\,n}{0.5\sqrt{n}} = 1.96$ ó (*3*) $x = 0.5\,n + 0.980\sqrt{n}$.

De (*2*) $\dfrac{x - 0.6\,n}{0.49\sqrt{n}} = -1.645$ ó (*4*) $x = 0.6\,n - 0.806\sqrt{n}$.

De (*3*) y (*4*), $n = 318.98$. Se sigue que el tamaño de la muestra debe ser al menos 319, es decir, se debe lanzar la moneda al menos 319 veces. Haciendo $n = 319$ en (*3*) o (*4*), $x = 177$.

Para $p = 0.5$, $x - np = 177 - 159.5 = 17.5$. Así pues, se adopta la siguiente regla de decisión:

(*a*) Se acepta la hipótesis $p = 0.5$, si el número de caras en 319 lanzamientos está dentro del recorrido 159.5 ± 17.5, es decir, entre 142 y 177.

(*b*) Se rechaza la hipótesis en caso contrario.

GRAFICOS DE CONTROL DE CALIDAD

7.29. Se construye una máquina que producirá cojinetes de bolas teniendo un diámetro medio de 0.574 pulgadas y una desviación típica de 0.008 pulgadas. Para determinar si la máquina está adecuadamente construida para el fin que se destina, se toma una muestra de 6 cojinetes cada 2 horas, por ejemplo, y se observa el diámetro medio de la muestra. (*a*) Diseñar una regla de decisión mediante la cual se puede estar razonablemente cierto de que la calidad del producto está de acuerdo con las normas requeridas. (*b*) Mostrar cómo se representaría gráficamente la regla de decisión de (*a*).

(*a*) Con confianza del 99.73% se puede decir que la media muestral $\bar{X}$ debe estar dentro del intervalo $(\mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}})$ a $(\mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}})$ ó $(\mu - 3\sigma/\sqrt{n})$ a $(\mu + 3\sigma/\sqrt{n})$. Puesto que $\mu = 0.574$, $\sigma = 0.008$ y $n = 6$, se sigue que con el 99.73% de confianza la media muestral se encontrará entre $(0.574 - 0.024/\sqrt{6})$ y $(0.574 + 0.024/\sqrt{6})$ o entre 0.564 y 0.584 pulgadas.

De aquí que la regla de decisión sea como sigue:

(*1*) Si la media muestral cae dentro del intervalo 0.564 a 0.584 pulgadas, se supone que la máquina es adecuada para el trabajo pedido.

(*2*) De otro modo, la máquina no será adecuada y habrá que buscar la razón de su ineptitud.

(*b*) Un registro de las medias muestrales puede llevarse por medio de un gráfico tal como se muestra en la Fig. 7-12, llamado *gráfico de control de calidad.* Cada vez que se observa una media muestral se representa por un punto en el gráfico. En tanto que los puntos se encuentran entre los límites 0.564 y 0.584 pulgadas, el proceso está bajo control. Cuando un punto se sale de estos límites control (tal como en la tercera muestra tomada el jueves), hay la posibilidad de que falle algo y se precisa una investigación del posible fallo.

Los límites de control determinados anteriormente se llaman límites de confianza del 99.73% o brevemente límites 3σ. Sin embargo, pueden igualmente determinarse otros límites de confianza, tales como los límites del 99% o del 95%. La elección en cada caso depende de las circunstancias particulares del mismo.

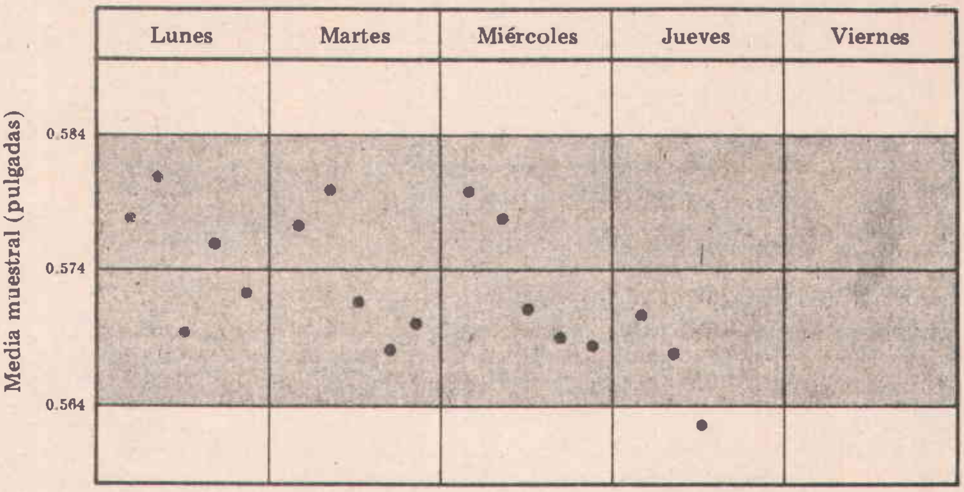


Fig. 7-12

AJUSTE DE DATOS A DISTRIBUCIONES TEORICAS

7.30. Ajustar una distribución binomial a los datos del Problema 5.30, página 178.

Se tiene $P(x$ caras en una serie de 5 lanzamientos$) = f(x) = {}_5C_x p^x q^{5-x}$, donde p y q son las probabilidades respectivas de cara y sello en un solo lanzamiento de la moneda. La media del número de caras es $\mu = np = 5p$.

Para la distribución de frecuencias observada, la media del número de caras es

$$\frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{(38)(0) + (144)(1) + (342)(2) + (287)(3) + (164)(4) + (25)(5)}{1000} = \frac{2470}{1000} = 2.47$$

Igualando las medias teóricas y real se tiene $5p = 2.47$ ó $p = 0.494$. Así pues, la distribución binomial ajustada viene dada por $f(x) = {}_5C_x(0.494)^x(0.506)^{5-x}$.

En la Tabla 7-5 se han obtenido estas probabilidades así como las frecuencias esperadas (teóricas) y las observadas. El ajuste se observa que es bueno. La bondad del ajuste se estudia en el Problema 7.43.

Tabla 7-5

Número de caras x	$P(x$ caras$)$	Frecuencia esperada	Frecuencia observada
0	0.0332	33.2 ó 33	38
1	0.1619	161.9 ó 162	144
2	0.3162	316.2 ó 316	342
3	0.3087	308.7 ó 309	287
4	0.1507	150.7 ó 151	164
5	0.0294	29.4 ó 29	25

7.31. Utilizar papel gráfico de probabilidad para determinar si la distribución de frecuencias de la Tabla 5-2, página 163 puede ajustarse a una distribución normal.

Tabla 7-6

Estatura (pulgadas)	Frecuencias Relativas Acumuladas (%)
menor que 61.5	5.0
menor que 64.5	23.0
menor que 67.5	65.0
menor que 70.5	92.0
menor que 73.5	100.0

Primero, la distribución de frecuencias dada se convierte en una distribución de frecuencias relativas acumuladas, como se muestra en la Tabla 7-6. Después, las frecuencias relativas acumuladas expresadas en porcentajes, son pasadas sobre los límites reales superiores de clase, en un papel gráfico de probabilidad especial, como se ve en la Fig. 7-13. El grado en que los puntos así dibujados se encuentran sobre una línea recta, determina la bondad de ajuste de la distribución dada a la distribución normal. Por lo anterior, se observa que hay una distribución normal que se ajusta estrechamente a los datos. Véase Problema 7.32.

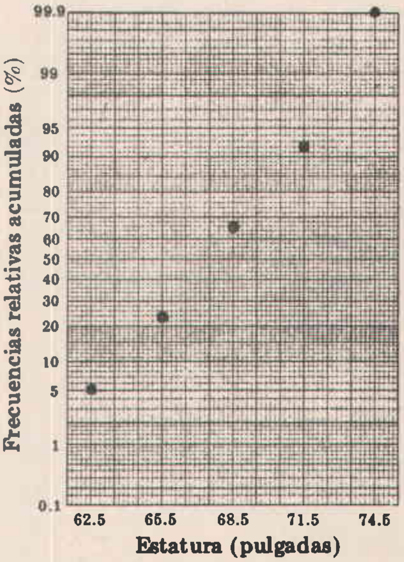


Fig. 7-13

7.32. Ajustar una curva normal a los datos de la Tabla 5-2, página 163.

Tabla 7-7

Estatura (pulgadas)	Límites reales de clase x	z para los límites reales de clase	Area bajo la curva normal desde 0 hasta z	Area para cada clase	Frecuencia esperada	Frecuencia observada
	59.5	−2.72	0.4967			
60–62				0.0413	4.13 ó 4	5
	62.5	−1.70	0.4554			
63–65				0.2068	20.68 ó 21	18
	65.5	−0.67	0.2486			
66–68			sumar →	0.3892	38.92 ó 39	42
	68.5	0.36	0.1406			
69–71				0.2771	27.71 ó 28	27
	71.5	1.39	0.4177			
72–74				0.0743	7.43 ó 7	8
	74.5	2.41	0.4920			

$\bar{x}$ = 61.45 pulgadas, s = 2.92 pulgadas

El trabajo puede organizarse como en la Tabla 7-7. Para calcular z de los límites reales de clase, se utiliza $z = (x - \bar{x})/s$, donde la media $\bar{x}$ y la desviación típica s se han obtenido en los Problemas 5.35 y 5.40 respectivamente

La cuarta columna, que da las áreas bajo la curva normal de 0 a z se obtiene con la tabla del Apéndice C. De aquí se sacan las áreas bajo la curva normal entre los valores sucesivos de z, dadas en la quinta columna. Estas se obtienen restando las áreas sucesivas de la cuarta columna cuando las correspondientes z tienen igual signo y sumándolas cuando tienen signo contrario (lo cual solo ocurre una vez en la tabla). La razón de esto se ve claramente con un diagrama.

Multiplicando los valores de la quinta columna (que representan las frecuencias relativas) por la frecuencia total n (en este caso $n = 100$), se obtienen las frecuencias esperadas de la sexta columna. Y se pone de manifiesto que se ajustan bastante bien con las frecuencias observadas realmente, anotadas en la última columna.

La "bondad del ajuste" de la distribución se considera en el Problema 7.44.

7.33. La Tabla 7-8 muestra el número de días f durante un período de 50 días, durante los cuales x autos tuvieron accidentes en una ciudad. Ajustar los datos a una distribución de Poisson.

Tabla 7-8

Número de accidentes, x	Número de días, f
0	21
1	18
2	7
3	3
4	1
TOTAL	50

El número medio de accidentes es

$$\lambda \;=\; \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} \;=\; \frac{(21)(0) + (18)(1) + (7)(2) + (3)(3) + (1)(4)}{50}$$

$$= \frac{45}{50} \;=\; 0.90$$

Entonces, de acuerdo con la distribución de Poisson,

$$P(x \text{ accidentes}) \;=\; \frac{(0.90)^x e^{-0.90}}{x!}$$

En la Tabla 7-9 aparecen las probabilidades para 0, 1, 2, 3 y 4 accidentes de esta distribución de Poisson, así como los números teóricos de días en los que se presentarán x accidentes (obtenidos multiplicando las correspondientes probabilidades por 50). Para conveniencia de la comparación, la cuarta columna que da los números de días observados se ha repetido.

Tabla 7-9

Número de accidentes, x	$P(x$ accidentes$)$	Número de días esperado	Número de días observado
0	0.4066	20.33 ó 20	21
1	0.3659	18.30 ó 18	18
2	0.1647	8.24 ó 8	7
3	0.0494	2.47 ó 2	3
4	0.0111	0.56 ó 1	1

Nótese que el ajuste de los datos dados a una distribución de Poisson es bueno.

Para una verdadera distribución de Poisson, la varianza $\sigma^2 = \lambda$. El cálculo de la varianza de la distribución dada, da 0.97. Comparando con el valor de $\lambda = 0.90$ hallado, puede ser esto un indicio de la adaptabilidad de la distribución de Poisson a la muestra de datos.

LA PRUEBA CHI-CUADRADO

7.34. En 200 lanzamientos de una moneda se observaron 115 caras y 85 sellos. Ensayar la hipótesis de que la moneda está bien hecha con un nivel de significación del (*a*) 0.05, (*b*) 0.01.

Las frecuencias de caras y sellos observadas son, respectivamente $x_1 = 115$, $x_2 = 85$.

Las frecuencias de caras y sellos esperadas si la moneda está bien hecha son $np_1 = 100$, $np_2 = 100$, respectivamente. Entonces

$$\chi^2 \;=\; \frac{(x_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(x_2 - np_2)^2}{np_2} \;=\; \frac{(115-100)^2}{100} + \frac{(85-100)^2}{100} \;=\; 4.50$$

Puesto que el número de categorías o clases (caras, sellos) es $k = 2$, $\nu = k - 1 = 2 - 1 = 1$.

(*a*) El valor crítico $\chi^2_{.95}$ para 1 grado de libertad es 3.84. Entonces, puesto que $4.50 > 3.84$, se rechaza la hipótesis de que la moneda está bien hecha al nivel de significación del 0.05.

(*b*) El valor crítico $\chi^2_{.99}$ para 1 grado de libertad $= 6.63$. Entonces, puesto que $4.50 < 6.63$, no se rechaza la hipótesis de que la moneda está bien hecha al nivel de significación del 0.01.

Se deduce de los resultados observados que son *probablemente significativos* y la moneda *no está probablemente bien hecha.*

Para una comparación de este método con los métodos utilizados anteriormente, véase método 1 del Problema 7.36.

7.35. Solucionar el Problema 7.34 utilizando la corrección de Yates.

$$\chi^2 \text{ (corregida)} = \frac{(|x_1 - np_1| - 0.5)^2}{np_1} + \frac{(|x_2 - np_2| - 0.5)^2}{np_2}$$

$$= \frac{(|115 - 100| - 0.5)^2}{100} + \frac{(|85 - 100| - 0.5)^2}{100} = \frac{(14.5)^2}{100} + \frac{(14.5)^2}{100} = 4.205$$

Puesto que $4.205 > 3.84$ y $4.205 < 6.63$ se deducen las mismas conclusiones que en el Problema 7.34.

Para una comparación con los métodos anteriores, véase método 2 del Problema 7.36.

7.36. Solucionar el Problema 7.34 mediante la aproximación normal a la distribución binomial.

Bajo la hipótesis de que la moneda está bien hecha, la media y la desviación típica del número de caras esperadas en 200 lanzamientos de la moneda son $\mu = np = (200)(0.5) = 100$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(200)(0.5)(0.5)} = 7.07$. respectivamente.

Método 1.

115 caras en unidades tipificadas $= (115 - 100)/7.07 = 2.12$.

Con un nivel de significación del 0.05 y un ensayo bilateral, se rechaza la hipótesis de que la moneda está bien hecha, si el valor de z está fuera del intervalo -1.96 a 1.96. Con un nivel de 0.01 el intervalo sería -2.58 a 2.58. Se sigue como en el Problema 7.34 que la hipótesis se rechaza al nivel de 0.05 pero no al de 0.01.

Nótese que el cuadrado del valor anterior, $(2.12)^2 = 4.50$, es el mismo valor de χ^2 obtenido en el Problema 7.34. Esto se cumple siempre que la prueba de chi-cuadrado comprende dos categorías. Véase Problema 4.36.

Método 2.

Con la corrección para la continuidad, 115 o más caras equivale a 114.5 o más caras. Entonces 114.5 en unidades tipificadas $= (114.5 - 100)/7.07 = 2.05$. Esto conduce a las mismas conclusiones que por el primer método.

Nótese que el cuadrado de este valor, $(2.05)^2 = 4.20$, es igual al valor de χ^2 corregido con la corrección de Yates para la continuidad del Problema 7.35. Esto se cumple siempre que la prueba de chi-cuadrado comprende dos categorías y se aplica la corrección de Yates, de nuevo en consecuencia del Problema 4.36.

7.37. La Tabla 7-10 muestra las frecuencias observadas y esperadas al lanzar un dado 120 veces. Ensayar la hipótesis de que el dado esté bien hecho al nivel de significación del 0.05.

Tabla 7-10

Cara	1	2	3	4	5	6
Frecuencia observada	25	17	15	23	24	16
Frecuencia esperada	20	20	20	20	20	20

$$\chi^2 = \frac{(x_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(x_2 - np_2)^2}{np_2} + \frac{(x_3 - np_3)^2}{np_3} + \frac{(x_4 - np_4)^2}{np_4} + \frac{(x_5 - np_5)^2}{np_5} + \frac{(x_6 - np_6)^2}{np_6}$$

$$= \frac{(25 - 20)^2}{20} + \frac{(17 - 20)^2}{20} + \frac{(15 - 20)^2}{20} + \frac{(23 - 20)^2}{20} + \frac{(24 - 20)^2}{20} + \frac{(16 - 20)^2}{20} = 5.00$$

Puesto que el número de categorías o clases (caras 1, 2, 3, 4, 5, 6) es $k = 6$, $\nu = k - 1 = 6 - 1 = 5$.

El valor crítico $\chi^2_{.95}$ para 5 grados de libertad es 11.1. Entonces, puesto que $5.00 < 11.1$, no se puede rechazar la hipótesis de que el dado está bien hecho.

Para 5 grados de libertad $\chi^2_{.05} = 1.15$, de modo que $\chi^2 = 5.00 > 1.15$. De ello se sigue que la concordancia entre ambas frecuencias no es tan buena como para no dudar de lo deducido.

7.38. Una tabla de números aleatorios de 250 dígitos mostró la distribución de los dígitos 0, 1, 2, . . . , 9 que se da en la Tabla 7-11. ¿Difiere significativamente la distribución observada de la distribución esperada?

Tabla 7-11

Dígito	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia observada	17	31	29	18	14	20	35	30	20	36
Frecuencia esperada	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25

$$\chi^2 = \frac{(17-25)^2}{25} + \frac{(31-25)^2}{25} + \frac{(29-25)^2}{25} + \frac{(18-25)^2}{25} + \cdots + \frac{(36-25)^2}{25} = 23.3$$

El valor crítico de $\chi^2_{.99}$ para $\nu = k - 1 = 9$ grados de libertad es 21.7; como $23.3 > 21.7$ se deduce que la distribución observada difiere significativamente de la esperada al nivel de significación del 0.01. Se deduce que cabe sospechar alguna tendencia no aleatoria en dicha tabla de números.

7.39. En los experimentos de Mendel con guisantes, observó 315 lisos y amarillos, 108 lisos y verdes, 101 rugosos y amarillos y 32 rugosos y verdes. De acuerdo con su teoría, estos números deberían presentarse en la proporción 9:3:3:1. ¿Hay alguna evidencia que permita dudar de su teoría al nivel de significación del (*a*) 0.01; (*b*) 0.05?

El número total de guisantes es $315 + 108 + 101 + 32 = 556$. Puesto que los números esperados están en la proporción 9:3:3:1 (y $9 + 3 + 3 + 1 = 16$), se esperarían

$\frac{9}{16}(556) = 312.75$ lisos y amarillos $\frac{3}{16}(556) = 104.25$ rugosos y amarillos

$\frac{3}{16}(556) = 104.25$ lisos y verdes $\frac{1}{16}(556) = 34.75$ rugosos y verdes

Entonces

$$\chi^2 = \frac{(315-312.75)^2}{312.75} + \frac{(108-104.25)^2}{104.25} + \frac{(101-104.25)^2}{104.25} + \frac{(32-34.75)^2}{34.75} = 0.470$$

Puesto que hay cuatro categorías, $k = 4$ y el número de grados de libertad es $\nu = 4 - 1 = 3$.

(*a*) Para $\nu = 3$, $\chi^2_{.99} = 11.3$, de modo que no se puede rechazar la teoría al nivel de 0.01.

(*b*) Para $\nu = 3$, $\chi^2_{.95} = 7.81$, de modo que no se puede rechazar la teoría al nivel de 0.05.

Se deduce pues, que la teoría y los resultados del experimento están de acuerdo.

Nótese que para 3 grados de libertad, $\chi^2_{.05} = 0.352$ y $\chi^2 = 0.470 > 0.352$. De modo que aunque el acuerdo es bueno, los resultados obtenidos están sujetos a una razonable influencia de error muestral.

7.40. Una urna contiene un gran número de bolas de cuatro colores diferentes: rojo, naranja, amarillo y verde. Una muestra de 12 bolas extraída aleatoriamente de la urna dio 2 rojas, 5 naranjas, 4 amarillas y 1 verde. Ensayar la hipótesis de que la urna contenga proporciones iguales de los diferentes colores.

Bajo la hipótesis de que la urna contiene proporciones iguales de los cuatro colores, cabría esperar 3 bolas de cada clase en la muestra de 12 bolas.

Puesto que estos números esperados son menores de 5, la aproximación de chi-cuadrado será errónea. Para evitar esto se agrupan las categorías de modo que los números esperados en cada categoría sea al menos 5.

Si se desea rechazar la hipótesis, se agrupan las categorías de forma que la evidencia en contra de la hipótesis se muestre claramente. Esto se consigue en nuestro caso considerando las categorías "roja o verde" y "naranja o amarilla", para las que la muestra dio 3 y 9 bolas, respectivamente. Puesto que el número esperado en cada categoría bajo la hipótesis de iguales proporciones es 6, se tiene

$$\chi^2 = \frac{(3-6)^2}{6} + \frac{(9-6)^2}{6} = 3$$

Para $\nu = 2 - 1 = 1$, $\chi^2_{.95} = 3.84$. Así no se puede rechazar la hipótesis al nivel de significación del 0.05 (aunque sí se puede al nivel de 0.10). Los resultados observados pueden imaginablemente deberse al azar, aun cuando las proporciones de los colores sean iguales.

Otro método: Utilizando la corrección de Yates, se tiene

$$\chi^2 = \frac{(|3-6| - 0.5)^2}{6} + \frac{(|9-6| - 0.5)^2}{6} = \frac{(2.5)^2}{6} + \frac{(2.5)^2}{6} = 2.1$$

que conduce a las mismas conclusiones anteriores. Esto cabía esperarse puesto que la corrección de Yates siempre *reduce* el valor de χ^2.

Debe ponerse de manifiesto que si se emplea la aproximación de χ^2 a pesar de que las frecuencias sean demasiado pequeñas, se obtendría

$$\chi^2 = \frac{(2-3)^2}{3} + \frac{(5-3)^2}{3} + \frac{(4-3)^2}{3} + \frac{(1-3)^2}{3} = 3.33$$

Puesto que para $\nu = 4 - 1 = 3$, $\chi^2_{.95} = 7.81$ se llegaría a las mismas conclusiones que antes. Desgraciadamente, la aproximación χ^2 para frecuencias pequeñas es pobre, de aquí que cuando no sea aconsejable agrupar frecuencias se debe recurrir a los métodos exactos de probabilidad incluyendo la distribución multinomial.

7.41. En 360 lanzamientos de un par de dados, se observaron 74 veces "siete" y 24 veces "once". Ensayar la hipótesis de que el dado esté bien hecho al nivel de significación de 0.05.

Un par de dados puede caer de 36 formas. "Siete" se puede presentar de 6 formas y "once" de 2 formas.

Entonces $P(\text{"siete"}) = 6/36 = 1/6$ y $P(\text{"once"}) = 2/36 = 1/18$. Así pues, en 360 lanzamientos cabría esperar $1/6(360) = 60$ veces "siete" y $1/18(360) = 20$ veces "once", de modo que

$$\chi^2 = \frac{(74-60)^2}{60} + \frac{(24-20)^2}{20} = 4.07$$

Para $\nu = 2 - 1 = 1$, $\chi^2_{.95} = 3.84$. Entonces, puesto que $4.07 > 3.84$ se estaría inclinando a rechazar la hipótesis de que los dados estén bien. Sin embargo, empleando la corrección de Yates, se tiene

$$\chi^2 \text{ (corregida)} = \frac{(|74-60| - 0.5)^2}{60} + \frac{(|24-20| - 0.5)^2}{20} = \frac{(13.5)^2}{60} + \frac{(3.5)^2}{20} = 3.65$$

De acuerdo, pues con la χ^2 corregida, no se rechazaría la hipótesis al nivel de 0.05.

En general, para grandes muestras tales como las de aquí, los resultados que se obtienen utilizando la corrección de Yates son más dignos de confianza que los resultados no corregidos. Sin embargo, puesto que incluso el valor corregido de χ^2 se encuentra cerca del valor crítico, se duda acerca de la decisión que se debe tomar. En tales casos, lo mejor quizá sea incrementar el tamaño muestral haciendo más observaciones si se está interesado de una manera especial por alguna razón en el nivel de 0.05. De otro modo, se rechazaría la hipótesis a algún otro nivel (tal como 0.10).

7.42. Una encuesta sobre 320 familias con 5 niños dio la distribución que aparece en la Tabla 7-12. ¿Es el resultado consistente con la hipótesis de que el nacimiento de varón y hembra son igualmente probables?

Tabla 7-12

Número de niños y niñas	5 niños 0 niñas	4 niños 1 niña	3 niños 2 niñas	2 niños 3 niñas	1 niño 4 niñas	0 niños 5 niñas	TOTAL
Número de familias	18	56	110	88	40	8	320

Sea p = probabilidad de nacimiento de varón, y $q = 1 - p$ = probabilidad de nacimiento de hembra. Entonces, las probabilidades de (5 niños), (4 niños y 1 niña), . . . , (5 niñas) son dadas por los términos del desarrollo binomial

$$(p+q)^5 = p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5$$

Si $p = q = 1/2$, se tiene

$$P(\text{5 niños y 0 niñas}) = (\tfrac{1}{2})^5 = \tfrac{1}{32} \qquad P(\text{2 niños y 3 niñas}) = 10(\tfrac{1}{2})^2(\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{10}{32}$$

$$P(\text{4 niños y 1 niña}) = 5(\tfrac{1}{2})^4(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{5}{32} \qquad P(\text{1 niño y 4 niñas}) = 5(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})^4 = \tfrac{5}{32}$$

$$P(\text{3 niños y 2 niñas}) = 10(\tfrac{1}{2})^3(\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{10}{32} \qquad P(\text{0 niños y 5 niñas}) = (\tfrac{1}{2})^5 = \tfrac{1}{32}$$

Entonces el número de familias que se espera tengan 5, 4, 3, 2, 1 y 0 niños se obtiene multiplicando las respectivas probabilidades anteriores por 320, y los resultados son 10, 50, 100, 100, 50, 10. De aquí

$$\chi^2 = \frac{(18-10)^2}{10} + \frac{(56-50)^2}{50} + \frac{(110-100)^2}{100} + \frac{(88-100)^2}{100} + \frac{(40-50)^2}{50} + \frac{(8-10)^2}{10} = 12.0$$

Puesto que $\chi^2_{.95} = 11.1$ y $\chi^2_{.99} = 15.1$ para $\nu = 6 - 1 = 5$ grados de libertad, se rechazará la hipótesis al nivel de significación del 0.05, pero no al 0.01. Así se deduce que los resultados son probablemente significativos y el nacimiento de varón y hembra no son probablemente iguales.

BONDAD DE AJUSTE

7.43. Utilizar la prueba chi-cuadrado para determinar la bondad de ajuste de los datos del Problema 7.30.

$$\chi^2 = \frac{(38-33.2)^2}{33.2} + \frac{(144-161.9)^2}{161.9} + \frac{(342-316.2)^2}{316.2} + \frac{(287-308.7)^2}{308.7} + \frac{(164-150.7)^2}{150.7} + \frac{(25-29.4)^2}{29.4} = 7.45$$

Puesto que el número de parámetros utilizados para estimar las frecuencias esperads es $m = 1$ (que es el parámetro p de la distribución binomial), $\nu = k - 1 - m = 6 - 1 - 1 = 4$.

Para $\nu = 4$, $\chi^2_{.95} = 9.49$. De aquí que el ajuste de los datos es muy bueno.

Para $\nu = 4$, $\chi^2_{.05} = 0.711$. Así puesto que $\chi^2 = 7.54 > 0.711$, el ajuste no es tan bueno como pudiera creerse.

7.44. Determinar la bondad de ajuste de los datos del Problema 7.32.

$$\chi^2 = \frac{(5-4.13)^2}{4.13} + \frac{(18-20.68)^2}{20.68} + \frac{(42-38.92)^2}{38.92} + \frac{(27-27.71)^2}{27.71} + \frac{(8-7.43)^2}{7.43} = 0.959$$

Puesto que el número de parámetros empleados en estimar las frecuencias esperadas es $m = 2$ (que son la media μ y la desviación típica σ de la distribución normal), $\nu = k - 1 - m = 5 - 1 - 2 = 2$.

Para $\nu = 2$, $\chi^2_{.95} = 5.99$. Se deduce que el ajuste de los datos es muy bueno.

Para $\nu = 2$, $\chi^2_{.05} = 0.103$. Entonces, puesto que $\chi^2 = 0.959 > 0.103$, el ajuste no es "demasido bueno".

TABLAS DE CONTINGENCIA

7.45. Solucionar el Problema 7.13 utilizando la prueba chi-cuadrado.

Las condiciones del problema se presentan en la Tabla 7-13. Bajo la hipótesis nula H_0 de que el suero no tiene efecto, cabría esperar que 70 individuos de cada uno de los grupos se recuperase y 30 en cada grupo no se recuperase, como se indica en la Tabla 7-14. Adviértase que H_0 es equivalente a afirmar que la recuperación es *independiente* del empleo del suero, es decir, las clasificaciones son independientes.

Tabla 7-13
FRECUENCIAS OBSERVADAS

	Se recuperan	No se recuperan	TOTAL
Grupo *A* (utilizando suero)	75	25	100
Grupo *B* (no utilizando suero)	65	35	100
TOTAL	140	60	200

Tabla 7-14
FRECUENCIAS ESPERADAS BAJO H_0

	Se recuperan	No se recuperan	TOTAL
Grupo *A* (utilizando suero)	70	30	100
Grupo *B* (no utilizando suero)	70	30	100
TOTAL	140	60	200

$$\chi^2 = \frac{(75-70)^2}{70} + \frac{(65-70)^2}{70} + \frac{(25-30)^2}{30} + \frac{(35-30)^2}{30} = 2.38$$

Para determinar el número de grados de libertad, considérese la Tabla 7-15, que es igual a las dos dadas anteriormente, pero en la que solamente se han puesto los totales. Está claro que solamente se tiene libertad para colocar un número en una de las cuatro casillas vacías, puesto que una vez hecho esto los números de las restantes casillas vienen obligados por los totales ya indicados. De modo que hay un grado de libertad.

Tabla 7-15

	Se recuperan	No se recuperan	TOTAL
Grupo *A*			100
Grupo *B*			100
TOTAL	140	60	200

Puesto que $\chi_{.95} = 3.84$ para 1 grado de libertad y puesto que $\chi^2 = 2.38 < 3.84$, se deduce que los resultados *no son significativos* al nivel de 0.05. No se está así en condiciones de rechazar H_0 a este nivel y se deduce o que el suero no es efectivo o se deja sin tomar decisión en espera de posteriores ensayos.

Nótese que $\chi^2 = 2.38$ es el cuadrado del valor de $z = 1.54$, obtenido en el Problema 7.13. En general, la prueba chi-cuadrado en relación con proporciones muestrales de una tabla de contingencia 2×2 equivale a un ensayo de significación de diferencias de proporciones mediante la aproximación normal, como en la página 215 (véase Problema 7.51).

Nótese también que un ensayo unilateral utilizando χ^2 equivale a un ensayo bilateral utilizando χ, ya que, por ejemplo, $\chi^2 > \chi^2_{.95}$ corresponde a $\chi > \chi_{.95}$ ó $\chi < -\chi_{.95}$. Puesto que para las tablas 2×2, χ^2 es el cuadrado del valor de z, se sigue que χ es lo mismo que z en este caso. Así pues, al rechazar una hipótesis al nivel de 0.05 utilizando χ^2 equivale a rechazar esta hipótesis con un ensayo unilateral al nivel de 0.10 utilizando z.

7.46. Solucionar el Problema 7.45 aplicando la corrección de Yates.

$$\chi^2\,(\text{corregida}) = \frac{(|75-70|-0.5)^2}{70} + \frac{(|65-70|-0.5)^2}{70} + \frac{(|25-30|-0.5)^2}{30} + \frac{(|35-30|-0.5)^2}{30} = 1.93$$

Obteniéndose que las conclusiones del Problema 7.45 son también válidas aquí. Esto podría haberse visto rápidamente, ya que la corrección de Yates siempre disminuye el valor de χ^2.

7.47. En la Tabla 7-16 se indican los estudiantes aprobados y suspendidos por 3 profesores: Sr. X, Sr. Y y Sr. Z. Ensayar la hipótesis de que las proporciones de estudiantes suspendidos por los tres profesores son iguales.

Bajo la hipótesis H_0 de que las proporciones de estudiantes suspendidos por los tres profesores son las mismas, habrían suspendido 27/180 = 15% de los estudiantes y

Tabla 7-16
FRECUENCIAS OBSERVADAS

	Sr. X	Sr. Y	Sr. Z	TOTAL
Aprobados	50	47	56	153
Suspendidos	5	14	8	27
TOTAL	55	61	64	180

habrían aprobado el 85% de los estudiantes. Las frecuencias esperadas bajo H_0 se muestran en la Tabla 7-17.

Tabla 7-17

FRECUENCIAS ESPERADAS BAJO H_0

	Sr. X	Sr. Y	Sr. Z	TOTAL
Aprobados	85% de 55 = 46.75	85% de 61 = 51.85	85% de 64 = 54.40	153
Suspendidos	15% de 55 = 8.25	15% de 61 = 9.15	15% de 64 = 9.60	27
TOTAL	55	61	64	180

Tabla 7-18

	Sr. X	Sr. Y	Sr. Z	TOTAL
Aprobados				153
Suspendidos				27
TOTAL	55	61	64	180

Entonces

$$\chi^2 = \frac{(50-46.75)^2}{46.75} + \frac{(47-51.85)^2}{51.85} + \frac{(56-54.40)^2}{54.40} + \frac{(5-8.25)^2}{8.25} + \frac{(14-9.15)^2}{9.15} + \frac{(8-9.60)^2}{9.60} = 4.84$$

Para determinar el número de grados de libertad, considérese la Tabla 7-18, que es igual que la Tabla 7-17 pero en la que solamente se han puesto los totales. Está claro que como cada fila y cada columna han de cumplir con los totales, solamente se está en libertad de poner al azar un número en una de las casillas de la primera columna y otro en una de las casillas de la segunda o tercera columna, después de lo cual, todos los números restantes vienen obligados por los totales. Así pues, hay en este caso dos grados de libertad.

Puesto que $\chi^2_{.95} = 5.99$, no se puede rechazar H_0 al nivel de 0.05. Nótese, sin embargo, que puesto que $\chi^2_{.90} = 4.61$, se puede rechazar H_0 al nivel de 0.10 si se está dispuesto a correr el riesgo de estar equivocado 1 vez de cada 10.

7.48. Mostrar que para una tabla de contingencia $h \times k$ $(h > 1, k > 1)$ el número de grados de libertad es $(h-1)(k-1)$.

Hay $h + k - 1$ totales independientes de un total hk. Se deduce que el número de grados de libertad es

$$hk - (h+k-1) = (h-1)(k-1)$$

como se requería. Nótese que este resultado es válido si se conocen los parámetros poblacionales necesarios para obtener las frecuencias teóricas; de otra forma se necesitan ajustes como los descritos en (*b*), página 220.

7.49. Demostrar que para la tabla de contingencia 2×2 que se muestra en la Tabla 7-19

$$\chi^2 = \frac{n(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{n_1n_2n_An_B}$$

Tabla 7-19

RESULTADOS OBSERVADOS

	I	II	TOTAL
A	a_1	a_2	n_A
B	b_1	b_2	n_B
TOTAL	n_1	n_2	n

Tabla 7-20

RESULTADOS ESPERADOS

	I	II	TOTAL
A	n_1n_A/n	n_2n_A/n	n_A
B	n_1n_B/n	n_2n_B/n	n_B
TOTAL	n_1	n_2	n

Como en el Problema 7-45, los resultados esperados bajo la hipótesis nula aparecen en la Tabla 7-20. Entonces

$$\chi^2 = \frac{(a_1 - n_1n_A/n)^2}{n_1n_A/n} + \frac{(a_2 - n_2n_A/n)^2}{n_2n_A/n} + \frac{(b_1 - n_1n_B/n)^2}{n_1n_B/n} + \frac{(b_2 - n_2n_B/n)^2}{n_2n_B/n}$$

Pero $$a_1 - \frac{n_1n_A}{n} = a_1 - \frac{(a_1+b_1)(a_1+a_2)}{a_1+b_1+a_2+b_2} = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{n}$$

Análogamente
$$a_2 - \frac{n_2 n_A}{n} = b_1 - \frac{n_1 n_B}{n} = b_2 - \frac{n_2 n_B}{n} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{n}$$

Así, se puede escribir

$$\chi^2 = \frac{n}{n_1 n_A}\left(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{n}\right)^2 + \frac{n}{n_2 n_A}\left(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{n}\right)^2 + \frac{n}{n_1 n_B}\left(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{n}\right)^2 + \frac{n}{n_2 n_B}\left(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{n}\right)^2$$

que al simplificar, da

$$(1) \qquad \chi^2 = \frac{n(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{n_1 n_2 n_A n_B} = \frac{n\Delta^2}{n_1 n_2 n_A n_B}$$

donde $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$, $n = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$, $n_1 = a_1 + b_1$, $n_2 = a_2 + b_2$, $n_A = a_1 + a_2$, $n_B = b_1 + b_2$. Si se aplica la corrección de Yates, (*1*) se remplaza por

$$(2) \qquad \chi^2 \text{ (corregida)} = \frac{n(|\Delta| - \frac{1}{2}n)^2}{n_1 n_2 n_A n_B}$$

7.50. Ilustrar el resultado del Problema 7.49 para los datos del Problema 7.45.

En el Problema 7.45, $a_1 = 75$, $a_2 = 25$, $b_1 = 65$, $b_2 = 35$, $n_1 = 140$, $n_2 = 60$, $n_A = 100$, $n_B = 100$, y $n = 200$; entonces (*1*) del Problema 7.49 da

$$\chi^2 = \frac{200[(75)(35) - (25)(65)]^2}{(140)(60)(100)(100)} = 2.38$$

Empleando la corrección de Yates, el resultado es el mismo que en el Problema 7.46:

$$\chi^2 \text{ (corregida)} = \frac{n(|a_1 b_2 - a_2 b_1| - \frac{1}{2}n)^2}{n_1 n_2 n_A n_B} = \frac{200[|(75)(35) - (25)(65)| - 100]^2}{(140)(60)(100)(100)} = 1.93$$

7.51. Demostrar que una prueba chi-cuadrado que se refiera a dos proporciones muestrales es equivalente a un ensayo de significación de diferencia de proporciones utilizando la aproximación normal (véase página 215).

Denótese por P_1 y P_2 las dos proporciones muestrales y p la proporción poblacional. Con referencia al Problema 7.49, se tiene

$$(1) \qquad P_1 = \frac{a_1}{n_1}, \quad P_2 = \frac{a_2}{n_2}, \quad 1 - P_1 = \frac{b_1}{n_1}, \quad 1 - P_2 = \frac{b_2}{n_2}$$

$$(2) \qquad p = \frac{n_A}{n}, \quad 1 - p = q = \frac{n_B}{n}$$

de modo que

$$(3) \qquad a_1 = n_1 P_1, \quad a_2 = n_2 P_2, \quad b_1 = n_1(1 - P_1), \quad b_2 = n_2(1 - P_2)$$

$$(4) \qquad n_A = np, \quad n_B = nq$$

Utilizando (*3*) y (*4*), se tiene del Problema 7.49

$$\chi^2 = \frac{n(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{n_1 n_2 n_A n_B} = \frac{n[n_1 P_1 n_2(1 - P_2) - n_2 P_2 n_1(1 - P_1)]^2}{n_1 n_2 npnq}$$

$$= \frac{n_1 n_2 (P_1 - P_2)^2}{npq} = \frac{(P_1 - P_2)^2}{pq(1/n_1 + 1/n_2)} \text{ (ya que } n = n_1 + n_2)$$

que es el cuadrado del estadístico Z, dado en (*10*) en la página 215.

COEFICIENTE DE CONTINGENCIA

7.52. Hallar el coeficiente de contingencia para los datos de la tabla de contingencia del Problema 7.45.

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} = \sqrt{\frac{2.38}{2.38 + 200}} = \sqrt{0.01176} = 0.1084$$

7.53. Hallar el valor máximo de C para la tabla 2×2 del Problema 7.13.

El valor máximo de C se presenta cuando las dos clasificaciones son perfectamente dependientes o asociadas. En tal caso, todos los que tomen el suero se recuperarán y todos los que no se lo tomen no se recuperarán. Esta tabla de contingencia aparece en la Tabla 7-21.

Puesto que las frecuencias esperadas, suponiendo independencia total, son todas iguales a 50.

Tabla 7-21

	Se recuperan	No se recuperan	TOTAL
Grupo A (utilizando suero)	100	0	100
Grupo B (no utilizando suero)	0	100	100
TOTAL	100	100	200

$$\chi^2 \;=\; \frac{(100-50)^2}{50} + \frac{(0-50)^2}{50} + \frac{(0-50)^2}{50} + \frac{(100-50)^2}{50} \;=\; 200$$

Entonces el valor máximo de C es $\sqrt{\chi^2/(\chi^2+n)} = \sqrt{200/(200+200)} = 0.7071$.

En general, para la dependencia total en una tabla de contingencia, en la que el número de filas y columnas son ambas iguales a k, las únicas frecuencias de casillas que no son cero aparecen en la diagonal que baja de izquierda a derecha de la tabla. Para tales casos, $C_{\max} = \sqrt{(k-1)/k}$. (Véase Problema 7.127).

PROBLEMAS DIVERSOS

7.54. Un instructor hace un cuestionario formado por 10 preguntas falso-verdadero. Para ensayar la hipótesis de que el estudiante acierte por casualidad, adopta la siguiente regla de decisión: (*i*) si 7 o más respuestas son acertadas el estudiante no las acierta por casualidad; (*ii*) en caso contrario, el estudiante está adivinando. Hallar la probabilidad de rechazar la hipótesis cuando es correcta.

Sea p la probabilidad de que una pregunta sea contestada correctamente.

La probabilidad de contestar correctamente x preguntas de las 10 será ${}_{10}C_x p^x q^{10-x}$, donde $q = 1 - p$.

Bajo la hipótesis $p = 0.5$ (es decir, el estudiante acierta al azar).

$$\begin{aligned} P(7 \text{ o más correctas}) &= P(7 \text{ correctas}) + P(8 \text{ correctas}) + P(9 \text{ correctas}) + P(10 \text{ correctas}) \\ &= {}_{10}C_7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_{10}C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_{10}C_9\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right) + {}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \;=\; 0.1719 \end{aligned}$$

Así, pues, la probabilidad de decidir que el estudiante no responde al azar cuando es que si, es 0.1719. Nótese que ésta es la probabilidad de error del Tipo I.

7.55. En el problema 7.54, hallar la probabilidad de aceptar la hipótesis $p = 0.5$ cuando realmente $p = 0.7$.

Bajo la hipótesis $p = 0.7$

$$\begin{aligned} P(\text{menos de } 7 \text{ correctas}) &= 1 - P(7 \text{ o más correctas}) \\ &= 1 - [{}_{10}C_7(0.7)^7(0.3)^3 + {}_{10}C_8(0.7)^8(0.3)^2 + {}_{10}C_9(0.7)^9(0.3) + {}_{10}C_{10}(0.3)^{10}] \;=\; 0.3504 \end{aligned}$$

7.56. En el Problema 7.54, hallar la probabilidad de aceptar la hipótesis $p = 0.5$ cuando realmente (*a*) $p = 0.6$, (*b*) $p = 0.8$, (*c*) $p = 0.9$, (*d*) $p = 0.4$, (*e*) $p = 0.3$, (*f*) $p = 0.2$, (*g*) $p = 0.1$.

(*a*) Si $p = 0.6$ la probabilidad pedida será

$$\begin{aligned} & 1 - [P(7 \text{ correctas}) + P(8 \text{ correctas}) + P(9 \text{ correctas}) + P(10 \text{ correctas})] \\ &= 1 - [{}_{10}C_7(0.6)^7(0.4)^3 + {}_{10}C_8(0.6)^8(0.4)^2 + {}_{10}C_9(0.6)^9(0.4) + {}_{10}C_{10}(0.6)^{10}] \;=\; 0.618 \end{aligned}$$

Los resultados de (b), (c), . . . , (g) pueden hallarse análogamente y se indican en la Tabla 7-22 junto con el valor correspondiente a $p = 0.7$ hallado en el Problema 7.55. Nótese que la probabilidad se denota por β (probabilidad de error del Tipo II). Se ha incluido también el valor para $p = 0.5$ dado por $\beta = 1 - 0.1719 = 0.828$ del Problema 7.54.

Tabla 7-22

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
β	1.000	0.999	0.989	0.945	0.828	0.618	0.350	0.121	0.013

7.57. Utilizar el Problema 7.56 para construir el gráfico de β y p obteniendo así la curva característica de operación de la regla de decisión del Problema 7.54.

El gráfico pedido es el de la Fig. 7-14. Adviértase la semejanza con la curva OC del Problema 7-27.

Si se hubiese dibujado $(1 - \beta)$ y p, se habría obtenido la *curva de potencia* de la regla de decisión.

El grafico indica que la regla de decisión dada es *muy adecuada* para rechazar $p = 0.5$ cuando realmente $p \geqq 0.8$.

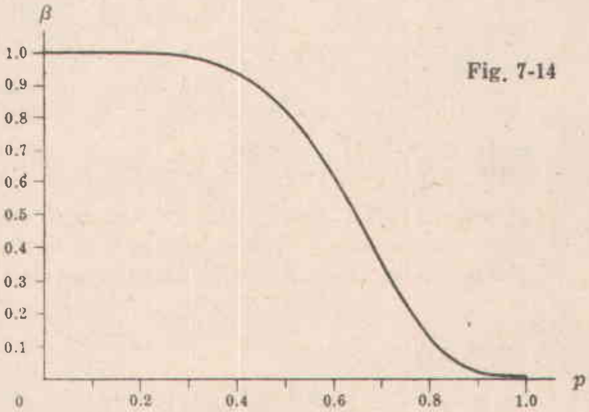


Fig. 7-14

7.58. Una moneda que se lanza 6 veces da 6 veces cara. ¿Puede deducirse que al nivel de significación (a) 0.05 y (b) 0.01 la moneda no está bien hecha? Considerar ensayos de una y dos colas.

Sea p la probabilidad de cara en un solo lanzamiento de la moneda.

Bajo la hipótesis ($H_0: p = 0.5$)(es decir, la moneda está bien hecha),

$$f(x) = P(x \text{ caras en 6 lanzamientos}) = {}_6C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{6-x} = \frac{{}_6C_x}{64}$$

Entonces las probabilidades de 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 caras son dadas, respectivamente, por $\frac{1}{64}$, $\frac{6}{64}$, $\frac{15}{64}$, $\frac{20}{64}$, $\frac{15}{64}$, $\frac{6}{64}$ y $\frac{1}{64}$, como se muestra gráficamente en la distribución de probabilidad de la Fig. 7-15.

Ensayo unilateral:

Aquí se desea decidir entre las hipótesis ($H_0: p = 0.5$) y ($H_1: p > 0.5$). Puesto que $P(6 \text{ caras}) = \frac{1}{64} = 0.01562$ y $P(5 \text{ ó } 6 \text{ caras}) = \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = 0.1094$, se puede rechazar H_0 al nivel 0.05, pero no al 0.01 (es decir, el resultado observado es significativo al nivel 0.05, pero no al 0.01).

Ensayo bilateral:

Aquí se desea decidir entre las hipótesis ($H_0: p = 0.5$) y ($H_1: p \neq 0.5$). Puesto que $P(0 \text{ ó } 6 \text{ caras}) = \frac{1}{64} + \frac{1}{64} = 0.03125$, se puede rechazar H_0 al nivel 0.05, pero no al 0.01.

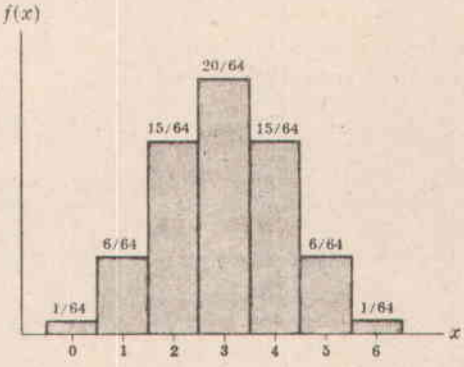


Fig. 7-15

7.59. Solucionar el Problema 7.58, si en la moneda sale 5 veces cara.

Ensayo unilateral. Puesto que $P(5 \text{ ó } 6 \text{ caras}) = \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{7}{64} = 0.1094$, no se puede rechazar H_0 al nivel de 0.05 ó 0.01.

Ensayo bilateral. Puesto que $P(0 \text{ ó } 1 \text{ ó } 5 \text{ ó } 6 \text{ caras}) = 2(\frac{7}{64}) = 0.2188$, no se puede rechazar H_0 al nivel de 0.05 ó 0.01.

7.60. Mostrar que una prueba en chi-cuadrado que comprende dos categorías es equivalente al ensayo especial de significación para proporciones (página 214).

Tabla 7-23

	I	II	TOTAL
Frecuencia observada	nP	$n(1-P)$	n
Frecuencia esperada	np	$n(1-p) = nq$	n

Si P es la proporción muestral para la categoría I, p es la proporción poblacional y n es la frecuencia total, se pueden describir las situaciones por medio de la Tabla 7-23. Entonces, por definición,

$$\chi^2 = \frac{(nP-np)^2}{np} + \frac{[n(1-P)-n(1-p)]^2}{nq}$$

$$= \frac{n^2(P-p)^2}{np} + \frac{n^2(P-p)^2}{pq} = n(P-p)^2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) = \frac{n(P-p)^2}{pq} = \frac{(P-p)^2}{pq/n}$$

que es el cuadrado del estadístico Z, (*5*) de la página 214.

7.61. Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_k$ tienen una distribución multinomial, con frecuencias esperadas $np_1, np_2, \ldots, np_k$ respectivamente. Sean $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ variables mutuamente independientes con distribución de Poisson y parámetros $\lambda_1 = np_1, \lambda_2 = np_2, \ldots, \lambda_k = np_k$ respectivamente. Demostrar que la distribución condicional de las Y dado que

$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k = n$$

es precisamente la distribución multinomial de las X.

Para la función de probabilidad conjunta de las Y tenemos

$$(1) \qquad P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \ldots, Y_k = y_k) = \left[\frac{(np_1)^{y_1}e^{-np_1}}{y_1!}\right]\left[\frac{(np_2)^{y_2}e^{-np_2}}{y_2!}\right]\cdots\left[\frac{(np_k)^{y_k}e^{-np_k}}{y_k!}\right]$$

$$= \frac{n^{y_1+y_2+\cdots+y_k}p_1^{y_1}p_2^{y_2}\cdots p_k^{y_k}}{y_1!\,y_2!\cdots y_k!}e^{-n}$$

donde hemos utilizado el hecho de que $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$. La distribución condicional que estamos buscando está dada por

$$(2) \qquad P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \ldots, Y_k = y_k \mid Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k = n)$$

$$= \frac{P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \ldots, Y_k = y_k \;\text{ y }\; Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k = n)}{P(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k = n)}$$

Entonces, el numerador en (*2*) tiene, de (*1*), el valor

$$\frac{n^n p_1^{y_1}p_2^{y_2}\cdots p_k^{y_k}}{y_1!\,y_2!\cdots y_k!}e^{-n}$$

En cuanto al denominador, sabemos del Problema 4.95, página 147, que $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k$ es en sí misma una variable de Poisson con parámetro $np_1 + np_2 + \cdots + np_k = n$. Así el denominador tiene el valor

$$\frac{n^n e^{-n}}{n!}$$

Por tanto (*2*) se convierte en

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \ldots, Y_k = y_k \mid Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k = n) = \frac{n!}{y_1!\,y_2!\cdots y_k!}p_1^{y_1}p_2^{y_2}\cdots p_k^{y_k}$$

que es la distribución multinomial de las X [compárese (*16*), página 113].

7.62. Emplear el resultado del Problema 7.61 para demostrar que χ^2, como se define por (*21*), página 218, tiene aproximadamente una distribución chi-cuadrado.

Tal como se establece, (*21*) es difícil de manipular ya que las X distribuidas multinomialmente son dependientes, de acuerdo con la restricción (*22*). Sin embargo, el Problema 7.61 demuestra que podemos remplazar las X por las Y *independientes* con distribución de Poisson si se cumple que $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k = n$. Por tanto reescribimos (*21*) como

$$(1) \qquad \chi^2 = \left(\frac{Y_1-\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2 + \left(\frac{Y_2-\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{Y_k-\lambda_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right)^2$$

Cuando $n \to \infty$, todos los λ tienden a ∞, y el teorema del límite central para las distribuciones de Poisson [(*14*), página 112] resulta

$$(2) \qquad \chi^2 \approx Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2$$

donde las Z son variables normales *independientes* con media 0 y varianza 1 cuya distribución es condicional dependiendo del suceso.

$$(3) \qquad \sqrt{\lambda_1}\,Z_1 + \sqrt{\lambda_2}\,Z_2 + \cdots + \sqrt{\lambda_k}\,Z_k = 0 \qquad \text{ó} \qquad \sqrt{p_1}\,Z_1 + \sqrt{p_2}\,Z_2 + \cdots + \sqrt{p_k}\,Z_k = 0$$

o, ya que las variables son continuas,

$$(4) \qquad |\sqrt{p_1}\,Z_1 + \sqrt{p_2}\,Z_2 + \cdots + \sqrt{p_k}\,Z_k| < \epsilon$$

Denótese por $F_\nu(x)$ la función de distribución acumulada para una variable chi-cuadrado con ν grados de libertad. Entonces lo que deseamos demostrar es:

$$(5) \qquad P(Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2 \leqq x \mid |\sqrt{p_1}\,Z_1 + \sqrt{p_2}\,Z_2 + \cdots + \sqrt{p_k}\,Z_k| < \epsilon)$$
$$= \frac{P(Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2 \leqq x \ \text{ y } \ |\sqrt{p_1}\,Z_1 + \sqrt{p_2}\,Z_2 + \cdots + \sqrt{p_k}\,Z_k| < \epsilon)}{P(|\sqrt{p_1}\,Z_1 + \sqrt{p_2}\,Z_2 + \cdots + \sqrt{p_k}\,Z_k| < \epsilon)} = F_\nu(x)$$

para un valor apropiado de ν.

Es fácil establecer (*5*) si utilizamos nuestra intuición geométrica. Primero que todo, el Teorema 4-3 demuestra que la distribución incondicional de $Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2$ es chi-cuadrado con k grados de libertad. Por tanto, ya que la función de densidad para cada Z_j es $(2\pi)^{-1/2}e^{-z^2/2}$,

$$(6) \qquad F_k(x) = (2\pi)^{-k/2} \int \cdots \int_{z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_k^2 \leqq x} e^{-(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_k^2)/2}\,dz_1\,dz_2 \cdots dz_k$$

Además, tenemos para el numerador de (*5*):

$$(7) \qquad \text{Numerador} = (2\pi)^{-k/2} \int \cdots \int_{\substack{z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_k^2 \leqq x, \\ |\sqrt{p_1}\,z_1 + \sqrt{p_2}\,z_2 + \cdots + \sqrt{p_k}\,z_k| < \epsilon}} e^{-(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_k^2)/2}\,dz_1\,dz_2 \cdots dz_k$$

Recordamos de la geometría analítica que en el espacio tridimensional $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqq a^2$ representa un sólido esférico de radio a con centro en el origen, en tanto que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ es un plano a través del origen cuya normal es el vector unitario $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. La Fig. 7-16 indica la intersección de los dos cuerpos. Es lógico que cuando una función que depende solamente de la distancia desde el origen, es decir

$$f(r) \quad \text{donde} \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

se integra sobre el área circular —o a través de una tira delgada en esa área— el valor de la integral es completamente independiente de los cosenos direccionales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. En otras palabras, todos los planos cortantes a través del origen dan la misma integral.

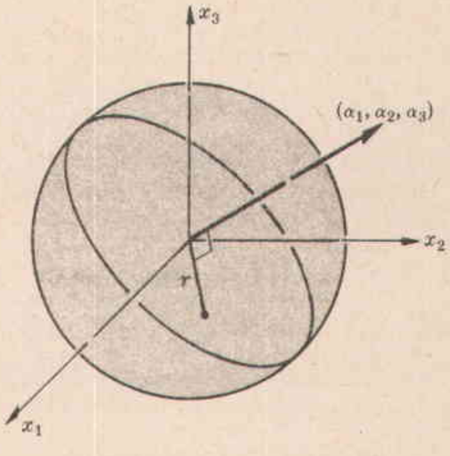


Fig. 7-16

Por analogía concluimos que en (*7*), donde $e^{-r^2/2}$ se integra sobre la intersección de una *hiperesfera* alrededor del origen, se pueden dar los valores convenientes arbitrarios a las p. Escogemos

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_{k-1} = 0, \qquad p_k = 1$$

y obtenemos

$$(8) \qquad \text{Numerador} = (2\pi)^{-k/2} \int \cdots \int_{z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{k-1}^2 \leqq x} e^{-(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{k-1}^2)/2}\,dz_1\,dz_2 \cdots dz_{k-1}(2\epsilon)$$
$$= (2\pi)^{-1/2}F_{k-1}(x)(2\epsilon)$$

utilizando (*6*). El factor 2ϵ es el espesor de la tira.

Para evaluar el denominador de (*5*) notamos que la variable aleatoria

$$W = \sqrt{p_1}\, Z_1 + \sqrt{p_2}\, Z_2 + \cdots + \sqrt{p_k}\, Z_k$$

es normal (puesto que es una combinación lineal de las variables Z normales e independientes), y que

$$E(W) = \sqrt{p_1}\,(0) + \sqrt{p_2}\,(0) + \cdots + \sqrt{p_k}\,(0) = 0$$

$$\text{Var}\,(W) = p_1(1) + p_2(1) + \cdots + p_k(1) = 1$$

Por tanto la función de densidad para W es $\phi(w) = (2\pi)^{-1/2} e^{-w^2/2}$, y

$$\text{Denominador} = P(|W| < \epsilon) = \phi(0)(2\epsilon) = (2\pi)^{-1/2}(2\epsilon) \tag{9}$$

Al dividir (*8*) por (*9*) obtenemos el resultado deseado, donde $\nu = k - 1$.

La "demostración" anterior (que puede hacerse rigurosa) muestra incidentalmente que cada restricción lineal colocada a las Z, y por tanto a las Y o a las X, reduce el número de grados de libertad en χ^2 en 1. Esto provee las bases para las reglas dadas en la página 219.

Problemas suplementarios

ENSAYOS DE MEDIAS Y PROPORCIONES UTILIZANDO DISTRIBUCIONES NORMALES

7.63. Una urna contiene bolas rojas y azules. Para ensayar la hipótesis de proporciones iguales de estos colores, se acuerda en tomar una muestra de 64 bolas con remplazamiento, anotando los colores extraídos y adoptando la siguiente regla de decisión: (*1*) se acepta la hipótesis si se extraen entre 28 y 36 bolas rojas; (*2*) se rechaza en caso contrario. (*a*) Hallar la probabilidad de rechazar la hipótesis cuando en realidad sea correcta. (*b*) Interpretar gráficamente la regla de decisión y el resultado obtenido en (*a*).

7.64. (*a*) ¿Qué regla de decisión se adoptaría en el Problema 7.63 si se quisiera que la probabilidad de rechazar la hipótesis siendo realmente correcta sea a lo sumo 0.01, es decir, se quiere un nivel de significación del 0.01? (*b*) ¿A qué nivel de confianza se aceptaría la hipótesis? (*c*) ¿Cuál sería la regla de decisión si se adoptara un nivel de significación del 0.05?

7.65. Supóngase que en el Problema 7.63 se desea ensayar la hipótesis de que hay *mayor proporción* de bolas rojas que de azules. (*a*) ¿Cuál sería la hipótesis nula y cuál la alternativa? (*b*) ¿Se utilizaría un ensayo de una o dos colas? ¿Por qué? (*c*) ¿Qué regla de decisión se adoptaría si el nivel de significación fuera del 0.05? (*d*) ¿Cuál sería la regla de decisión si el nivel de significación fuera del 0.01?

7.66. Se lanza un par de dados 100 veces y se observa que un total de "siete" aparece 23 veces. Ensayar la hipótesis de que los dados estén bien hechos, es decir, no cargados, mediante (*a*) un ensayo bilateral y (*b*) un ensayo unilateral y un nivel de significación del 0.05. Discutir las razones de las posibles preferencias de uno de estos ensayos sobre el otro.

7.67. Solucionar el Problema 7.66 si el nivel de significación es del 0.01.

7.68. Un fabricante sostiene que al menos el 95% de los equipos que suministra a una fábrica está de acuerdo con las especificaciones requeridas. Un examen sobre una muestra de 200 de tales equipos reveló que 18 eran defectuosos. Ensayar la afirmación del fabricante al nivel de significación del (*a*) 0.01, (*b*) 0.05.

7.69. La experiencia ha demostrado que la media de resistencia a la rotura de una determinada clase de hilo es de 9.72 onzas con una desviación típica de 1.40 onzas. Recientemente, una muestra de 36 piezas de hilo dieron una resistencia media de 8.93 onzas. ¿Se puede deducir al nivel de significación del (*a*) 0.05 y (*b*) 0.01 que el hilo es ahora peor?

7.70. En un examen dado a un gran número de estudiantes de muchas escuelas distintas, la puntuación media fue de 74.5 y la desviación típica fue 8.0. En una escuela determinada con 200 estudiantes el mismo examen dio una puntuación media de 75.9. Comentar la significación de este resultado al nivel de 0.05 desde el punto de vista de (*a*) un ensayo unilateral y (*b*) un ensayo bilateral, explicando las conclusiones sacadas con estos ensayos.

7.71. Solucionar el Problema 7.70 si el nivel de significación es del 0.01.

ENSAYOS REFERENTES A DIFERENCIAS DE MEDIAS Y PROPORCIONES

7.72. Una muestra de 100 bombillas de un fabricante *A* dio una duración media de 1190 horas y una desviación típica de 90 horas. Una muestra de 75 bombillas de otro fabricante *B* dio una duración media de 1230 horas con una desviación típica de 120 horas. ¿Hay diferencias entre las duraciones medias de las bombillas de los dos fabricantes al nivel de significación del (*a*) 0.05 y (*b*) 0.01?

7.73. En el Problema 7.72 ensayar la hipótesis de que las bombillas del fabricante *B* sean mejores a las del fabricante *A* utilizando un nivel de significación del (*a*) 0.05, (*b*) 0.01. Explicar las diferencias entre esto y lo que se pedía en el problema anterior. ¿Se contradicen los resultados con los del problema anterior?

7.74. En un examen de ortografía en una escuela elemental, la puntuación media de 32 niños fue de 72 con una desviación típica de 8, mientras que la puntuación media de 36 niñas fue de 75 con una desviación típica de 6. Ensayar la hipótesis de que a los niveles de significación (*a*) del 0.05 y (*b*) del 0.01 las niñas tengan mejor ortografía que los niños.

7.75. Para ensayar los efectos de un nuevo fertilizante sobre la producción de trigo, una parcela de terreno se dividió en 60 cuadrados de áreas iguales, todos ellos tenían idénticas características de suelo, exposción a la luz del sol, etc. El nuevo fertilizante se aplicó a 30 de estos cuadrados y el antiguo fertilizante a los restantes. El número medio de fanegadas de trigo cosechadas por cuadrado en los que se utilizó el fertilizante nuevo fue de 18.2 con una desviación típica de 0.63 fanegadas. La media y desviación típica correspondientes a los otros cuadrados fueron 17.8 y 0.54 fanegadas, respectivamente. Con un nivel de significación del (*a*) 0.05 y (*b*) 0.01, ensayar la hipótesis de que el nuevo fertilizante sea mejor que el antiguo.

7.76. Muestras al azar de 200 tuercas fabricadas por la máquina *A* y de 100 tuercas fabricadas por la máquina *B* dieron 19 y 5 tuercas defectuosas, respectivamente. Ensayar la hipótesis de que (*a*) las dos máquinas tengan diferente calidad de fabricación y (*b*) la máquina *B* sea mejor que *A*. Utilizar el nivel de significación del 0.05.

ENSAYOS EN RELACION CON LA DISTRIBUCION *t* DE STUDENT

7.77. La duración media de las bombillas producidas por una compañía ha sido en el pasado de 1120 horas con una desviación típica de 125 horas. Una muestra de 8 bombillas de la producción actual dio una duración media de 1070 horas. Ensayar la hipótesis de que la duración media de las bombillas no ha cambiado, con los niveles de significación de (*a*) 0.05 y (*b*) 0.01.

7.78. En el Problema 7.77 ensayar la hipótesis $\mu = 1120$ horas contra la hipótesis alternativa $\mu < 1120$ horas, mediante un nivel de significación del (*a*) 0.05 y (*b*) 0.01.

7.79. Las especificaciones para la producción de una cierta aleación piden el 23.2% de cobre. Una muestra de 10 análisis dio una media de contenido en cobre de 23.5% y una desviación típica de 0.24%. ¿Puede deducirse al nivel de significación del (*a*) 0.01 y (*b*) 0.05 que el producto presenta las especificaciones requeridas?

7.80. En el Problema 7.79 ensayar la hipótesis de que el contenido medio de cobre sea más alto que el que marcan las especificaciones, mediante un nivel de significación del (*a*) 0.01 y (*b*) 0.05.

7.81. Un experto eficiente mantiene que introduciendo un nuevo tipo de maquinaria en un proceso de producción se puede disminuir sustancialmente el tiempo de producción. A causa de lo costoso del mantenimiento de estas máquinas resulta que a menos que el tiempo de producción se disminuya en un 8.0% la introducción de tales máquinas en el proceso resulta antieconómico. En seis pruebas de este tipo se obtuvo un decrecimiento en el tiempo de producción de 8.4% con una desviación típica de 0.32%. Utilizando un nivel de significación del (*a*) 0.01 y (*b*) 0.05 ensayar la hipótesis de que las máquinas deben ser introducidas.

7.82. Dos tipos de soluciones químicas, *A* y *B* fueron ensayadas para ver su pH (grado de acidez de la solución). Análisis de 6 muestras de *A* dieron un pH medio de 7.52 con una desviación típica de 0.024. Análisis de 5 muestras de *B* dieron un pH medio de 7.49 con una desviación típica de 0.032. Mediante un nivel de significación del 0.05, determinar si los dos tipos de soluciones tienen diferentes valores de pH.

7.83. En un examen de psicología de 12 estudiantes de una clase hubo una puntuación media de 78 con una desviación típica de 6, mientras que 15 estudiantes de otra clase tuvieron una puntuación media de 74 con una desviación típica de 8. Con un nivel de significación del 0.05 determinar si el primer grupo es superior al segundo.

ENSAYOS EN RELACION CON LA DISTRIBUCION CHI-CUADRADO

7.84. La desviación típica de resistencia a la rotura de ciertos cables producidos por una compañía viene dada por 240 libras. Después de introducir un cambio en el proceso de producción de estos cables, la resistencia a la rotura de una muestra de 8 cables dio una desviación típica de 300 libras. Investigar la significación del aparente incremento en la variabilidad, mediante un nivel de significación del (*a*) 0.05 y (*b*) 0.01.

7.85. La desviación típica de las temperaturas anuales de una ciudad en un período de 100 años fue de 16° Fahrenheit. Con la temperatura media del día 15 de cada mes, durante los 15 últimos años, la desviación típica de las temperaturas anuales fue calculada como de 10° Fahrenheit. Ensayar la hipótesis de que las temperaturas en esta ciudad presentan ahora menos variabilidad que en el pasado, al nivel de significación del (*a*) 0.05, (*b*) 0.01.

7.86. En el Problema 7.77 una muestra de 20 bombillas reveló una desviación típica en la duración de 150 horas. ¿Concluiría que esto no es común? **Explicar.**

ENSAYOS EN RELACION CON LA DISTRIBUCION F

7.87. Dos muestras consisten de 21 y 9 observaciones, tienen varianzas dadas por $s_1^2 = 16$ y $s_2^2 = 8$ respectivamente. Ensayar la hipótesis de que la primera varianza poblacional es mayor que la de la segunda a un nivel de significación del (*a*) 0.05, (*b*) 0.01.

7.88. Solucionar el Problema 7.87 si las dos muestras consisten de 60 y 120 observaciones respectivamente.

7.89. En el Problema 7.82, ¿podemos concluir que hay una diferencia significativa en la variabilidad de los valores del pH para las dos soluciones al nivel de significación del 0.01?

CURVAS CARACTERISTICAS DE OPERACION

7.90. En relación con el Problema 7.63, determinar la probabilidad de aceptar la hipótesis de que haya igual proporción de bolas rojas y azules, cuando la proporción real p de bolas rojas sea (*a*) 0.6, (*b*) 0.7, (*c*) 0.8, (*d*) 0.9, (*e*) 0.3.

7.91. Representar gráficamente los resultados del Problema 7.90 construyendo un gráfico de (*a*) β y p, (*b*) $(1-\beta)$ y p. Comparar estos gráficos con los del Problema 7.25 considerando la analogía de bolas rojas y azules con caras y sellos respectivamente.

7.92. (*a*) Solucionar los Problemas 7.26 y 7.27 si se ensayan 400 cuerdas. (*b*) ¿Qué conclusiones pueden sacarse de acuerdo con los riesgos de error del Tipo II cuando se incrementan los tamaños muestrales?

7.93. Construir (*a*) una curva OC y (*b*) una curva de potencia correspondientes al Problema 7.65. Comparar estas curvas con las del Problema 7.27.

GRAFICOS DE CONTROL DE CALIDAD

7.94. En el pasado, un cierto tipo de hilo producido por un fabricante tenía una resistencia media de rotura de 8.64 onzas y una desviación típica de 1.28 onzas. Para determinar si el producto está de acuerdo a estas normas, se toma cada 3 horas una muestra de 16 piezas de hilo y se determina la resistencia media. Hallar los límites de control del (*a*) 99.73% ó 3σ, (*b*) 99% sobre un gráfico de control de calidad y explicar sus aplicaciones.

7.95. Alrededor del 3% de las tuercas producidas por una compañía son defectuosas. Para mantener esta calidad de producción, se toma una muestra cada 4 horas de 200 de las tuercas producidas. Determinar los límites de control del (*a*) 99% y (*b*) 95% para el número de tuercas defectuosas de cada muestra. Adviértase que en este caso solo son necesarios los *límites de control superiores*.

AJUSTE DE DATOS A DISTRIBUCIONES TEORICAS

7.96. Ajustar una distribución binomial a los datos de la Tabla 7-24.

Tabla 7-24

x	0	1	2	3	4
f	30	62	46	10	2

7.97. Utilizar papel gráfico de probabilidad para determinar si los datos del Problema 5.98 pueden ser aproximados estrechamente a una distribución normal.

7.98. Ajustar una distribución normal a los datos del Problema 5.98.

7.99. Ajustar una distribución normal a los datos del Problema 5.100.

7.100. Ajustar una distribución de Poisson a los datos del Problema 7.96 y comparar con el ajuste obtenido utilizando la distribución binomial.

7.101. En 10 unidades del ejército prusiano y en un período de 20 años 1875-1894, el número de muertos por unidad y año debido a coz de caballo se dan en la Tabla 7-25. Ajustar una distribución de Poisson a los datos.

Tabla 7-25

x	0	1	2	3	4
f	109	65	22	3	1

LA PRUEBA CHI-CUADRADO

7.102. En 60 lanzamientos de una moneda se observaron 37 caras y 23 sellos. Ensayar la hipótesis de que la moneda está bien hecha utilizando un nivel de significación del (*a*) 0.05, (*b*) 0.01.

7.103. Solucionar el Problema 7.102 utilizando la corrección de Yates.

7.104. Durante un largo período de tiempo, las puntuaciones dadas por un grupo de profesores en un determinado curso dieron un promedio de 12% A, 18% B, 40% C, 18% D y 12% F. Un profesor nuevo da durante dos semestres 22 A, 34 B, 66 C, 16 D y 12 F. Determinar al nivel de significación de 0.05 si el profesor nuevo sigue las mismas normas de puntuación que los otros.

7.105. Se lanzaron tres monedas un total de 240 veces y se observó cada vez el número de caras obtenido. Los resultados aparecen en la Tabla 7-26 junto con las frecuencias esperadas bajo la hipótesis de que las monedas están bien hechas. Ensayar esta hipótesis al nivel de significación del 0.05.

Tabla 7-26

	0 caras	1 cara	2 caras	3 caras
Frecuencia observada	24	108	95	23
Frecuencia esperada	30	90	90	30

7.106. El número de libros sacados de una biblioteca pública durante una semana determinada viene dado en la Tabla 7-27. Ensayar la hipótesis de que el número de libros sacados no dependa del día de la semana, con un nivel de significación del (*a*) 0.05, (*b*) 0.01.

Tabla 7-27

	Lun.	Mar.	Mierc.	Juev.	Vier.
Número de libros sacados	135	108	120	114	146

7.107. Una urna contiene 6 bolas rojas y 3 blancas. Se extraen aleatoriamente dos bolas de la urna, se anota su color y se vuelven a la urna. Este proceso se repite un total de 120 veces y los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 7-28. (*a*) Determinar las frecuencias esperadas, (*b*) Determinar al nivel de significación del 0.05 si los resultados obtenidos son consistentes con los esperados.

Tabla 7-28

	0 rojo 2 blanco	1 rojo 1 blanco	2 rojo 0 blanco
Número de extracciones	6	53	61

7.108. Se eligieron aleatoriamente tuercas de la producción de cada una de 4 máquinas. El número de defectuosas fueron 2, 9, 10, 3. Determinar si existe entre las máquinas una diferencia significativa al nivel de significación del 0.05.

BONDAD DE AJUSTE

7.109. (*a*) Utilizar la prueba chi-cuadrado para determinar la bondad de ajuste de los datos del Problema 7.96. (*b*) ¿Es el ajuste "bastante bueno"? Emplear el nivel de significación del 0.05.

7.110. Mediante la prueba chi-cuadrado determinar la bondad de ajuste de los datos de (*a*) Problema 7.98. (*b*) Problema 7.99. Utilizar el nivel de significación del 0.05 y en cada caso determinar si el ajuste es "bastante bueno".

7.111. Mediante la prueba chi-cuadrado determinar la bondad de ajuste de los datos de (*a*) Problema 7.100, (*b*) Problema 7.101. ¿Es consistente el resultado de (*a*) con el del Problema 7.109?

TABLAS DE CONTINGENCIA

7.112. La Tabla 7-29 muestra el resultado de un experimento para investigar el efecto de vacunación de animales de laboratorio contra una determinada enfermedad. Mediante un nivel de significación del (*a*) 0.01 y (*b*) 0.05, ensayar la hipótesis de que no haya diferencia entre los grupos vacunados y no vacunados, es decir, la vacunación y esta enfermedad son independientes.

Tabla 7-29

	Se enfermaron	No se enfermaron
Vacunados	9	42
No Vacunados	17	28

7.113. Solucionar el Problema 7.112 introduciendo la corrección de Yates.

7.114. La Tabla 7-30 muestra el número de estudiantes de cada una de dos clases A y B que aprobó y suspendió un examen dado a ambos grupos. Mediante un nivel de significación del (*a*) 0.05 y (*b*) 0.01, ensayar la hipótesis de que no haya diferencia entre las dos clases. Hacer el problema con y sin la corrección de Yates.

Tabla 7-30

	Aprobados	Suspendidos
Clase A	72	17
Clase B	64	23

7.115. De un grupo de enfermos que se quejaban de que no dormían bien, a unos se les dio píldoras para dormir, mientras que a otros se les dio píldoras de azúcar (aunque todos ellos *creían* que sus píldoras eran para dormir). Posteriormente, se les preguntó si las pastillas habían surtido efecto o no. El resultado de sus respuestas se muestra en la Tabla 7-31. Suponiendo que todos los pacientes dijeron la verdad, ensayar la hipótesis de que no hay diferencia entre las píldoras de dormir y las de azúcar al nivel de significación del 0.05.

Tabla 7-31

	Durmieron bien	No durmieron bien
Tomaron píldoras para dormir	44	10
Tomaron píldoras de azúcar	81	35

Tabla 7-32

	A favor	En contra	Abstencionistas
Demócratas	85	78	37
Republicanos	118	61	25

7.116. Sobre una decisión de importancia nacional, los votos de los demócratas y republicanos registraron los resultados que se observan en la Tabla 7-32. Al nivel de significación del (*a*) 0.01 y (*b*) 0.05, ensayar la hipótesis de que no hay diferencia entre ambos partidos en lo que a esta decisión se refiere.

7.117. La Tabla 7-33 da la relación entre las notas de los estudiantes en matemáticas y física. Ensayar la hipótesis de que las notas de física sean independientes de las obtenidas en matemáticas, mediante un nivel de significación del (*a*) 0.05 y (*b*) 0.01.

7.118. Los resultados de una encuesta hecha para determinar si la edad de los conductores a partir de los 21 años, tiene su efecto en el número de accidentes de automóvil (incluyendo todo tipo de accidentes) se indican en la Tabla 7-34. A un nivel de significación de (*a*) 0.05 y (*b*) 0.01 ensayar la hipótesis de que el número de accidentes es independiente de la edad del conductor. ¿Qué posibles dificultades en las técnicas de muestreo como en otras consideraciones pueden afectar las conclusiones?

Tabla 7-33

		MATEMATICAS		
		Notas altas	Notas medias	Notas bajas
FISICA	Notas altas	56	71	12
	Notas medias	47	163	38
	Notas bajas	14	42	85

Tabla 7-34

		EDAD DEL CONDUCTOR				
		21–30	31–40	41–50	51–60	61–70
NUMERO DE ACCIDENTES	0	748	821	786	720	672
	1	74	60	51	66	50
	2	31	25	22	16	15
	Más de 2	9	10	6	5	7

7.119. (*a*) Demostrar que $\chi^2 = \Sigma (x_j^2/np_j) - n$ para toda tabla de contingencia, donde *n* es la frecuencia total de todas las casillas. (*b*) Con el resultado de (*a*) hacer el Problema 7.117.

7.120. Si n_i y n_j denotan, respectivamente, la suma de frecuencias en la fila *i* y en la columna *j* de una tabla de contingencia (*frecuencias marginales*), mostrar que la frecuencia esperada para la casilla perteneciente a la fila *i* y a la columna *j* es $n_i n_j/n$, donde *n* es la frecuencia total de todas las casillas.

7.121. Demostrar el resultado (*2*) del Problema 7.49.

7.122. Por similitud con las ideas desarrolladas para tablas de contingencia $h \times k$, discutir las tablas de contingencia $h \times k \times l$, señalando las posibles aplicaciones que pueden tener.

COEFICIENTE DE CONTINGENCIA

7.123. La Tabla 7-35 muestra la relación entre el color del pelo y los ojos de una muestra de 200 estudiantes. (*a*) Hallar el coeficiente de contingencia sin y con la corrección de Yates. (*b*) Comparar el resultado de (*a*) con el coeficiente máximo de contingencia.

Tabla 7-35

		COLOR DE PELO	
		Rubio	No rubio
COLOR DE OJOS	Azules	49	25
	No azules	30	96

7.124. Hallar el coeficiente de contingencia sin y con la corrección de Yates para los datos de (*a*) Problema 7.112 y (*b*) Problema 7.114.

7.125. Hallar el coeficiente de contingencia para los datos del Problema 7.117.

7.126. Demostrar que el coeficiente de contingencia máximo para una tabla 3×3 es $\sqrt{2/3} = 0.8165$ aproximadamente.

7.127. Demostrar que el coeficiente de contingencia máximo para una tabla $k \times k$ es $\sqrt{(k-1)/k}$.

PROBLEMAS DIVERSOS

7.128. Dos urnas *A* y *B* contienen igual número de bolas, pero se desconocen las proporciones de bolas rojas y blancas en cada una de las urnas; se toma una muestra de 50 bolas con remplazamiento de cada una de las urnas, dando la de A 32 bolas rojas y la de B 23 bolas rojas. Mediante un nivel de significación del 0.05 ensayar la hipótesis de que (*a*) las dos urnas tengan igual proporción de bolas rojas y (*b*) A tenga una proporción de bolas rojas superior a B.

7.129. Con referencia al Problema 7.54, hallar el menor número de preguntas que un estudiante debe contestar correctamente para que el instructor esté seguro al nivel de significación del (*a*) 0.05, (*b*) 0.01, (*c*) 0.001, (*d*) 0.06 de que el estudiante no está contestando al azar. Comentar los resultados.

7.130. Construir gráficos análogos a los del Problema 7.23 para el Problema 7.55.

7.131. Solucionar los Problemas 7.54-7.56 si el 7 en la regla de decisión del Problema 7.54 es ahora 8.

7.132. Una moneda se lanza 8 veces y se obtienen 7 caras. ¿Se puede rechazar la hipótesis de que la moneda está bien hecha al nivel de significación del (*a*) 0.05, (*b*) 0.10, (*c*) 0.01? Utilizar un ensayo bilateral.

7.133. Solucionar el Problema 7.132 empleando un ensayo unilateral.

7.134. Solucionar el Problema 7.132 si salen 6 caras.

7.135. Comentar cómo puede utilizarse la teoría del muestreo para investigar las proporciones de diferentes tipos de pescado presentes en un lago.

7.136. Explicar cómo podría definir *intervalos de confianza unilaterales* y dar una posible aplicación.

7.137. El porcentaje de calificaciones A dadas en un curso de física en una universidad determinada durante mucho tiempo fue 10%. Durante un período particular hubo 40 calificaciones A en un grupo de 300 estudiantes. Ensayar la significación de este resultado a un nivel de (*a*) 0.05, (*b*) 0.01.

7.138. Con una determinada marca A de gasolina, el número medio de millas por galón consumido en 5 automóviles análogos bajo idénticas condiciones fue de 22.6 con una desviación típica de 0.48. Con otra marca B, el número medio fue de 21.4 con una desviación típica de 0.54. Al nivel de significación del 0.05 investigar si la marca A realmente es mejor que B proporcionando mayor recorrido por galón.

7.139. En el Problema 7.138 ¿hay mayor variabilidad en millas por galón utilizando la marca B que utilizando la marca A? Explicar.

7.140. Demostrar que para la Tabla 7-36

$$\chi^2 = \frac{n}{n_A}\left(\frac{a_1^2}{n_1}+\frac{a_2^2}{n_2}+\frac{a_3^2}{n_3}\right) + \frac{n}{n_B}\left(\frac{b_1^2}{n_1}+\frac{b_2^2}{n_2}+\frac{b_3^2}{n_3}\right) - n$$

Tabla 7-36

	I	II	III	TOTALES
A	a_1	a_2	a_3	n_A
B	b_1	b_2	b_3	n_B
TOTALES	n_1	n_2	n_3	n

7.141. Generalizar el resultado del Problema 7.140.

7.142. Utilizar el resultado del Problema 7.140 para obtener el valor de χ^2 para el Problema 7.47.

Capítulo 8

Curva de ajuste, regresión y correlación

CURVA DE AJUSTE

Muy a menudo en la práctica se encuentra que existe una relación entre dos (o más) variables, y se desea expresar esta relación en forma matemática determinando una ecuación que conecte las variables.

Un primer paso es la colección de datos indicando los valores correspondientes de las variables. Por ejemplo, si x y y denotan la estatura y peso de un adulto; entonces una muestra de n individuos resultaría en las estaturas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y los pesos correspondientes $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

El paso siguiente es dibujar los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ en un sistema de coordenadas rectangulares. El conjunto resultante de puntos se llama a veces *diagrama de dispersión.*

Del diagrama de dispersión es posible frecuentemente visualizar una curva que se aproxime a los datos. Dicha curva se llama *curva de aproximación.* En la Fig. 8-1, por ejemplo, se observa que los datos se aproximan bien por una recta y decimos que existe una *relación lineal* entre las variables. Sin embargo, en la Fig. 8-2 aunque existe una relación entre las variables ésta no es una relación lineal y por esto la llamamos *relación no lineal.* En la Fig. 8-3 parece que no hay ninguna relación entre las variables.

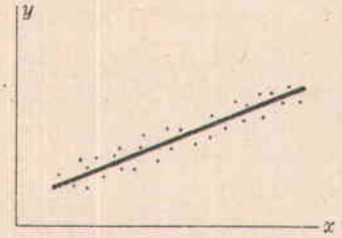


Fig. 8-1

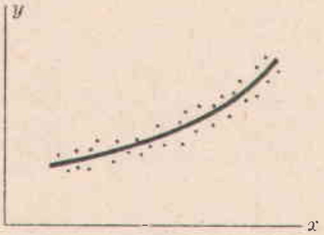


Fig. 8-2

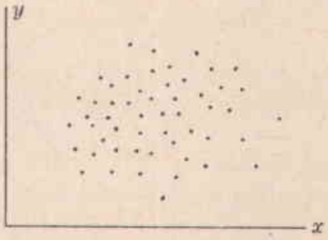


Fig. 8-3

El problema general de hallar ecuaciones de curvas de aproximación que se ajusten a conjuntos de datos dados se denomina *curva de ajuste.* En la práctica el tipo de ecuación se sugiere frecuentemente del diagrama de dispersión. Así para la Fig. 8-1 podríamos utilizar una recta

$$y = a + bx \tag{1}$$

mientras que para la Fig. 8-2 ensayaríamos una *curva cuadrática* o *parabólica*

$$y = a + bx + cx^2 \tag{2}$$

Algunas veces conviene dibujar los diagramas de dispersión en términos de *variables transformadas.* Así por ejemplo, si $\log y$ vs. x conduce a una recta trataríamos $\log y = a + bx$ como ecuación para la curva de aproximación.

REGRESION

Uno de los propósitos principales de la curva de ajuste es estimar una de las variables (la *variable dependiente*) de la otra (la *variable independiente*). El proceso de estimación se conoce como *regresión.* Si y se va a estimar a partir de x por medio de alguna ecuación la llamamos *ecuación de regresión de y sobre x* y a la curva correspondiente *curva de regresión de y sobre x.*

METODO DE MINIMOS CUADRADOS

Generalmente, más de una curva de un tipo dado parece ajustar un conjunto de datos. Para evitar el juicio individual en la construcción de rectas, parábolas, u otras curvas de aproximación, es necesario obtener una definición de la "mejor recta de ajuste", "mejor parábola de ajuste", etc.

Para motivar una posible definición considérese la Fig. 8-4 en la cual los puntos de datos son $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Para un valor dado de x, por ejemplo x_1, habrá una diferencia entre el valor de y_1 y el valor correspondiente determinado de la curva C. Denotamos esta diferencia por d_1, que algunas veces se conoce como *desviación, error,* o *residuo* y puede ser positivo, negativo o cero. Análogamente, correspondiendo a los valores $x_2, \ldots, x_n$ obtenemos las desviaciones $d_2, \ldots, d_n$.

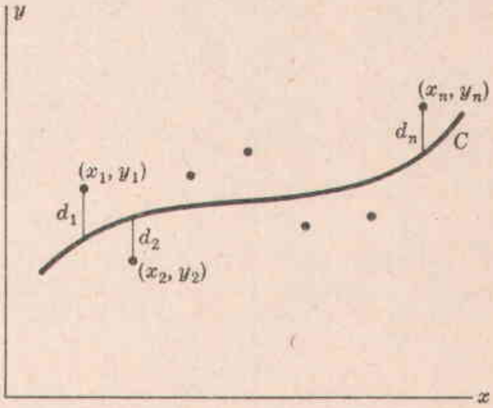


Fig. 8-4

Una medida de la "bondad del ajuste" de la curva C al conjunto de datos la suministra la cantidad $d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2$. Si la suma es pequeña el ajuste es bueno si es grande el ajuste es malo. Por tanto tomamos la siguiente

Definición. De todas las curvas de aproximación de un conjunto de puntos de datos dados, la curva que tenga la propiedad de que

$$d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2 = \text{un mínimo}$$

es la *mejor curva de ajuste.*

Una curva con esta propiedad se dice que ajusta los datos en el *sentido de mínimos cuadrados* y se llama *curva de regresión de mínimos cuadrados* o simplemente *curva de mínimos cuadrados.* Por tanto una recta con esta propiedad se llama *recta de mínimos cuadrados*, una parábola con esta propiedad se llama *parábola de mínimos cuadrados*, etc.

Se acostumbra a emplear la definición anterior cuando x es la variable independiente y y es la variable dependiente. Si x es la variable dependiente, la definición se modifica al considerar las desviaciones horizontales en cambio de las verticales, que se reduce a intercambiar los ejes x, y. Estas dos definiciones conducen en general a dos curvas de mínimos cuadrados diferentes. Al menos se especifique lo contrario consideraremos a y como la variable dependiente y a x como la independiente.

Es posible definir otra curva de mínimos cuadrados considerando distancias perpendiculares desde los puntos de datos a la curva en cambio de sus distancias verticales u horizontales. Sin embargo, esto no se emplea con frecuencia.

RECTA DE MINIMOS CUADRADOS

Empleando la definición anterior podemos demostrar (véase Problema 8.3) que la recta de mínimos cuadrados de aproximación al conjunto de datos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ tiene la ecuación

$$y = a + bx \tag{3}$$

donde las constantes a y b se determinan solucionando simultáneamente las ecuaciones

$$\begin{aligned} \sum y &= an + b\sum x \\ \sum xy &= a\sum x + b\sum x^2 \end{aligned} \tag{4}$$

que se conocen como las *ecuaciones normales* para la recta de mínimos cuadrados. Obsérvese que por brevedad hemos utilizado $\sum y$, $\sum xy$ en cambio de $\sum_{j=1}^{n} y_j$, $\sum_{j=1}^{n} x_j y_j$. Las ecuaciones normales, (*4*), se pueden recordar fácilmente si se observa que la primera ecuación se obtiene formalmente sumando ambos lados de (*3*), mientras que la segunda ecuación se obtiene primero multiplicando por x ambos lados de (*3*) y luego sumando. Lógicamente esta no es una derivación de las ecuaciones normales sino solamente un medio para recordarlas.

Los valores de a y b obtenidos de (*4*) están dados por

$$a = \frac{(\Sigma y)(\Sigma x^2) - (\Sigma x)(\Sigma xy)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \qquad b = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \tag{5}$$

El resultado para b en (*5*) también puede escribirse como

$$b = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2} \tag{6}$$

Aquí, como es común, una barra indica *media*, es decir, $\bar{x} = (\Sigma x)/n$. Al dividir ambos lados de la primera ecuación normal en (*4*) por n resulta

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \tag{7}$$

Por tanto, si se desea podemos hallar primero b de (*5*) o (*6*) y luego emplear (*7*) para hallar $a = \bar{y} - b\bar{x}$. Esto es equivalente a escribir la recta de mínimos cuadrados como

$$y - \bar{y} = b(x-\bar{x}) \qquad \text{ó} \qquad y - \bar{y} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}(x-\bar{x}) \tag{8}$$

El resultado (*8*) indica que la constante b, que es la pendiente de la recta (*3*), es la constante fundamental para determinar la recta. De (*8*) también se ve que la recta de mínimos cuadrados pasa a través del punto $(\bar{x}, \bar{y})$, denominado el *centroide* o *centro de gravedad* de los datos.

La pendiente b de la recta de regresión es independiente del origen de coordenadas. Esto quiere decir que si hacemos la transformación (comúnmente llamada *traslación de ejes*) dada por

$$x = x' + h \qquad y = y' + k \tag{9}$$

donde h y k son constantes arbitrarias, entonces b también está dada por

$$b = \frac{n\Sigma x'y' - (\Sigma x')(\Sigma y')}{n\Sigma x'^2 - (\Sigma x')^2} = \frac{\Sigma(x'-\overline{x'})(y'-\overline{y'})}{\Sigma(x'-\overline{x'})^2} \tag{10}$$

donde x, y han sido simplemente remplazadas por x', y' [por esta razón decimos que b es *invariante bajo la transformación* (*9*)]. Sin embargo, debe notarse que a, que determina el intercepto sobre el eje x, depende del origen (y por tanto no es invariante).

En el caso particular cuando $h = \bar{x}$, $k = \bar{y}$, (*10*) se simplifica a

$$b = \frac{\Sigma x'y'}{\Sigma x'^2} \tag{11}$$

Los resultados (*10*) u (*11*) son útiles frecuentemente en simplificar el trabajo involucrado en obtener la recta de mínimos cuadrados.

Las anotaciones anteriores también son válidas para la recta de regresión de x sobre y. Los resultados se obtienen simplemente intercambiando x y y. Así, por ejemplo, la recta de regresión de mínimos cuadrados de x sobre y es

$$x - \bar{x} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2}(y-\bar{y}) \tag{12}$$

Debe notarse que en general (*12*) no es la misma recta que (*8*).

RECTA DE MINIMOS CUADRADOS EN TERMINOS DE VARIANZAS Y COVARIANZAS MUESTRALES

Las varianzas y covarianzas muestrales de x, y están dadas por

$$s_x^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}, \quad s_y^2 = \frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n}, \quad s_{xy} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} \tag{13}$$

En términos de éstas, las rectas de regresión de mínimos cuadrados de y sobre x y de x sobre y pueden escribirse respectivamente como

$$y - \bar{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x-\bar{x}) \qquad x - \bar{x} = \frac{s_{xy}}{s_y^2}(y-\bar{y}) \tag{14}$$

Si formalmente definimos el *coeficiente de correlación muestral* por [comparar (*54*), página 82]

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \tag{15}$$

entonces (*14*) puede escribirse como

$$\frac{y-\bar{y}}{s_y} = r\left(\frac{x-\bar{x}}{s_x}\right) \qquad \frac{x-\bar{x}}{s_x} = r\left(\frac{y-\bar{y}}{s_y}\right) \tag{16}$$

En vista de que $(x-\bar{x})/s_x$ y $(y-\bar{y})/s_y$ son valores muestrales tipificados, los resultados en (*16*) proveen una forma muy simple de recordar las rectas de regresión. Es lógico que las dos rectas en (*16*) son diferentes al menos que $r = \pm 1$, en cuyo caso todos los puntos muestrales están sobre una recta [esto se demostrará en (*26*)] y hay una *correlación y regresión lineal perfecta.*

También es de interés notar que si las dos rectas de regresión (*16*) se escriben como $y = a + bx$, $x = c + dy$ respectivamente, entonces

$$bd = r^2 \tag{17}$$

Hasta ahora no hemos considerado la significación precisa del coeficiente de correlación sino solamente lo hemos definido en términos de las varianzas y covarianza. En la página 263 se dará la significación.

PARABOLA DE MINIMOS CUADRADOS

Las ideas anteriores se amplían fácilmente. Por ejemplo, la *parábola de mínimos cuadrados* que ajusta un conjunto de puntos muestrales viene dada por

$$y = a + bx + cx^2 \tag{18}$$

donde a, b, c se determinan de las *ecuaciones normales*

$$\begin{aligned} \sum y &= na + b\sum x + c\sum x^2 \\ \sum xy &= a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3 \\ \sum x^2y &= a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4 \end{aligned} \tag{19}$$

Estas ecuaciones se obtienen formalmente sumando ambos lados de (*18*) después de multiplicar sucesivamente por 1, x y x^2 respectivamente.

REGRESION MULTIPLE

Las ideas anteriores también pueden generalizarse a más variables. Por ejemplo, si creemos que hay una relación lineal entre una variable dependiente z y dos variables independientes x, y, entonces buscaríamos una ecuación conectando las variables que tenga la forma

$$z = a + bx + cy \tag{20}$$

Esta se denomina *ecuación de regresión de z sobre x, y*. Si x es la variable dependiente una ecuación semejante se llamaría *ecuación de regresión de x sobre y, z*.

Puesto que (*20*) representa un plano en un sistema de coordenadas rectangulares tridimensional se llama con frecuencia *plano de regresión*. Para hallar el plano de regresión de mínimos cuadrados determinamos a, b, c en (*20*) de modo que

$$\begin{aligned} \sum z &= na + b\sum x + c\sum y \\ \sum xz &= a\sum x + b\sum x^2 + c\sum xy \\ \sum yz &= a\sum y + b\sum xy + c\sum y^2 \end{aligned} \tag{21}$$

Estas ecuaciones, llamadas las *ecuaciones normales* correspondientes a (*20*), se obtienen como resultado de aplicar una definición análoga a la de la página 259. Adviértase que pueden obtenerse formalmente de (*20*) multiplicando por 1, x, y respectivamente y sumando.

Generalizaciones a más variables, incluyendo ecuaciones lineales y no lineales conducentes a *superficies de regresión* en espacios tridimensionales y superiores, se hacen fácilmente.

ERROR TIPICO DE LA ESTIMA

Si denotamos por y_{est} el valor estimado de y para un valor dado de x, obtenido de la curva de regresión de y sobre x, entonces una medida de la dispersión con respecto a la curva de regresión está suministrada por la cantidad

$$s_{y.x} = \sqrt{\frac{\Sigma(y - y_{\text{est}})^2}{n}} \tag{22}$$

que se llama el *error típico de la estima de y sobre x*. Puesto que $\Sigma(y - y_{\text{est}})^2 = \Sigma d^2$, como se empleó en la definición de la página 259, vemos que de todas las curvas de regresión posible, la curva de mínimos cuadrados tiene el más pequeño error típico de la estima.

En el caso de una recta de regresión $y_{\text{est}} = a + bx$, con a y b dados por (*4*), tenemos

$$s^2_{y.x} = \frac{\Sigma y^2 - a\Sigma y - b\Sigma xy}{n} \tag{23}$$

ó

$$s^2_{y.x} = \frac{\Sigma(y - \bar{y})^2 - b\,\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n} \tag{24}$$

También podemos expresar $s^2_{y.x}$ por la recta de mínimos cuadrados en términos de la varianza y del coeficiente de correlación como

$$s^2_{y.x} = s^2_y(1 - r^2) \tag{25}$$

de donde incidentalmente se deduce como corolario que $r^2 \leqq 1$, esto es $-1 \leqq r \leqq 1$.

El error típico de la estima tiene propiedades análogas a esas de la desviación típica. Por ejemplo, si construimos pares de rectas paralelas a la recta de regresión de y sobre x a distancias verticales $s_{y.x}$, $2s_{y.x}$ y $3s_{y.x}$ respectivamente, debemos hallar si n es lo suficientemente grande para que estén incluidos entre estas parejas de rectas alrededor del 68%, 95% y 97% de los puntos muestrales respectivamente. Véase Problema 8.23.

Así como hay una estima insesgada de la varianza muestral dada por $\hat{s}^2 = ns^2/(n-1)$ igualmente hay una estima insesgada del cuadrado del error típico de la estima. Este está dado por $\hat{s}^2_{y.x} = ns^2_{y.x}/(n-2)$. Por esta razón algunos estadísticos prefieren expresar (*22*) con $n - 2$ en cambio de n en el denominador.

Las anotaciones anteriores se modifican fácilmente para la recta de regresión de x sobre y (en cuyo caso el error típico de la estima se denota por $s_{x.y}$) o para regresión no lineal o múltiple.

COEFICIENTE DE CORRELACION LINEAL

Hasta el momento hemos definido el coeficiente de correlación formalmente por (*15*) pero no hemos examinado su significado. Al tratar de hacerlo notemos que de (*25*) y las definiciones de $s_{y.x}$ y s_y tenemos

$$r^2 = 1 - \frac{\Sigma(y - y_{\text{est}})^2}{\Sigma(y-\bar{y})^2} \tag{26}$$

Entonces podemos demostrar que (véase Problema 8.24)

$$\sum(y-\bar{y})^2 = \sum(y - y_{\text{est}})^2 + \sum(y_{\text{est}} - \bar{y})^2 \tag{27}$$

La cantidad a la izquierda de (*27*) se llama la *variación total.* La primera suma a la derecha de (*27*) se conoce como la *variación no explicada,* mientras que la segunda suma se llama *variación explicada.* Esta terminología surge debido a que las desviaciones $y - y_{\text{est}}$ se comportan en una manera aleatoria o impredecible en tanto que las desviaciones $y_{\text{est}} - \bar{y}$ se explican por la recta de regresión de mínimos cuadrados y así tienden a seguir un patrón definido. Se deduce de (*26*) y (*27*) que

$$r^2 = \frac{\Sigma(y_{\text{est}} - \bar{y})^2}{\Sigma(y-\bar{y})^2} = \frac{\text{variación explicada}}{\text{variación total}} \tag{28}$$

Por tanto r^2 puede interpretarse como la fracción de la variación total que se explica por la recta de regresión de mínimos cuadrados. En otras palabras, r mide *qué tan bien* la recta de regresión de mínimos cuadrados se ajusta a los datos muestrales. Si la variación total se explica *totalmente* por la recta de regresión, es decir, si $r^2 = 1$ ó $r = \pm 1$, decimos que hay una *correlación lineal perfecta* (y en tal caso también *regresión lineal perfecta*). De otra parte si la variación total no se puede explicar, entonces la variación explicada es cero y así $r = 0$. En la práctica la cantidad r^2, algunas veces llamada *coeficiente de determinación,* se encuentra entre 0 y 1.

El coeficiente de correlación puede calcularse de cualquiera de los resultados

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2}\sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}} \tag{29}$$

ó

$$r^2 = \frac{\text{variación explicada}}{\text{variación total}} = \frac{\Sigma(y_{\text{est}} - \bar{y})^2}{\Sigma(y-\bar{y})^2} \tag{30}$$

que para regresión lineal son equivalentes. La fórmula (*29*) se conoce como la *fórmula producto-momento* para correlación lineal.

Fórmulas equivalentes a las anteriores, que se utilizan en la práctica son

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{[n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2][n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2]}} \tag{31}$$

y

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)(\overline{y^2} - \bar{y}^2)}} \tag{32}$$

Si utilizamos la transformación (*9*), página 260, hallamos

$$r = \frac{n\Sigma x'y' - (\Sigma x')(\Sigma y')}{\sqrt{[n\Sigma x'^2 - (\Sigma x')^2][n\Sigma y'^2 - (\Sigma y')^2]}} \tag{33}$$

que indica que r es invariante bajo una traslación de ejes. En particular, si $h = \bar{x}$, $k = \bar{y}$, (*33*) se convierte en

$$r = \frac{\Sigma x'y'}{\sqrt{(\Sigma x'^2)(\Sigma y'^2)}} \tag{34}$$

que comúnmente se emplea en computación.

El coeficiente de correlación lineal puede ser positivo o negativo. Si r es positivo y tiende a *aumentar* con x (la pendiente de la recta de mínimos cuadrados es positiva) en tanto que si r es negativo y tiende a *disminuir* con x (la pendiente es negativa). El signo se toma en cuenta *automáticamente* si empleamos el resultado (*29*), (*31*), (*32*), (*33*) o (*34*). Sin embargo, si utilizamos (*30*) para obtener r debemos aplicar el signo apropiado.

COEFICIENTE DE CORRELACION GENERALIZADO

La definición (*29*) [o cualquiera de las formas equivalentes (*31*) a (*34*)] para el coeficiente de correlación incluye solamente valores muestrales x, y. En consecuencia da el mismo número para todas las formas de curvas de regresión y no es útil como medida de ajuste, excepto en el caso de regresión lineal, donde coincide con (*30*). Sin embargo, la última definición, esto es

$$r^2 = \frac{\text{variación explicada}}{\text{variación total}} = \frac{\Sigma(y_{\text{est}} - \bar{y})^2}{\Sigma(y - \bar{y})^2} \tag{35}$$

refleja la forma de la curva de regresión (vía y_{est}) y de este modo es apropiada como la definición de un *coeficiente de correlación generalizado r*. Utilizamos (*35*) para obtener coeficientes de correlación no lineales (que mide qué tan bien se ajusta una *curva de regresión no lineal* a los datos) o, por generalización apropiada, *coeficientes de correlación múltiple*. La conexión (*25*) entre el coeficiente de correlación y el error típico de la estima es válida para correlación no lineal.

Puesto que un coeficiente de correlación simplemente mide qué tan bien se ajusta una curva de regresión (o superficie) a los datos muestrales, es ilógico utilizar un coeficiente de correlación lineal donde los datos no son lineales. Sin embargo, suponga que se aplica (*29*) a datos no lineales y se obtiene un valor que es considerablemente menor que 1. Entonces la conclusión a extraerse no es que hay *poca correlación* (conclusión algunas veces alcanzada por aquellos laicos con los fundamentos de la teoría de correlación) sino que hay *poca* correlación *lineal*. En efecto, puede existir una *gran* correlación no lineal.

CORRELACION GRADUAL

En cambio de utilizar valores muestrales precisos, o cuando la precisión no puede obtenerse, los datos pueden clasificarse en orden de tamaño, importancia, etc., empleando los números 1, 2, . . . n. Si dos conjuntos correspondientes de valores x, y se clasifican de tal forma, el *coeficiente de correlación gradual*, denotado por r_{grad} o sencillamente r, está dado por

$$r_{\text{grad}} = 1 - \frac{6\,\Sigma d^2}{n(n^2-1)} \tag{36}$$

donde d = diferencias entre las clasificaciones de los correspondientes x, y

n = número de pares de valores (x, y) en los datos

La fórmula (*36*), es derivada en el Problema 8.36, se denomina *fórmula de Spearman para la correlación gradual.*

INTERPRETACION PROBABILISTICA DE LA REGRESION

Un diagrama de dispersión, como el de la Fig. 8-1, es una representación gráfica de los puntos de datos para una muestra particular. Al escoger una muestra diferente, o aumentar la original, un diagrama de dispersión algo diferente se obtendría generalmente. Cada diagrama de dispersión resultaría en una recta o curva de regresión diferente, aunque esperamos que las diferencias no sean significantes si las muestras se extraen de la misma población.

Del concepto de curva de ajuste en muestras pasamos al de curva de ajuste para la población de donde se tomaron las muestras. La dispersión de puntos alrededor de una recta o curva de regresión indican que para un valor particular de x hay realmente varios valores de y *distribuidos* alrededor de la recta o curva Esta idea de distribución nos conduce naturalmente a la realización de que hay una conexión entre curva de ajuste y probabilidad.

La conexión se implementa introduciendo las variables aleatorias X, Y que toman los diferentes valores muestrales x, y respectivamente. Por ejemplo X, Y pueden representar las estaturas y pesos de adultos en una población de la cual se extraen las muestras. Entonces se supone que X, Y tienen una función de probabilidad conjunta o función de densidad, $f(x, y)$, según si se consideran discretas o continuas.

Dada la función de densidad conjunta o función de probabilidad, $f(x, y)$, de dos variables aleatorias X, Y, es lógico de las anotaciones anteriores preguntar si hay una función $g(X)$ tàl que

$$E\{[Y - g(X)]^2\} = \text{un mínimo} \tag{37}$$

Una curva con ecuación $y = g(x)$ con la propiedad (*37*) se llama *curva de regresión de mínimos cuadrados de Y sobre X*. Tenemos el teorema siguiente:

Teorema 8-1: Si X, Y son variables aleatorias con función de densidad conjunta o función de probabilidad $f(x, y)$, entonces existe una curva de regresión de mínimos cuadrados de Y sobre X, con la propiedad (*37*), dada por

$$y = g(x) = E(Y \mid X = x) \tag{38}$$

siempre y cuando X, Y tengan una varianza finita.

Nótese que $E(Y \mid X = x)$ es la esperanza condicional de Y dada $X = x$, como se define en la página 83.

Anotaciones análogas pueden hacerse para una *curva de regresión de mínimos cuadrados de X sobre Y*. En tal caso (*37*) se remplaza por

$$E\{[X - h(Y)]^2\} = \text{un mínimo}$$

y (*38*) se remplaza por $x = h(y) = E(X|Y = y)$. Las dos curvas de regresión $y = g(x)$, $x = h(y)$ son diferentes en general.

Un caso interesante se presenta cuando la distribución conjunta es la distribución normal bidimensional dada por (*49*), página 118. Entonces tenemos el teorema siguiente:

Teorema 8-2: Si X, Y son variables aleatorias con la distribución normal bidimensional, entonces la curva de regresión de mínimos cuadrados de Y sobre X es una *recta de regresión* dada por

$$\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y} = \rho\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \tag{39}$$

donde

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{40}$$

representa el coeficiente de correlación poblacional.

También podemos escribir (*39*) como

$$y - \mu_Y = \beta(x - \mu_X) \tag{41}$$

donde

$$\beta = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} \tag{42}$$

Anotaciones semejantes pueden hacerse para la curva de regresión de mínimos cuadrados de X sobre Y, que también resulta ser una recta [dada por (*39*) con X, Y; x, y intercambiadas]. Estos resultados deben compararse con los correspondientes en la página 261.

En caso de que no se conozca $f(x, y)$ podemos aún emplear el criterio (*37*) para obtener curvas de regresión de aproximación para la población. Por ejemplo, si suponemos que $g(x) = \alpha + \beta x$ obtenemos la recta de regresión de mínimos cuadrados (*39*), donde α y β vienen dadas en términos de los parámetros (desconocidos) μ_X, μ_Y, σ_X, σ_Y, ρ. Análogamente si $g(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ podemos obtener una parábola de regresión de mínimos cuadrados, etc. Véase Problema 8.39.

En general todas las anotaciones de las páginas 259 a 264 para muestras se amplían fácilmente a la población. Por ejemplo, el error típico de la estima en el caso de la población viene dado en términos de la varianza y el coeficiente de correlación por

$$\sigma_{Y.X}^2 = \sigma_Y^2(1 - \rho^2) \tag{43}$$

que debe compararse con (*25*), página 262.

INTERPRETACION PROBABILISTICA DE LA CORRELACION

De las anotaciones anteriores es lógico que un coeficiente de correlación poblacional debe dar una medida de qué tan bien una curva de regresión poblacional dada se ajusta a los datos poblacionales. Todas las anotaciones previamente enunciadas para la correlación en una muestra se aplican a la población. Por ejemplo, si $g(x)$ se determina por (*37*), entonces

$$E[(Y - \bar{Y})^2] = E[(Y - Y_{\text{est}})^2] + E[(Y_{\text{est}} - \bar{Y})^2] \tag{44}$$

donde $Y_{\text{est}} = g(X)$ y $\bar{Y} = E(Y)$. Las tres cantidades en (*44*) se llaman las *variaciones total, no explicada* y *explicada* respectivamente. Esto conduce a la definición del *coeficiente de correlación poblacional* ρ, donde

$$\rho^2 = \frac{\text{variación explicada}}{\text{variación total}} = \frac{E[(Y_{\text{est}} - \bar{Y})^2]}{E[(Y - \bar{Y})^2]} \tag{45}$$

Para el caso lineal, (*45*) se reduce a (*40*). Resultados análogos a (*31*)—(*34*) pueden escribirse para el caso de una población y regresión lineal. El resultado (*45*) también se emplea para definir ρ en el caso no lineal.

TEORIA MUESTRAL DE LA REGRESION

La ecuación de regresión $y = a + bx$ se obtiene basados en los datos muestrales. Con frecuencia estamos interesados en la correspondiente ecuación de regresión $y = \alpha + \beta x$ para la población de la cual se extrajo la muestra. Los siguientes son algunos ensayos relacionados con una población normal. Para conservar una notación sencilla seguimos la convención común de indicar valores de las variables aleatorias muestrales en cambio de las variables aleatorias en sí mismas.

1. Ensayo de la hipótesis $\beta = b$.

Para ensayar la hipótesis de que el coeficiente de regresión β es igual a algún valor específico b utilizamos el hecho de que el estadístico

$$t = \frac{\beta - b}{s_{y.x}/s_x}\sqrt{n-2} \tag{46}$$

tiene una distribución de Student con $n - 2$ grados de libertad. Esto también puede utilizarse para hallar intervalos de confianza para coeficientes de regresión poblacionales de los valores muestrales. Véanse Problemas 8.43 y 8.44.

2. **Ensayo de hipótesis para valores predichos.**

Denótese por y_0 el valor predicho de y correspondiente a $x = x_0$ estimado de la ecuación de regresión muestral, es decir, $y_0 = a + bx_0$. Denótese por y_p el valor predicho de y correspondiente a $x = x_0$ para la población. Entonces el estadístico

$$t = \frac{(y_0 - y_p)\sqrt{n-2}}{s_{y.x}\sqrt{n + 1 + [n(x_0 - \bar{x})^2/s_x^2]}} \tag{47}$$

tiene una distribución de Student con $n - 2$ grados de libertad. De esta ecuación se pueden hallar límites de confianza para valores de población predichos. Véase Problema 8.45.

3. **Ensayo de hipótesis para valores medios predichos.**

Denótese por y_0 el valor predicho de y correspondiente a $x = x_0$ estimado de la ecuación de regresión muestral, es decir, $y_0 = a + bx_0$. Denótese por $\bar{y}_p$ el *valor medio* predicho de y correspondiente a $x = x_0$ para la población [esto es, $\bar{y}_p = E(Y|X = x_0)$]. Entonces el estadístico

$$t = \frac{(y_0 - \bar{y}_p)\sqrt{n-2}}{s_{y.x}\sqrt{1 + [(x_0 - \bar{x})^2/s_x^2]}} \tag{48}$$

tiene una distribución de Student con $n - 2$ grados de libertad. De aquí pueden hallarse los límites de confianza para valores medios poblacionales predichos. Véase Problema 8.46.

TEORIA MUESTRAL DE CORRELACION

Con frecuencia tenemos que estimar el coeficiente de correlación poblacional ρ a partir del coeficiente de correlación muestral r o ensayar la hipótesis relacionando a ρ. Para este propósito debemos conocer la distribución muestral de r. En el caso de que $\rho = 0$ esta distribución es simétrica y se puede utilizar un estadístico con distribución de Student. Para $\rho \neq 0$ la distribución es sesgada. En ese caso una transformación debida a Fisher produce un estadístico que aproximadamente tiene una distribución normal. Los ensayos siguientes resumen los procedimientos involucrados.

1. **Ensayo de la hipótesis $\rho = 0$.**

Aquí utilizamos el hecho de que el estadístico

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \tag{49}$$

tiene distribución de Student con $n - 2$ grados de libertad. Véanse Problemas 8.47 y 8.48.

2. **Ensayo de la hipótesis $\rho \neq 0$.**

Aquí utilizamos el hecho de que el estadístico

$$Z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = 1.1513 \log_{10}\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \tag{50}$$

aproximadamente tiene una distribución normal con media y desviación típica dadas por

$$\mu_Z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right) = 1.1513 \log_{10}\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right), \qquad \sigma_Z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} \tag{51}$$

Estos hechos pueden también utilizarse para hallar los límites de confianza para los coeficientes de correlación. Véanse Problemas 8.49 y 8.50. La transformación (*50*) se llama *transformación Z de Fisher*.

3. Significado de una diferencia entre coeficientes de correlación.

Para determinar si dos coeficientes de correlación r_1 y r_2 extraídos de muestras de tamaños n_1 y n_2 respectivamente difieren apreciablemente entre sí, calculamos Z_1 y Z_2 correspondientes a r_1 y r_2 utilizando (*50*). Luego utilizamos el hecho de que el estadístico

$$z = \frac{Z_1 - Z_2 - \mu_{Z_1-Z_2}}{\sigma_{Z_1-Z_2}} \tag{52}$$

donde

$$\mu_{Z_1-Z_2} = \mu_{Z_1} - \mu_{Z_2}, \qquad \sigma_{Z_1-Z_2} = \sqrt{\sigma^2_{Z_1} + \sigma^2_{Z_2}} = \sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}} \tag{53}$$

se distribuye normalmente. Véase Problema 8.51.

CORRELACION Y DEPENDENCIA

Si dos variables aleatorias X, Y tienen un coeficiente de correlación diferente a cero, sabemos (Teorema 3-15, página 82) que son *dependientes* en el sentido de probabilidad (esto es, su distribución conjunta no se factoriza en sus distribuciones marginales). Además, cuando $\rho \neq 0$, podemos utilizar una ecuación de la forma de (*39*) para *predecir* el valor de Y a partir del valor de X.

Es importante aclarar que "correlación" y "dependencia" en el sentido anterior no necesariamente implica una independencia causal directa de X y Y. Esto se demuestra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 8.1. Sean X, Y variables aleatorias que representan estaturas y pesos de individuos. Aquí hay una independencia directa entre X, Y.

EJEMPLO 8.2. Si X representa los salarios anuales de los profesores en tanto que Y representa la cantidad de crímenes, el coeficiente de correlación puede ser diferente de cero y podríamos hallar una ecuación de regresión prediciendo una variable de la otra. Pero difícilmente diríamos que hay interdependencia directa entre X y Y.

Problemas resueltos

RECTA DE MINIMOS CUADROS

8.1. Una recta pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Demostrar que la ecuación de la recta es

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

La ecuación de una recta es $y = a + bx$. Entonces ya que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son puntos sobre la recta tenemos

$$y_1 = a + bx_1, \qquad y_2 = a + bx_2$$

Por tanto

(*1*)

$$y - y_1 = (a + bx) - (a + bx_1) = b(x - x_1)$$

(*2*)

$$y_2 - y_1 = (a + bx_2) - (a + bx_1) = b(x_2 - x_1)$$

Obteniendo que $b = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ de (*2*) y sustituyendo en (*1*), el resultado pedido se deduce.

La gráfica de la recta PQ se muestra en la Fig. 8-5. La constante $b = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ es la pendiente de la recta.

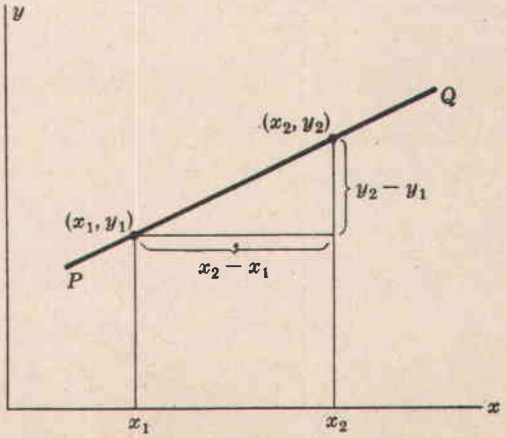


Fig. 8-5

8.2. (*a*) Construir una recta que se aproxime a los datos de la Tabla 8-1. (*b*) Hallar una ecuación para esta recta.

Tabla 8-1

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

(*a*) Dibujar los puntos (1, 1), (3, 2), (4, 4), (6, 4), (8, 5), (9, 7), (11, 8) y (14, 9) sobre un sistema de coordenadas rectangulares como se muestra en la Fig. 8-6.

Una recta que se aproxime a los datos se dibuja a *mano alzada* en la figura. Para un método que elimine la necesidad de juicio individual, véase Problema 8.4 que emplea el método de mínimos cuadrados.

(*b*) Para obtener la ecuación de la recta construida en (*a*), escójanse dos puntos cualesquiera sobre la recta, tales como P y Q, por ejemplo. Las coordenadas de estos puntos tomados de la gráfica son aproximadamente (0,1) y (12, 7.5). Entonces el Problema 8.1

$$y-1 \;=\; \frac{7.5-1}{12-0}(x-0)$$

ó $y-1=0.542\,x$ ó $y=1+0.542\,x$.

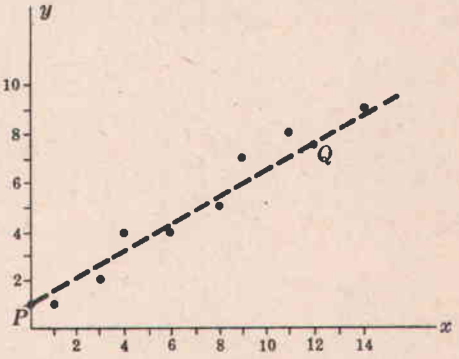


Fig. 8-6

8.3. Derivar las ecuaciones normales (*4*), página 260, para la recta de mínimos cuadrados.

Refiriéndonos a la Fig. 8-7. Los valores de y sobre la recta de mínimos cuadrados correspondientes a x_1, $x_2, \ldots, x_n$ son

$$a+bx_1,\;\; a+bx_2,\;\; \ldots,\;\; a+bx_n$$

Las desviaciones verticales correspondientes son

$$d_1 \;=\; a+bx_1-y_1,\quad d_2 \;=\; a+bx_2-y_2,\quad \ldots,\quad d_n \;=\; a+bx_n-y_n$$

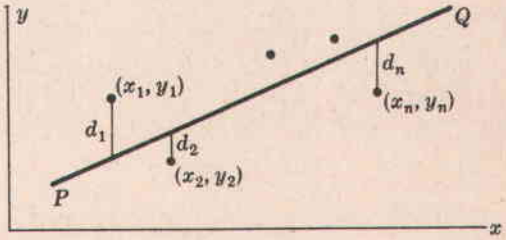


Fig. 8-7

Entonces la suma de los cuadrados de las desviaciones es

$$d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2 \;=\; (a+bx_1-y_1)^2+(a+bx_2-y_2)^2+\cdots+(a+bx_n-y_n)^2$$

ó

$$\sum d^2 \;=\; \sum(a+bx-y)^2$$

Esto es una función de a y b, es decir, $F(a,b)=\Sigma(a+bx-y)^2$. Una condición necesaria para que esto sea un mínimo (o un máximo) es que $\partial F/\partial a=0$, $\partial F/\partial b=0$. Ya que

$$\frac{\partial F}{\partial a} \;=\; \sum\frac{\partial}{\partial a}(a+bx-y)^2 \;=\; \sum 2(a+bx-y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} \;=\; \sum\frac{\partial}{\partial b}(a+bx-y)^2 \;=\; \sum 2x(a+bx-y)$$

obtenemos

$$\sum(a+bx-y) \;=\; 0 \qquad\qquad \sum x(a+bx-y) \;=\; 0$$

es decir,

$$\sum y \;=\; an+b\sum x \qquad\qquad \sum xy \;=\; a\sum x+b\sum x^2$$

como se pedía. Puede demostrarse que estas realmente resultan en un mínimo.

8.4. Ajustar una recta de mínimos cuadrados a los datos del Problema 8.2 utilizando a (*a*) x como variable independiente, (*b*) x como variable dependiente.

(*a*) La ecuación de la recta es $y = a + bx$. Las ecuaciones normales son

$$\sum y \;=\; an + b\sum x$$

$$\sum xy \;=\; a\sum x + b\sum x^2$$

El trabajo involucrado en el cálculo de las sumas puede ordenarse como se indica en la Tabla 8-2. Aunque la última columna no se necesita para esta parte del problema, se ha agregado a la tabla para emplearla en la parte (*b*).

Tabla 8-2

x	y	x^2	xy	y^2
1	1	1	1	1
3	2	9	6	4
4	4	16	16	16
6	4	36	24	16
8	5	64	40	25
9	7	81	63	49
11	8	121	88	64
14	9	196	126	81
$\Sigma x = 56$	$\Sigma y = 40$	$\Sigma x^2 = 524$	$\Sigma xy = 364$	$\Sigma y^2 = 256$

Puesto que hay 8 pares de valores de x, y, $n = 8$ y las ecuaciones normales se convierten a

$$8a + 56b \;=\; 40$$

$$56a + 524b \;=\; 364$$

Resolviendo simultáneamente $a = \frac{6}{11}$ ó 0.545, $b = \frac{7}{11}$ ó 0.636; y la recta de mínimos cuadrados pedida es $y = \frac{6}{11} + \frac{7}{11}x$ ó $y = 0.545 + 0.636\,x$. Nótese que esta no es la recta obtenida en el Problema 8.2 utilizando el método a mano alzada.

Otro método.

$$a \;=\; \frac{(\Sigma y)(\Sigma x^2) - (\Sigma x)(\Sigma xy)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \;=\; \frac{(40)(524) - (56)(364)}{(8)(524) - (56)^2} \;=\; \frac{6}{11} \text{ ó } 0.545$$

$$b \;=\; \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \;=\; \frac{(8)(364) - (56)(40)}{(8)(524) - (56)^2} \;=\; \frac{7}{11} \text{ ó } 0.636$$

(*b*) Si se considera a x como la variable dependiente y a y como la variable independiente, la ecuación de la la recta de mínimos cuadrados es $x = c + dy$, las ecuaciones normales son

$$\sum x \;=\; cn + d\sum y$$

$$\sum xy \;=\; c\sum y + d\sum y^2$$

Entonces utilizando la Tabla 8-2, las ecuaciones normales se convierten en

$$8c + 40d \;=\; 56$$

$$40c + 256d \;=\; 364$$

de donde $c = -\frac{1}{2}$ ó -0.50, $d = \frac{3}{2}$ ó 1.50.

Estos valores también pueden obtenerse de

$$c \;=\; \frac{(\Sigma x)(\Sigma y^2) - (\Sigma y)(\Sigma xy)}{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2} \;=\; \frac{(56)(256) - (40)(364)}{(8)(256) - (40)^2} \;=\; -0.50$$

$$d \;=\; \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2} \;=\; \frac{(8)(364) - (56)(40)}{(8)(256) - (40)^2} \;=\; 1.50$$

Por tanto la ecuación pedida de la recta de mínimos cuadrados es $x = 0.50 + 1.50\,y$.

Nótese que al solucionar esta ecuación para y obtenemos $y = 0.333 + 0.667\,x$, que no es la misma recta obtenida en la parte (*a*).

8.5. Representar gráficamente las dos rectas obtenidas en el Problema 8.4.

Las gráficas de las dos rectas, $y = 0.545 + 0.636x$, $x = -0.50 + 1.50y$, se indican en la Fig. 8.8. Nótese que las dos rectas en este caso prácticamente coinciden, lo cual es una indicación de que los datos están muy bien descritos por una relación lineal.

La recta obtenida en la parte (*a*) se llama la *recta de regresión de y sobre x* y se utiliza para estimar y para valores dados de x. La recta obtenida en la parte (*b*) se llama la *recta de regresión de x sobre y*, se utiliza para estimar x para valores dados de y.

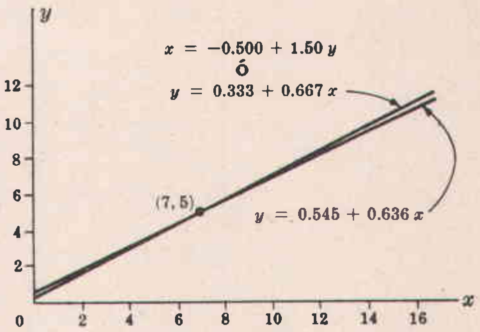


Fig. 8-8

8.6. (*a*) Demostrar que las dos rectas de mínimos cuadrados obtenidas en el Problema 8.4 intersectan en el punto $(\bar{x}, \bar{y})$. (*b*) Estimar el valor de y cuando $x = 12$. (*c*) Estimar el valor de x cuando $y = 3$.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{56}{8} = 7, \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{40}{8} = 5$$

Luego el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, llamado el *centroide*, es (7,5).

(*a*) El punto (7, 5) se encuentra en la recta $y = 0.545 + 0.636\,x$ o, más exactamente, $y = \frac{6}{11} + \frac{7}{11}x$, puesto que $5 = \frac{6}{11} + \frac{7}{11}(7)$. El punto (7, 5) se encuentra sobre la recta $x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y$, puesto que $7 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(5)$.

Otro método.

Las ecuaciones de las dos rectas son $y = \frac{6}{11} + \frac{7}{11}x$ y $x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y$. Resolviendo simultáneamente, hallamos $x = 7$, $y = 5$. Por tanto las rectas se interceptan en el punto (7,5).

(*b*) Al remplazar $x = 12$ en la recta de regresión de y sobre x, $y = 0.545 + 0.636(12) = 8.2$.

(*c*) Al remplazar $y = 3$ en la recta de regresión de x sobre y, $x = -0.50 + 1.50(3) = 4.0$.

8.7. Demostrar que una recta de mínimos cuadrados siempre pasa por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$.

Caso 1. x es la variable independiente.

La ecuación de la recta de mínimos cuadrados es (*1*) $y = a + bx$

Una ecuación normal para la recta de mínimos cuadrados es (*2*) $\Sigma y = an + b\Sigma x$

Al dividir ambos lados de (*2*) por n da (*3*) $\bar{y} = a + b\bar{x}$

Restando (*3*) de (*1*), la recta de mínimos cuadrados puede escribirse como

(*4*) $$y - \bar{y} = b(x - \bar{x})$$

que muestra que la recta pasa por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$.

Caso 2. y es la variable independiente.

Procediendo como en el caso 1 intercambiando x, y; remplazando las constantes a, b por c, d respectivamente, hallamos que la recta de mínimos cuadrados puede escribirse como

(*5*) $$x - \bar{x} = d(y - \bar{y})$$

que indica que la recta pasa por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$.

Nótese que en general, las rectas (*4*) y (*5*) no coinciden, pero se intersectan en $(\bar{x}, \bar{y})$.

8.8. Demostrar que la recta de regresión de mínimos cuadrados de y sobre x puede escribirse en la forma (*8*), página 260.

Tenemos de (*4*), Problema 8.7, $y - \bar{y} = b(x - \bar{x})$. De la segunda ecuación en (*5*), página 260, tenemos

$$b = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \tag{1}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\Sigma(x-\bar{x})^2 &= \Sigma(x^2 - 2\bar{x}x + \bar{x}^2)\\ &= \Sigma x^2 - 2\bar{x}\Sigma x + \Sigma\bar{x}^2\\ &= \Sigma x^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2\\ &= \Sigma x^2 - n\bar{x}^2\\ &= \Sigma x^2 - \frac{1}{n}(\Sigma x)^2\\ &= \frac{1}{n}[n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2]\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) &= \Sigma(xy - \bar{x}y - \bar{y}x + \bar{x}\bar{y})\\ &= \Sigma xy - \bar{x}\Sigma y - \bar{y}\Sigma x + \Sigma\bar{x}\bar{y}\\ &= \Sigma xy - n\bar{x}\bar{y} - n\bar{y}\bar{x} + n\bar{x}\bar{y}\\ &= \Sigma xy - n\bar{x}\bar{y}\\ &= \Sigma xy - \frac{(\Sigma x)(\Sigma y)}{n}\\ &= \frac{1}{n}[n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)]\end{aligned}$$

Por tanto (*1*) se convierte en

$$b = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$$

de donde se obtiene el resultado (*8*). La demostración de (*12*), página 261, se sigue intercambiando x, y.

8.9. Sean $x = x' + h$, $y = y' + k$, donde h y k son constantes. Demostrar que

$$b = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} = \frac{n\Sigma x'y' - (\Sigma x')(\Sigma y')}{n\Sigma x'^2 - (\Sigma x')^2}$$

Del Problema 8.8 tenemos

$$b = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2}$$

Entonces si $x = x' + h$, $y = y' + k$, tenemos

$$\bar{x} = \overline{x'} + h, \quad \bar{y} = \overline{y'} + k$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2} &= \frac{\Sigma(x'-\overline{x'})(y'-\overline{y'})}{\Sigma(x'-\overline{x'})^2}\\ &= \frac{n\Sigma x'y' - (\Sigma x')(\Sigma y')}{n\Sigma x'^2 - (\Sigma x')^2}\end{aligned}$$

El resultado es útil para desarrollar un camino corto para obtener rectas de mínimos cuadrados al restar constantes apropiadas de los valores dados de x, y (véase Problema 8.12).

8.10 Si en el Problema 8.9, $h = \bar{x}$, $k = \bar{y}$, demostrar que

$$b = \frac{\Sigma x'y'}{\Sigma x'^2}$$

Se deduce inmediatamente del Problema 8.9 ya que

$$\Sigma x' = \Sigma(x - \bar{x}) = \Sigma x - n\bar{x} = 0$$

y análogamente $\Sigma y' = 0$.

8-11 La Tabla 8-3 muestra las respectivas estaturas x, y de una muestra de 12 padres y sus hijos mayores. (*a*) Construir un diagrama de dispersión. (*b*) Hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados de y sobre x. (*c*) Hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados de x sobre y.

Tabla 8-3

Estatura x del padre (pulgadas)	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
Estatura y del hijo (pulgadas)	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

(*a*) El diagrama de dispersión se obtiene dibujando los puntos (x, y) sobre un sistema de coordenadas rectangulares como se muestra en la Fig. 8-9.

(*b*) La recta de regresión de y sobre x está dada por $y = a + bx$, donde a y b se obtienen resolviendo las ecuaciones normales.

$$\Sigma y \cdot = an + b\Sigma x$$
$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$$

Las sumas se muestran en la Tabla 8-4, de modo que las ecuaciones normales se convierten en

$$12a + 800b = 811$$
$$800a + 53{,}418b = 54{,}107$$

de donde hallamos $a = 35.82$ y $b = 0.476$, de modo que $y = 35.82 + 0.476x$. La gráfica de esta ecuación se muestra en la Fig. 8-9.

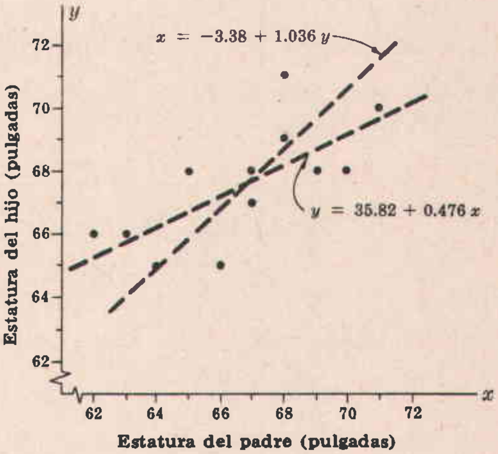


Fig. 8-9

Tabla 8-4

x	y	x^2	xy	y^2
65	68	4225	4420	4624
63	66	3969	4158	4356
67	68	4489	4556	4624
64	65	4096	4160	4225
68	69	4624	4692	4761
62	66	3844	4092	4356
70	68	4900	4760	4624
66	65	4356	4290	4225
68	71	4624	4828	5041
67	67	4489	4489	4489
69	68	4761	4692	4624
71	70	5041	4970	4900
$\Sigma x = 800$	$\Sigma y = 811$	$\Sigma x^2 = 53{,}418$	$\Sigma xy = 54{,}107$	$\Sigma y^2 = 54{,}849$

Otro método.

$$a = \frac{(\Sigma y)(\Sigma x^2) - (\Sigma x)(\Sigma xy)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} = 35.82, \qquad b = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} = 0.476$$

(*c*) La recta de regresión de x sobre y viene dada por $x = c + dy$, donde c y d se obtienen solucionando las ecuaciones normales

$$\Sigma x = cn + d\Sigma y$$

$$\Sigma xy = c\Sigma y + d\Sigma y^2$$

Utilizando las sumas en la Tabla 8-4, se convierten en

$$12c + 811d = 800$$

$$811c + 54{,}849d = 54{,}107$$

de las cuales hallamos $c = -3.38$, $d = 1.036$, así que $x = -3.38 + 1.036y$. La gráfica de esta ecuación se muestra en la Fig. 8-9.

Otro método.

$$c = \frac{(\Sigma x)(\Sigma y^2) - (\Sigma y)(\Sigma xy)}{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2} = -3.38, \qquad d = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma y)(\Sigma x)}{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2} = 1.036$$

8.12. Solucionar el Problema 8.11 utilizando el método del Problema 8.9.

Réstese un valor apropiado, por ejemplo 68, de x, y (los números restados de x y de y podrían ser diferentes). Esto nos conduce a la Tabla 8-5.

Tabla 8-5

x'	y'	x'^2	$x'y'$	y'^2
−3	0	9	0	0
−5	−2	25	10	4
−1	0	1	0	0
−4	−3	16	12	9
0	1	0	0	1
−6	−2	36	12	4
2	0	4	0	0
−2	−3	4	6	9
0	3	0	0	9
−1	−1	1	1	1
1	0	1	0	0
3	2	9	6	4
$\Sigma x' = -16$	$\Sigma y' = -5$	$\Sigma x'^2 = 106$	$\Sigma x'y' = 47$	$\Sigma y'^2 = 41$

De la tabla hallamos

$$b = \frac{n\Sigma x'y' - (\Sigma x')(\Sigma y')}{n\Sigma x'^2 - (\Sigma x')^2} = \frac{(12)(47) - (-16)(-5)}{(12)(106) - (16)^2} = 0.476$$

También ya que $x' = x - 68$, $y' = y - 68$ tenemos $\overline{x'} = \bar{x} - 68$, $\overline{y'} = \bar{y} - 68$. Por tanto

$$\bar{x} = \overline{x'} + 68 = -\frac{16}{12} + 68 = 66.67, \qquad \bar{y} = \overline{y'} + 68 = -\frac{5}{12} + 68 = 67.58$$

La ecuación de regresión pedida de y sobre x es $y - \bar{y} = b(x - \bar{x})$, esto es

$$y - 67.58 = 0.476(x - 66.07) \qquad \text{ó} \qquad y = 35.85 + 0.476\,x$$

de acuerdo con el Problema 8.11, aparte de los errores de redondeo. De una manera análoga podemos obtener la ecuación de regresión de x sobre y.

ECUACIONES NO LINEALES REDUCIBLES A FORMA LINEAL

8.13. La tabla 8-6 da valores experimentales de la presión P de una masa de gas dada correspondiente a varios valores del volumen V. De acuerdo con los principios de la termodinámica una relación de la forma $PV^\gamma = C$, donde γ y C son constantes, debe existir entre las variables. (*a*) Hallar el valor de γ y C. (*b*) Escribir las ecuaciones que relacionan a P y V. (*c*) Estimar P cuando $V = 100.0$ pulgadas cúbicas.

Tabla 8-6

Volumen V (pul^3)	54.3	61.8	72.4	88.7	118.6	194.0
Presión P (lb/pul^2)	61.2	49.5	37.6	28.4	19.2	10.1

Ya que $PV^\gamma = C$, tenemos tomando logaritmos de base 10

$$\log P + \gamma \log V = \log C \qquad \text{ó} \qquad \log P = \log C - \gamma \log V$$

Tomando $\log V = x$, $\log P = y$, la última ecuación puede escribirse

$$y = a + bx \tag{1}$$

donde $a = \log C$, $b = -\gamma$.

La Tabla 8-7 da los valores x, y correspondientes a los valores de V, P de la Tabla 8-6 y también indica los cálculos involucrados en el cómputo de la recta de mínimos cuadrados (*1*).

Las ecuaciones normales correspondientes a la recta de mínimos cuadrados (*1*) son

$$\Sigma y = an + b\Sigma x \qquad \Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$$

de las cuales

$$a = \frac{(\Sigma y)(\Sigma x^2) - (\Sigma x)(\Sigma xy)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} = 4.20, \qquad b = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} = -1.40$$

Luego $y = 4.20 - 1.40\,x$.

Tabla 8-7

$x = \log V$	$y = \log P$	x^2	xy
1.7348	1.7868	3.0095	3.0997
1.7910	1.6946	3.2077	3.0350
1.8597	1.5752	3.4585	2.9294
1.9479	1.4533	3.7943	2.8309
2.0741	1.2833	4.3019	2.6617
2.2878	1.0043	5.2340	2.2976
$\Sigma x = 11.6953$	$\Sigma y = 8.7975$	$\Sigma x^2 = 23.0059$	$\Sigma xy = 16.8543$

(*a*) Puesto que $a = 4.20 = \log C$ y $b = -1.40 = -\gamma$, $C = 1.60 \times 10^4$ y $\gamma = 1.40$.

(*b*) $PV^{1.40} = 16{,}000$.

(*c*) Cuando $V = 100$, $x = \log V = 2$ y $y = \log P = 4.20 - 1.40(2) = 1.40$. Entonces $P = \text{antilog } 1.40 = 25.1$ lb/pulg^2.

8.14. Solucionar el Problema 8.13 dibujando los datos en un papel log-log.

Para cada pareja de valores de la presión P y el volumen V en la Tabla 8-6, obtenemos un punto que se dibuja en el *papel log-log* construido especialmente como se muestra en la Fig. 8-10.

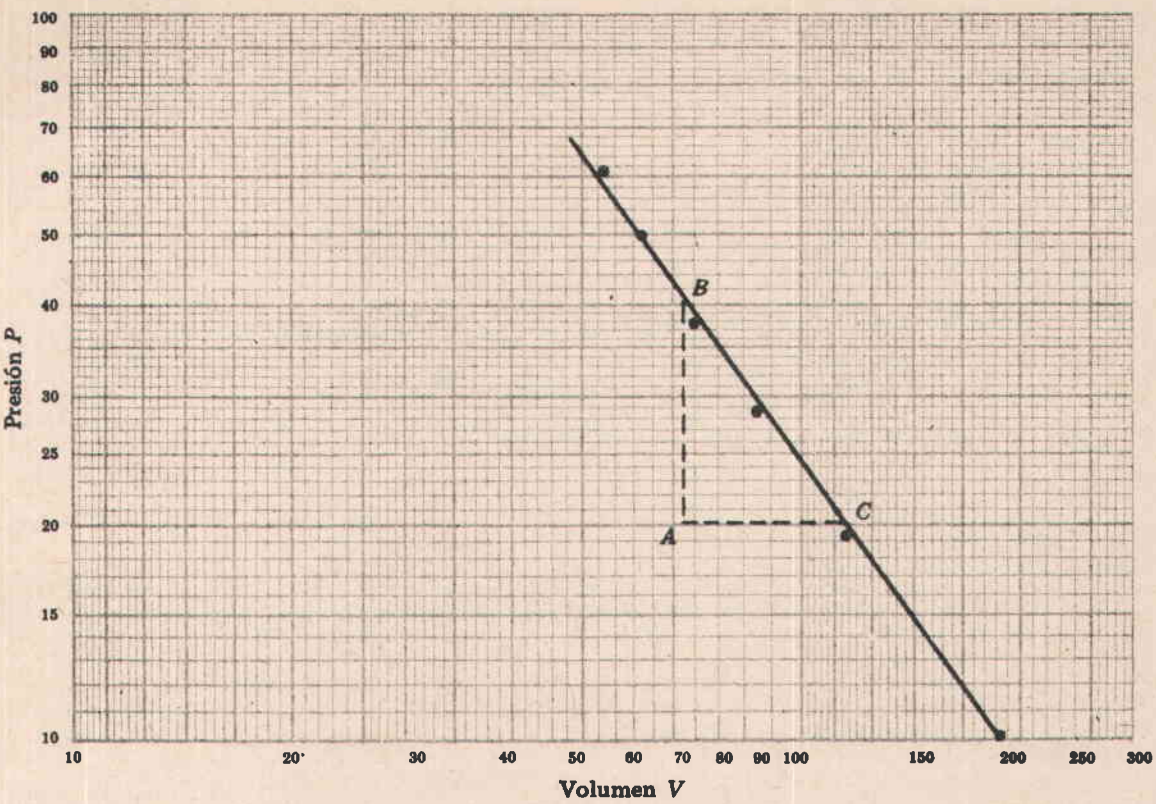


Fig. 8-10

También se indica una recta (dibujada a mano alzada) que se aproxima a estos puntos. La gráfica resultante muestra que hay una relación lineal entre log P y log V que puede representarse por la ecuación

$$\log P \;=\; a + b\log V \qquad \text{ó} \qquad y \;=\; a + bx$$

La pendiente b, que es negativa en este caso, se da numéricamente por la relación de la longitud AB a la longitud AC. La medida en este caso indica que $b = -1.4$.

Para obtener a se necesita un punto sobre la recta. Por ejemplo cuando $V = 100$, $P = 25$ de la gráfica. Entonces

$$a \;=\; \log P - b\log V \;=\; \log 25 + 1.4\log 100 \;=\; 1.4 + (1.4)(2) \;=\; 4.2$$

de modo que

$$\log P + 1.4\log V \;=\; 4.2, \qquad \log PV^{1.4} \;=\; 4.2, \qquad \text{y} \qquad PV^{1.4} \;=\; 16{,}000$$

PARABOLA DE MINIMOS CUADRADOS

8.15. Derivar las ecuaciones normales (*19*), página 261, para la parábola de mínimos cuadrados.

$$y \;=\; a + bx + cx^2$$

Sean los puntos muestrales $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Entonces los valores de y sobre la parábola de mínimos cuadrados correspondientes a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son

$$a + bx_1 + cx_1^2, \quad a + bx_2 + cx_2^2, \quad \ldots, \quad a + bx_n + cx_n^2$$

Por tanto las desviaciones de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ están dadas por

$$d_1 \;=\; a + bx_1 + cx_1^2 - y_1, \quad d_2 \;=\; a + bx_2 + cx_2^2 - y_2, \quad \ldots, \quad d_n \;=\; a + bx_n + cx_n^2 - y_n$$

y la suma de los cuadrados de las desviaciones está dada por

$$\sum d^2 \;=\; \sum (a + bx + cx^2 - y)^2$$

Esta es función de a, b, c, es decir

$$F(a,b,c) \;=\; \sum (a+bx+cx^2-y)^2$$

Para minimizar esta función debemos tener

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial c} = 0$$

Entonces

$$\frac{\partial F}{\partial a} \;=\; \sum \frac{\partial}{\partial a}(a+bx+cx^2-y)^2 \;=\; \sum 2(a+bx+cx^2-y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} \;=\; \sum \frac{\partial}{\partial b}(a+bx+cx^2-y)^2 \;=\; \sum 2x(a+bx+cx^2-y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} \;=\; \sum \frac{\partial}{\partial c}(a+bx+cx^2-y)^2 \;=\; \sum 2x^2(a+bx+cx^2-y)$$

Al simplificar cada una de estas sumas e igualándola a cero se obtienen las ecuaciones (*19*), página 261.

8.16. Ajustar una parábola de mínimos cuadrados de la forma $y = a + bx + cx^2$ a los datos de la Tabla 8-8.

Tabla 8-8

x	1.2	1.8	3.1	4.9	5.7	7.1	8.6	9.8
y	4.5	5.9	7.0	7.8	7.2	6.8	4.5	2.7

Las ecuaciones normales son

$$(1)\qquad \begin{aligned} \Sigma y &= an + b\Sigma x + c\Sigma x^2 \\ \Sigma xy &= a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3 \\ \Sigma x^2 y &= a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4 \end{aligned}$$

El trabajo involucrado en computar las sumas puede ordenarse como se muestra en la Tabla 8-9.

Tabla 8-9

x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
1.2	4.5	1.44	1.73	2.08	5.40	6.48
1.8	5.9	3.24	5.83	10.49	10.62	19.12
3.1	7.0	9.61	29.79	92.35	21.70	67.27
4.9	7.8	24.01	117.65	576.48	38.22	187.28
5.7	7.2	32.49	185.19	1055.58	41.04	233.93
7.1	6.8	50.41	357.91	2541.16	48.28	342.79
8.6	4.5	73.96	636.06	5470.12	38.70	332.82
9.8	2.7	96.04	941.19	9223.66	26.46	259.31
$\Sigma x =$ 42.2	$\Sigma y =$ 46.4	$\Sigma x^2 =$ 291.20	$\Sigma x^3 =$ 2275.35	$\Sigma x^4 =$ 18,971.92	$\Sigma xy =$ 230.42	$\Sigma x^2y =$ 1449.00

Puesto que $n = 8$, las ecuaciones normales (*1*) se convierten en

$$(2)\qquad \begin{aligned} 8a + 42.2\,b + 291.20\,c &= 46.4 \\ 42.2\,a + 291.20\,b + 2275.35\,c &= 230.42 \\ 291.20\,a + 2275.35\,b + 18971.92\,c &= 1449.00 \end{aligned}$$

Resolviendo, $a = 2.588$, $b = 2.065$, $c = -0.2110$; así la parábola de mínimos cuadrados pedida tiene la ecuación

$$y \;=\; 2.588 + 2.065\,x - 0.2110\,x^2$$

8.17. Utilizar la parábola de mínimos cuadrados del Problema 8.16 para estimar los valores de y de los valores dados de x.

Para $x = 1.2$, $y_{\text{est}} = 2.588 + 2.065(1.2) - 0.2110(1.2)^2 = 4.762$. Análogamente se obtienen otros valores estimados. Los resultados se muestran en la Tabla 8-10 junto con los valores reales de y.

Tabla 8-10

y_{est}	4.762	5.621	6.962	7.640	7.503	6.613	4.741	2.561
y	4.5	5.9	7.0	7.8	7.2	6.8	4.5	2.7

REGRESION MULTIPLE

8.18 Se desea estimar una variable z de las variables x, y por medio de una ecuación de regresión de la forma $z = a + bx + cy$. Demostrar que la ecuación de regresión de mínimos cuadrados se obtiene al determinar a, b, c de modo que satisfaga (*21*), página 262.

Sean los puntos muestrales $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$. Entonces los valores de z sobre el plano de regresión de mínimos cuadrados correspondientes a $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ son respectivamente

$$a + bx_1 + cy_1, \quad \ldots, \quad a + bx_n + cy_n$$

Por tanto las desviaciones de $z_1, \ldots, z_n$ vienen dadas por

$$d_1 \;=\; a + bx_1 + cy_1 - z_1, \quad \ldots, \quad d_n \;=\; a + bx_n + cy_n - z_n$$

y la suma de los cuadrados de las desviaciones está dada por

$$\Sigma d^2 \;=\; \Sigma(a + bx + cy - z)^2$$

Considerando esto como función de a, b, c e igualando las derivadas parciales con respecto a a, b y c a cero, las ecuaciones normales pedidas (*21*) en la página 262 se obtienen.

8.19. La Tabla 8-11 muestra los pesos z a la libra más cercana, las estaturas x a la pulgada más cercana y las edades y al año más cercano de 12 muchachos. (*a*) Hallar la ecuación de regresión de mínimos cuadrados de z sobre x, y. (*b*) Determinar los valores estimados de z de los valores dados de x, y. (*c*) Estimar el peso de un muchacho de 9 años y 54 pulgadas de estatura.

Tabla 8-11

Peso (z)	64	71	53	67	55	58	77	57	56	51	76	68
Estatura (x)	57	59	49	62	51	50	55	48	52	42	61	57
Edad (y)	8	10	6	11	8	7	10	9	10	6	12	9

(*a*) La ecuación de regresión lineal de z sobre x, y puede escribirse

$$z \;=\; a + bx + cy$$

Las ecuaciones normales (*21*), página 262, vienen dadas por

$$\begin{aligned} \Sigma z &= na + b\Sigma x + c\Sigma y \\ \Sigma xz &= a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma xy \qquad (1) \\ \Sigma yz &= a\Sigma y + b\Sigma xy + c\Sigma y^2 \end{aligned}$$

El trabajo involucrado en computar las sumas puede ordenarse como se indica en la Tabla 8-12.

Tabla 8-12

z	x	y	z^2	x^2	y^2	xz	yz	xy
64	57	8	4096	3249	64	3648	512	456
71	59	10	5041	3481	100	4189	710	590
53	49	6	2809	2401	36	2597	318	294
67	62	11	4489	3844	121	4154	737	682
55	51	8	3025	2601	64	2805	440	408
58	50	7	3364	2500	49	2900	406	350
77	55	10	5929	3025	100	4235	770	550
57	48	9	3249	2304	81	2736	513	432
56	52	10	3136	2704	100	2912	560	520
51	42	6	2601	1764	36	2142	306	252
76	61	12	5776	3721	144	4636	912	732
68	57	9	4624	3249	81	3876	612	513
$\Sigma z =$ 753	$\Sigma x =$ 643	$\Sigma y =$ 106	$\Sigma z^2 =$ 48,139	$\Sigma x^2 =$ 34,843	$\Sigma y^2 =$ 976	$\Sigma xz =$ 40,830	$\Sigma yz =$ 6796	$\Sigma xy =$ 5779

Utilizando esta tabla, las ecuaciones normales (*1*) se convierten en

$$(2)\qquad \begin{aligned} 12a + 643b + 106c &= 753 \\ 643a + 34{,}843b + 5779c &= 40{,}830 \\ 106a + 5779b + 976c &= 6796 \end{aligned}$$

Resolviendo, $a = 3.6512$, $b = 0.8546$, $c = 1.5063$, la ecuación de regresión pedida es

$$(3)\qquad z = 3.65 + 0.855\,x + 1.506\,y$$

(*b*) Utilizando la ecuación de regresión (*3*) obtenemos los valores estimados de z, denotados por z_{est}, al sustituir los valores correspondientes de x, y. Los resultados se dan en la Tabla 8-13 junto con los valores muestrales de z.

Tabla 8-13

z_{est}	64.414	69.136	54.564	73.206	59.286	56.925	65.717	58.229	63.153	48.582	73.857	65.920
z	64	71	53	67	55	58	77	57	56	51	76	68

(*c*) Remplazando $x = 54$, $y = 9$ en (*3*), el peso estimado es $z_{\text{est}} = 63.356$, o aproximadamente 63 lb.

ERROR TIPICO DE LA ESTIMA

8.20. Si la recta de regresión de mínimos cuadrados de y sobre x viene dada por $y = a + bx$, demostrar que el error típico de la estima $s_{y.x}$ está dado por

$$s_{y.x}^2 = \frac{\Sigma y^2 - a\Sigma y - b\Sigma xy}{n}$$

Los valores de y estimados a partir de la recta de regresión vienen dados por $y_{\text{est}} = a + bx$. Entonces

$$s_{y.x}^2 = \frac{\Sigma(y - y_{\text{est}})^2}{n} = \frac{\Sigma(y - a - bx)^2}{n}$$

$$= \frac{\Sigma y(y - a - bx) - a\Sigma(y - a - bx) - b\Sigma x(y - a - bx)}{n}$$

Pero
$$\Sigma(y - a - bx) = \Sigma y - an - b\Sigma x = 0$$
$$\Sigma x(y - a - bx) = \Sigma xy - a\Sigma x - b\Sigma x^2 = 0$$

puesto que de las ecuaciones normales
$$\Sigma y = an + b\Sigma x \qquad \Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$$

Entonces
$$s_{y.x}^2 = \frac{\Sigma y(y - a - bx)}{n} = \frac{\Sigma y^2 - a\Sigma y - b\Sigma xy}{n}$$

Este resultado puede extenderse a ecuaciones de regresión no lineal.

8.21. Demostrar que el resultado del Problema 8.20 puede escribirse como
$$s_{y.x}^2 = \frac{\Sigma(y - \bar{y})^2 - b\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n}$$

Método 1.

Si $x = x' + \bar{x}$, $y = y' + \bar{y}$. Entonces del Problema 8.20
$$\begin{aligned}
ns_{y.x}^2 &= \Sigma y^2 - a\Sigma y - b\Sigma xy \\
&= \Sigma(y' + \bar{y})^2 - a\Sigma(y' + \bar{y}) - b\Sigma(x' + \bar{x})(y' + \bar{y}) \\
&= \Sigma(y'^2 + 2y'\bar{y} + \bar{y}^2) - a(\Sigma y' + n\bar{y}) - b\Sigma(x'y' + \bar{x}y' + x'\bar{y} + \bar{x}\bar{y}) \\
&= \Sigma y'^2 + 2\bar{y}\Sigma y' + n\bar{y}^2 - an\bar{y} - b\Sigma x'y' - b\bar{x}\Sigma y' - b\bar{y}\Sigma x' - bn\bar{x}\bar{y} \\
&= \Sigma y'^2 + n\bar{y}^2 - an\bar{y} - b\Sigma x'y' - bn\bar{x}\bar{y} \\
&= \Sigma y'^2 - b\Sigma x'y' + n\bar{y}(\bar{y} - a - b\bar{x}) \\
&= \Sigma y'^2 - b\Sigma x'y' \\
&= \Sigma(y - \bar{y})^2 - b\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y})
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado los resultados $\Sigma x' = 0$, $\Sigma y' = 0$ y $\bar{y} = a + b\bar{x}$ (que se deducen al dividir ambos lados de la ecuación normal $\Sigma y = an + b\Sigma x$ por n). Esto demuestra el resultado pedido.

Método 2.

Sabemos que la recta de regresión puede escribirse como $y - \bar{y} = b(x - \bar{x})$, que corresponde a empezar con $y = a + bx$ y remplazando: a por cero, y por $y - \bar{y}$, x por $x - \bar{x}$. Cuando se hacen estos remplazos en el Problema 8.20 se obtiene el resultado pedido.

8.22. Calcular el error típico de la estima, $s_{y.x}$, para los datos del Problema 8.11.

Del Problema 8.11(b) la recta de regresión de y sobre x es $y = 35.82 + 0.476x$. En la Tabla 8-14 se listan los valores reales de y (de la Tabla 8-3) y los valores estimados de y, denotados por y_{est}, como se obtienen de la recta de regresión. Por ejemplo, correspondiendo a $x = 65$ tenemos $y_{\text{est}} = 35.82 + 0.476(65) = 66.76$.

También se indican los valores $y - y_{\text{est}}$, que se necesitan para el cálculo de $s_{y.x}$.

Tabla 8-14

x	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
y	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70
y_{est}	66.76	65.81	67.71	66.28	68.19	65.33	69.14	67.24	68.19	67.71	68.66	69.62
$y - y_{\text{est}}$	1.24	0.19	0.29	−1.28	0.81	0.67	−1.14	−2.24	2.81	−0.71	−0.66	0.38

$$s_{y.x}^2 = \frac{\Sigma(y - y_{\text{est}})^2}{n} = \frac{(1.24)^2 + (0.19)^2 + \cdots + (0.38)^2}{12} = 1.642$$

y $s_{y.x} = \sqrt{1.642} = 1.28$ pulgadas.

8.23. (*a*) Construir dos rectas paralelas a la recta de regresión del Problema 8.11 a una distancia vertical $s_{y.x}$. (*b*) Determinar el porcentaje de puntos de datos que se encuentren entre estas dos rectas.

(*a*) La recta de regresión $y = 35.82 + 0.476x$ obtenida en el Problema 8.11 se muestra sólida en la Fig. 8-11. Las dos rectas paralelas, cada una a una distancia vertical $s_{y.x} = 1.28$ (véase Problema 8.22), se muestran a trazos en la Fig. 8-11.

(*b*) De la figura se ve que de los 12 puntos de datos, 7 se encuentran entre las rectas en tanto que 3 parecen estar sobre las rectas. Un examen posterior utilizando el último renglón en la Tabla 8-14 revela que 2 de estos 3 puntos se encuentran entre las rectas. Entonces el porcentaje pedido es 9/12 = 75%.

Otro método.

Del último renglón de la Tabla 8-14, $y - y_{\text{est}}$ se encuentra entre -1.28 y 1.28 (es decir, $\pm s_{y.x}$) para 9 puntos (x, y). Entonces el porcentaje pedido es 9/12 = 75%.

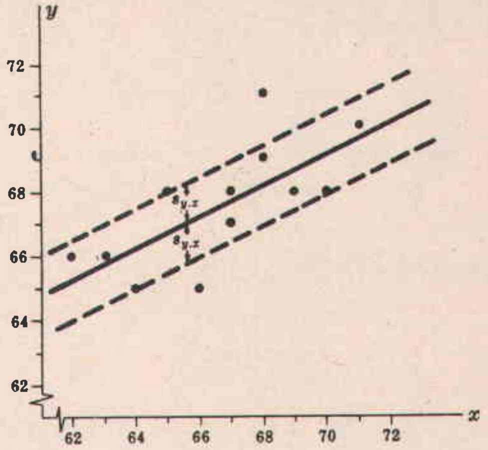


Fig. 8-11

Si los puntos están distribuidos normalmente respecto a la recta de regresión, la teoría predice que alrededor del 68% de los puntos se encuentra entre las rectas. Este hubiera sido el caso aproximado si el tamaño fuera más grande.

NOTA: Una mejor estima del error típico de la estima de la población de la cual se tomaron las estaturas viene dada por $\hat{s}_{y.x} = \sqrt{n/(n-2)}\, s_{y.x} = \sqrt{12/10}\,(1.28) = 1.40$ pulgadas.

COEFICIENTE DE CORRELACION LINEAL

8.24. Demostrar que $\Sigma(y - \bar{y})^2 = \Sigma(y - y_{\text{est}})^2 + \Sigma(y_{\text{est}} - \bar{y})^2$.

Elevando al cuadrado $y - \bar{y} = (y - y_{\text{est}}) + (y_{\text{est}} - \bar{y})$ sumando, tenemos

$$\Sigma(y - \bar{y})^2 = \Sigma(y - y_{\text{est}})^2 + \Sigma(y_{\text{est}} - \bar{y})^2 + 2\Sigma(y - y_{\text{est}})(y_{\text{est}} - \bar{y})$$

El resultado pedido se deduce si podemos mostrar que la última suma es cero. En el caso de regresión lineal este es el caso, ya que

$$\begin{aligned} \Sigma(y - y_{\text{est}})(y_{\text{est}} - \bar{y}) &= \Sigma(y - a - bx)(a + bx - \bar{y}) \\ &= a\Sigma(y - a - bx) + b\Sigma x(y - a - bx) - \bar{y}\Sigma(y - a - bx) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puesto que de las ecuaciones normales $\Sigma(y - a - bx) = 0$, $\Sigma x(y - a - bx) = 0$.

Análogamente puede demostrarse que el resultado es válido para regresión no lineal utilizando una curva de mínimos cuadrados dada por $y_{\text{est}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.

8.25. Calcular (*a*) la variación explicada, (*b*) la variación no explicada y (*c*) la variación total para los datos del Problema 8.11.

Tenemos $\bar{y} = 67.58$ del Problema 8.12 (o de la Tabla 8-4, ya que $\bar{y} = 811/12 = 67.58$). Utilizando los valores y_{est} de la Tabla 8-14 podemos construir la Tabla 8-15.

Tabla 8-15

$y_{\text{est}} - \bar{y}$	−0.82	−1.77	0.13	−1.30	0.61	−2.25	1.56	−0.34	0.61	0.13	1.08	2.04

(*a*) Variación explicada $= \Sigma(y_{\text{est}} - \bar{y})^2 = (-0.82)^2 + \cdots + (2.04)^2 = 19.22$.

(*b*) Variación no explicada $= \Sigma(y - y_{\text{est}})^2 = ns_{y.x}^2 = 19.70$, del Problema 8.22.

(*c*) Variación total $= \Sigma(y-\bar{y})^2 = 19.22 + 19.70 = 38.92$, del Problema 8.24.

Los resultados (*b*) y (*c*) pueden obtenerse por cálculo directo de la suma de los cuadrados.

8.26. Hallar (*a*) el coeficiente de determinación y (*b*) el coeficiente de correlación para los datos del Problema 8.11. Utilizar los resultados del Problema 8.25.

(*a*) coeficiente de determinación $= r^2 = \dfrac{\text{variación explicada}}{\text{variación total}} = \dfrac{19.22}{38.92} = 0.4938.$

(*b*) coeficiente de correlación $= r = \pm\sqrt{0.4938} = \pm 0.7027.$

Puesto que la variable y_{est} aumenta a medida que x aumenta, la correlación es positiva y por tanto escribimos $r = 0.7027$ o con dos cifras significativas $r = 0.70$.

8.27. A partir del resultado general (*30*), página 263, para el coeficiente de correlación, derivar el resultado (*34*), página 264, (la *fórmula producto momento*), en el caso de regresión lineal.

La recta de regresión de mínimos cuadrados de y sobre x puede escribirse $y_{\text{est}} = a + bx$ ó $y'_{\text{est}} = bx'$, donde $b = \Sigma x'y'/\Sigma x'^2$, $x' = x - \bar{x}$, y $y'_{\text{est}} = y_{\text{est}} - \bar{y}$. Entonces, utilizando $y' = y - \bar{y}$, tenemos

$$r^2 = \frac{\text{variación explicada}}{\text{variación no explicada}} = \frac{\Sigma(y_{\text{est}} - \bar{y})^2}{\Sigma(y-\bar{y})^2} = \frac{\Sigma y'^2_{\text{est}}}{\Sigma y'^2}$$

$$= \frac{\Sigma b^2 x'^2}{\Sigma y'^2} = \frac{b^2 \Sigma x'^2}{\Sigma y'^2} = \left(\frac{\Sigma x'y'}{\Sigma x'^2}\right)^2 \left(\frac{\Sigma x'^2}{\Sigma y'^2}\right) = \frac{(\Sigma x'y')^2}{\Sigma x'^2\, \Sigma y'^2}$$

así

$$r = \pm \frac{\Sigma x'y'}{\sqrt{\Sigma x'^2\, \Sigma y'^2}}$$

Sin embargo, puesto que $\Sigma x'y'$ es positiva cuando y_{est} aumenta a medida que x aumenta, pero negativa cuando y_{est} disminuye a medida que x aumenta, la expresión para r tiene automáticamente el signo correcto asociado. Por tanto se sigue el resultado pedido.

8.28. Utilizando la fórmula producto-momento, obtener el coeficiente de correlación lineal para los datos del Problema 8.11.

El trabajo involucrado en la computación puede organizarse como se indica en la Tabla 8-16. Entonces

$$r = \frac{\Sigma x'y'}{\sqrt{(\Sigma x'^2)(\Sigma y'^2)}} = \frac{40.34}{\sqrt{(84.68)(38.92)}} = 0.7027$$

de acuerdo con el Problema 8.26(*b*).

Tabla 8-16

x	y	$x' = x - \bar{x}$	$y' = y - \bar{y}$	x'^2	$x'y'$	y'^2
65	68	−1.7	0.4	2.89	−0.68	0.16
63	66	−3.7	−1.6	13.69	5.92	2.56
67	68	0.3	0.4	0.09	0.12	0.16
64	65	−2.7	−2.6	7.29	7.02	6.76
68	69	1.3	1.4	1.69	1.82	1.96
62	66	−4.7	−1.6	22.09	7.52	2.56
70	68	3.3	0.4	10.89	1.32	0.16
66	65	−0.7	−2.6	0.49	1.82	6.76
68	71	1.3	3.4	1.69	4.42	11.56
67	67	0.3	−0.6	0.09	−0.18	0.36
69	68	2.3	0.4	5.29	0.92	0.16
71	70	4.3	2.4	18.49	10.32	5.76
$\Sigma x = 800$ $\bar{x} = 800/12$ $= 66.7$	$\Sigma y = 811$ $\bar{y} = 811/12$ $= 67.6$			$\Sigma x'^2 =$ 84.68	$\Sigma x'y' =$ 40.34	$\Sigma y'^2 =$ 38.92

SCR = 15'7027
SCD = 88'9166
R = 0'4937
SCT = 19'2135

8.29. Demostrar el resultado (*17*), página 261.

La recta de regresión de y sobre x es

$$y = a + bx \qquad \text{donde} \qquad b = \frac{rs_y}{s_x}$$

Análogamente, la recta de regresión de x sobre y es

$$x = c + dy \qquad \text{donde} \qquad d = \frac{rs_x}{s_y}$$

Entonces
$$bd = \left(\frac{rs_y}{s_x}\right)\left(\frac{rs_x}{s_y}\right) = r^2$$

8.30. Utilizar el resultado del Problema 8.29 para hallar el coeficiente de correlación lineal para los datos del Problema 8.11.

Del Problema 8.11 (*b*) y 8.11(*c*) respectivamente

$$b = \frac{484}{1016} = 0.476 \qquad\qquad d = \frac{484}{467} = 1.036$$

Entonces
$$r^2 = bd = \left(\frac{484}{1016}\right)\left(\frac{484}{467}\right) \qquad \text{ó} \qquad r = 0.7027$$

que está de acuerdo con los Problemas 8.26(*b*) y 8.28.

8.31. Demostrar que el coeficiente de correlación lineal viene dado por

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{[n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2][n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2]}}$$

En el Problema 8.27 se demostró que

(*1*)
$$r = \frac{\Sigma x'y'}{\sqrt{(\Sigma x'^2)(\Sigma y'^2)}} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{[\Sigma(x-\bar{x})^2][\Sigma(y-\bar{y})^2]}}$$

Pero
$$\begin{aligned}\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) &= \Sigma(xy - \bar{x}y - x\bar{y} + \bar{x}\bar{y}) = \Sigma xy - \bar{x}\Sigma y - \bar{y}\Sigma x + n\bar{x}\bar{y} \\ &= \Sigma xy - n\bar{x}\bar{y} - n\bar{y}\bar{x} + n\bar{x}\bar{y} = \Sigma xy - n\bar{x}\bar{y} \\ &= \Sigma xy - \frac{(\Sigma x)(\Sigma y)}{n}\end{aligned}$$

Puesto que $\bar{x} = (\Sigma x)/n$ y $\bar{y} = (\Sigma y)/n$.

Análogamente,
$$\begin{aligned}\Sigma(x-\bar{x})^2 &= \Sigma(x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2) = \Sigma x^2 - 2\bar{x}\Sigma x + n\bar{x}^2 \\ &= \Sigma x^2 - \frac{2(\Sigma x)^2}{n} + \frac{(\Sigma x)^2}{n} = \Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}\end{aligned}$$

y
$$\Sigma(y-\bar{y})^2 = \Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{n}$$

Entonces (*1*) se convierte en

$$r = \frac{\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)/n}{\sqrt{[\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/n][\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2/n]}} = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{[n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2][n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2]}}$$

8.32. Utilizar la fórmula del Problema 8.31 para obtener el coeficiente de correlación lineal para los datos del Problema 8.11.

De la Tabla 8-4

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{[n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2][n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2]}}$$

$$= \frac{(12)(54{,}107) - (800)(811)}{\sqrt{[(12)(53{,}418) - (800)^2][(12)(54{,}849) - (811)^2]}} = 0.7027$$

como en los Problemas 8.26(*b*), 8.28 y 8.30.

COEFICIENTE DE CORRELACION GENERALIZADO

8.33. (*a*) Hallar el coeficiente de correlación lineal entre las variables x, y del Problema 8.16. (*b*) Hallar el coeficiente de correlación no lineal entre estas variables, suponiendo la relación parabólica obtenida en el Problema 8.16. (*c*) Explicar la diferencia entre los coeficientes de correlación obtenidos en (*a*) y (*b*). (*d*) ¿Qué porcentaje de la variación total permanece como no explicada por la suposición de la relación parabólica entre x, y?

(*a*) Utilizando los cálculos de la Tabla 8-9 y agregando que $\Sigma y^2 = 290.52$, hallamos

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{[n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2][n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2]}}$$

$$= \frac{(8)(230.42) - (42.2)(46.4)}{\sqrt{[(8)(291.20) - (42.2)^2][(8)(290.52) - (46.4)^2]}} = -0.3743$$

(*b*) De la Tabla 8-9, $\bar{y} = (\Sigma y)/n = (46.4)/8 = 5.80$. Entonces

$$\text{variación total} = \Sigma(y - \bar{y})^2 = 21.40$$

De la Tabla 8-10

$$\text{variación explicada} = \Sigma(y_{\text{est}} - \bar{y})^2 = 21.02$$

Por tanto $$r^2 = \frac{\text{variación explicada}}{\text{variación total}} = \frac{21.02}{21.40} = 0.9822 \qquad \text{y} \qquad r = 0.9911$$

(*c*) El hecho de que la parte (*a*) muestra un coeficiente de correlación de solo -0.3743 indica prácticamente ninguna *relación lineal* entre x, y. Sin embargo, hay una muy buena *relación no lineal* dada por la parábola del Problema 8.16, como lo indica el hecho de que el coeficiente de correlación en (*b*) está muy cercano a 1.

(*d*) $$\frac{\text{variación no explicada}}{\text{variación total}} = 1 - r^2 = 1 - 0.9822 = 0.0178$$

Por tanto 1.78% de la variación total permanece no explicada. Esto puede deberse a fluctuaciones aleatorias o a una variable adicional que no se ha considerado.

8.34. Hallar (*a*) s_y y (*b*) $s_{y.x}$ para los datos del Problema 8.16.

(*a*) Del Problema 8.33 (*b*), $\Sigma(y - \bar{y})^2 = 21.40$. Entonces la desviación típica de y es

$$s_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{21.40}{8}} = 1.636 \text{ ó } 1.64$$

(*b*) **Primer método.**

Utilizando (*a*) y el Problema 8.33 (*b*), el error típico de la estima de y sobre x es

$$s_{y.x} = s_y\sqrt{1 - r^2} = 1.636\sqrt{1 - (0.9911)^2} = 0.218 \text{ ó } 0.22$$

Segundo método.

Utilizando el Problema 8.33,

$$s_{y.x} = \sqrt{\frac{\Sigma(y - y_{\text{est}})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\text{variación no explicada}}{n}} = \sqrt{\frac{21.40 - 21.02}{8}} = 0.218 \text{ ó } 0.22$$

Tercer método.

Utilizando el Problema 8.16 y el cálculo adicional $\Sigma y^2 = 290.52$, tenemos

$$s_{y.x} = \sqrt{\frac{\Sigma y^2 - a\Sigma y - b\Sigma xy - c\Sigma x^2 y}{n}} = 0.218 \text{ ó } 0.22$$

8.35. Explicar cómo determinaría un coeficiente de correlación múltiple para las variables en el Problema 8.19.

Ya que z se determina de x, y estamos interesados en el *coeficiente de correlación múltiple de z sobre x, y.* Para obtenerlo, vemos del Problema 8.19 que

$$\begin{aligned}\text{Variación no explicada} &= \Sigma(z - z_{\text{est}})^2 \\ &= (64 - 64.414)^2 + \cdots + (68 - 65.920)^2 = 258.88\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Variación total} &= \Sigma(z - \bar{z})^2 = \Sigma z^2 - n\bar{z}^2 \\ &= 48{,}139 - 12(62.75)^2 = 888.25\end{aligned}$$

$$\text{Variación explicada} = 888.25 - 258.88 = 629.37$$

Entonces

Coeficiente de correlación múltiple de z sobre x, y

$$= \sqrt{\frac{\text{variación explicada}}{\text{variación no explicada}}} = \sqrt{\frac{629.37}{888.25}} = 0.8418$$

Debe mencionarse que si fuéramos a considerar la regresión de x sobre y, z, el coeficiente de correlación de x sobre y, z sería en general diferente del valor anterior.

CORRELACION GRADUAL

8.36. Derivar la fórmula de correlación gradual de Spearman (*36*), página 264.

Aquí estamos considerando n valores de x (por ejemplo pesos) y n valores correspondientes de y (por ejemplo estaturas). Sea x_j el grado dado al j-ésimo valor de x, y_j el grado dado al j-ésimo valor de y. Los grados son enteros de 1 a n. La media de x_j es

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} = \frac{n(n+1)/2}{n} = \frac{n+1}{2}$$

mientras que la varianza es

$$\begin{aligned}s_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 &= \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)/6}{2} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{n^2 - 1}{12}\end{aligned}$$

utilizando los resultados 1 y 2 del Apéndice A. Análogamente, la media $\bar{y}$ y la varianza s_y^2 son iguales a $(n + 1)/2$ y $(n^2 - 1)/12$ respectivamente.

Entonces si $d_j = x_j - y_j$ son las desviaciones entre las graduaciones, la varianza de las desviaciones, s_d^2, viene dada en términos de s_x^2, s_y^2 y el coeficiente de correlación entre grados por

$$s_d^2 = s_x^2 + s_y^2 - 2r_{\text{grad}} s_x s_y$$

Entonces

(*1*)
$$r_{\text{grad}} = \frac{s_x^2 + s_y^2 - s_d^2}{2 s_x s_y}$$

Puesto que $\bar{d} = 0$, $s_d^2 = (\Sigma d^2)/n$ y (*1*) se convierte en

(*2*)
$$r_{\text{grad}} = \frac{(n^2-1)/12 + (n^2-1)/12 - (\Sigma d^2)/n}{(n^2-1)/6} = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

8.37. La Tabla 8-17 muestra cómo 10 estudiantes fueron clasificados según su rendimiento en el laboratorio y en teoría de un curso de biología. Hallar el coeficiente de correlación gradual.

Tabla 8-17

Laboratorio	8	3	9	2	7	10	4	6	1	5
Teoría	9	5	10	1	8	7	3	4	2	6

La diferencia de puntuaciones *d* en laboratorio y teoría para cada estudiante se da en la tabla siguiente. También se incluyen d^2 y Σd^2.

Tabla 8-18

Diferencias de puntuaciones, *d*	−1	−2	−1	1	−1	3	1	2	−1	−1	
d^2	1	4	1	1	1	9	1	4	1	1	$\Sigma d^2 =$ 24

Entonces
$$r_{\text{grad}} = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6(24)}{10(10^2-1)} = 0.8545$$

indicando que hay una relación entre el rendimiento en laboratorio y teoría.

8.38. Calcular el coeficiente de correlación gradual para los datos del Problema 8.11 y comparar los resultados con el coeficiente de correlación obtenido por otros métodos.

Ordenadas en forma ascendente de magnitud, las estaturas de los padres son

(*1*) 62, 63, 64, 65, 66, 67, 67, 68, 68, 69, 70, 71

Puesto que en esta ordenación los lugares sexto y séptimo representan la misma estatura (67 pulgadas), les asignamos a estos dos lugares un *orden medio* de 6.5. Análogamente, a los lugares 8 y 9 se les asigna el orden 8.5. Así, a las estaturas de los padres se les asigna los órdenes

(*2*) 1, 2, 3, 4, 5, 6.5, 6.5, 8.5, 8.5, 10, 11, 12

De igual forma, las estaturas de los hijos ordenadas en sentido creciente son

(*3*) 65, 65, 66, 66, 67, 68, 68, 68, 68, 69, 70, 71

y puesto que los lugares 6, 7, 8 y 9 representan la misma estatura (68 pulgadas), les asignamos un *orden medio* de 7.5 [(6 + 7 + 8 + 9)/4 . Por tanto las estaturas de los hijos quedan ordenadas

(*4*) 1.5, 1.5, 3.5, 3.5, 5, 7.5, 7.5, 7.5, 7.5, 10, 11, 12

Con las correspondencias (*1*) y (*2*), (*3*) y (*4*), la Tabla 8-3 se convierte en

Tabla 8-19

Graduación del padre	4	2	6.5	3	8.5	1	11	5	8.5	6.5	10	12
Graduación del hijo	7.5	3.5	7.5	1.5	10	3.5	7.5	1.5	12	5	7.5	11

La diferencia en graduaciones d, los cómputos de d^2 y Σd^2 se muestran en la Tabla 8-20. 20.

Tabla 8-20

d	-3.5	-1.5	-1.0	1.5	-1.5	-2.5	3.5	3.5	-3.5	1.5	2.5	1.0	
d^2	12.25	2.25	1.00	2.25	2.25	6.25	12.25	12.25	12.25	2.25	6.25	1.00	$\Sigma d^2 =$ 72.50

Entonces
$$r_{\text{grad}} = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6(72.50)}{12(12^2-1)} = 0.7465$$

que concuerda muy bien con el valor $r = 0.7027$ obtenido en el Problema 8.26(b).

INTERPRETACION PROBABILISTICA DE REGRESION Y CORRELACION

8.39. Derivar (*39*) a partir de (*37*).

Suponga que la ecuación de regresión es

$$y = E(Y \mid X = x) = \alpha + \beta x$$

Para la recta de regresión de mínimos cuadrados debemos considerar

$$\begin{aligned} E\{[Y - (\alpha + \beta X)]^2\} &= E\{[(Y - \mu_Y) - \beta(X - \mu_X) + (\mu_Y - \beta\mu_X - \alpha)]^2\} \\ &= E[(Y - \mu_Y)^2] + \beta^2 E[(X - \mu_X)^2] - 2\beta E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] + (\mu_Y - \beta\mu_X - \alpha)^2 \\ &= \sigma_Y^2 + \beta^2\sigma_X^2 - 2\beta\sigma_{XY} + (\mu_Y - \beta\mu_X - \alpha)^2 \end{aligned}$$

~~donde hemos~~ utilizado $E(X - \mu_X) = 0$, $E(Y - \mu_Y) = 0$.

Denotando la última expresión por $F(\alpha, \beta)$ tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -2(\mu_Y - \beta\mu_X - \alpha), \qquad \frac{\partial F}{\partial \beta} = 2\beta\sigma_X^2 - 2\sigma_{XY} - 2\mu_X(\mu_Y - \beta\mu_X - \alpha)$$

Igualando estas ecuaciones a cero, lo cual es una condición necesaria para que $F(\alpha, \beta)$ sea un mínimo, hallamos

$$\mu_Y = \alpha + \beta\mu_X \qquad \beta\sigma_X^2 = \sigma_{XY}$$

Por tanto si $y = \alpha + \beta x$ entonces $y - \mu_Y = \beta(x - \mu_X)$ ó

$$y - \mu_Y = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x - \mu_X)$$

ó
$$\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y} = \rho\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)$$

Debe notarse la semejanza de la demostración anterior para poblaciones, utilizando esperanzas, con la correspondiente para muestras, utilizando sumas. En general, los resultados para muestras tienen resultados análogos para poblaciones e inversamente.

8.40. La función de densidad conjunta de las variables aleatorias X, Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y) & 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar la curva de regresión de (a) Y sobre X, (b) X sobre Y.

(a) La función de densidad marginal de X es

$$f_1(x) = \int_0^1 \frac{2}{3}(x + 2y)\,dy = \frac{2}{3}(x + 1)$$

para $0 \leqq x \leqq 1$, y $f_1(x) = 0$ de otra forma. Por tanto, para $0 \leqq x \leqq 1$, la densidad condicional de Y dada X es

$$f_2(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \dfrac{x + 2y}{x + 1} & 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 & y < 0 \text{ ó } y > 1 \end{cases}$$

y la curva de regresión de Y sobre X está dada por

$$y = E(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y \mid x)\, dy$$

$$= \int_0^1 y\left(\frac{x + 2y}{x + 1}\right) dy = \frac{3x + 4}{6x + 6}$$

Ni $f_2(y|x)$, ni la curva de regresión están definidas para $x < 0$ ó $x > 1$.

(*b*) Para $0 \leqq y \leqq 1$ la función de densidad marginal de Y es

$$f_2(y) = \int_0^1 \frac{2}{3}(x + 2y)\, dx = \frac{1}{3}(1 + 4y)$$

Por tanto, para $0 \leqq y \leqq 1$, la densidad condicional de X dada Y es

$$f_1(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \begin{cases} \dfrac{2x + 4y}{1 + 4y} & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & x < 0 \text{ ó } x > 1 \end{cases}$$

y la curva de regresión de X sobre Y viene dada por

$$x = E(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x \mid y)\, dx$$

$$= \int_0^1 x\left(\frac{2x + 4y}{1 + 4y}\right) dx = \frac{2 + 6y}{3 + 12y}$$

Ni $f_1(x|y)$, ni la curva de regresión se definen para $y < 0$ ó $y > 1$.

Nótese que las dos curvas de regresión $y = (3x + 4)/(6x + 6)$, $x = (2 + 6y)/(3 + 12y)$ son diferentes.

8.41. Hallar (*a*) $\bar{X}$, (*b*) $\bar{Y}$, (*c*) σ_X^2, (*d*) σ_Y^2, (*e*) σ_{XY}, (*f*) ρ para la distribución del Problema 8.40.

(*a*)
$$\bar{X} = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} x\left[\frac{2}{3}(x + 2y)\right] dx\, dy = \frac{5}{9}$$

(*b*)
$$\bar{Y} = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} y\left[\frac{2}{3}(x + 2y)\right] dx\, dy = \frac{11}{18}$$

(*c*)
$$\overline{X^2} = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} x^2\left[\frac{2}{3}(x + 2y)\right] dx\, dy = \frac{7}{18}$$

Entonces
$$\sigma_X^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2 = \frac{7}{18} - \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{13}{162}$$

(*d*)
$$\overline{Y^2} = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} y^2\left[\frac{2}{3}(x + 2y)\right] dx\, dy = \frac{4}{9}$$

Entonces
$$\sigma_Y^2 = \overline{Y^2} - \bar{Y}^2 = \frac{4}{9} - \left(\frac{11}{18}\right)^2 = \frac{23}{324}$$

(*e*)
$$\overline{XY} = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} xy\left[\frac{2}{3}(x+2y)\right]dx\,dy = \frac{1}{3}$$

Entonces
$$\sigma_{XY} = \overline{XY} - \bar{X}\bar{Y} = \frac{1}{3} - \left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{11}{18}\right) = -\frac{1}{162}$$

(*f*)
$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{-1/162}{\sqrt{13/162}\sqrt{23/324}} = -0.0818$$

Nótese que el coeficiente de correlación lineal es pequeño Esto es de esperarse al observar las rectas de regresión de mínimos cuadrados obtenidos en el Problema 8.42.

8.42. Escribir las rectas de regresión de mínimos cuadrados de (*a*) Y sobre X, (*b*) X sobre Y para el Problema 8.40.

(*a*) La recta de regresión de Y sobre X es $\dfrac{y-\bar{Y}}{\sigma_Y} = \rho\left(\dfrac{x-\bar{X}}{\sigma_X}\right)$ ó

$$y - \bar{Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x-\bar{X}) \quad \text{ó} \quad y - \frac{11}{18} = \frac{-1/162}{13/162}\left(x - \frac{5}{9}\right)$$

(*b*) La recta de regresión de X sobre Y es $\dfrac{x-\bar{X}}{\sigma_X} = \rho\left(\dfrac{y-\bar{Y}}{\sigma_Y}\right)$ ó

$$x - \bar{X} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}(y-\bar{Y}) \quad \text{ó} \quad x - \frac{5}{9} = \frac{-1/162}{23/324}\left(y - \frac{11}{18}\right)$$

TEORIA MUESTRAL DE LA REGRESION N

8.43. En el Problema 8.11 se halló que la ecuación de regresión de y sobre x era $y = 35.82 + 0.476x$. Ensayar la hipótesis al nivel de significación del 0.05 de que el coeficiente de regresión de la ecuación de regresión poblacional es tan bajo como 0.180.

$$t = \frac{\beta - b}{s_{y.x}/s_x}\sqrt{n-2} = \frac{0.476 - 0.180}{1.28/2.66}\sqrt{12-2} = 1.95$$

ya que $s_{y.x} = 1.28$ (calculada en el Problema 8.22) y $s_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = 2.66$ del Problema 8.11.

Con un ensayo unilateral de la distribución de Student a un nivel 0.05 rechazaríamos la hipótesis de que el coeficiente es tan bajo como 0.180 si $t > t_{.95} = 1.81$ para $12 - 2 = 10$ grados de libertad. Por tanto no podemos rechazar la hipótesis.

8.44. Hallar los límites de confianza del 95% para el coeficiente de regresión del Problema 8.43.

$\beta = b + \dfrac{t}{\sqrt{n-2}}\left(\dfrac{s_{y.x}}{s_x}\right)$. Los límites de confianza del 95% para β (obtenidos al colocar $t = \pm t_{.975} = \pm 2.23$ para $12 - 2 = 10$ grados de libertad) vienen dados por

$$b \pm \frac{2.23}{\sqrt{12-2}}\left(\frac{s_{y.x}}{s_x}\right) = 0.476 \pm \frac{2.23}{\sqrt{10}}\left(\frac{1.28}{2.66}\right) = 0.476 \pm 0.340$$

es decir, se está en la confianza del 95% de que β se encuentra entre 0.136 y 0.816.

8.45. En el Problema 8.11, hallar los límites de confianza del 95% para las estaturas de los hijos cuyos padres tienen unas estaturas de (*a*) 65.0 y (*b*) 70.0 pulgadas.

Puesto que $t_{.975} = 2.23$ para $12 - 2 = 10$ grados de libertad, los límites de confianza del 95% para y_p son

$$y_0 \pm \frac{2.23}{\sqrt{n-2}}s_{y.x}\sqrt{n + 1 + \frac{n(x_0 - \bar{x})^2}{s_x^2}}$$

donde $y_0 = 35.82 + 0.476\,x_0$ (Problema 8.11). $s_{y.x} = 1.28$, $s_x = 2.66$ (Problema 8.43), y $n = 12$

(*a*) Si $x_0 = 65.0$, $y_0 = 66.76$ pulgadas. También, $(x_0 - \bar{x})^2 = (65 - 800/12)^2 = 2.78$. Entonces los límites de confianza del 95% son

$$66.76 \pm \frac{2.23}{\sqrt{10}}(1.28)\sqrt{12 + 1 + \frac{12(2.78)}{(2.66)^2}} = 66.76 \pm 3.80 \text{ pulgadas}$$

es decir, se puede estar en la confianza del 95% de que las estaturas de los hijos están entre 63.0 y 70.6 pulgadas

(*b*) Si $x_0 = 70.0$, $y_0 = 69.14$ pulgadas. También $(x_0 - \bar{x})^2 = (70.0 - 800/12)^2 = 11.11$. Entonces los límites de confianza del 95% son 69.14 ± 5.09 pulgadas, es decir, se puede estar en la confianza del 95% de que las estaturas de los hijos están entre 64.1 y 74.2 pulgadas.

Nótese que para grandes valores de n, los límites de confianza del 95% están dados aproximadamente por $y_0 \pm 1.96\, s_{y.x}$ ó $y_0 \pm 2s_{y.x}$ con tal que $x_0 - \bar{x}$ no sea demasiado grande. Esto concuerda con los resultados aproximados mencionados en la página 262. Los métodos de este problema son válidos independiente del tamaño de n ó $x_0 - \bar{x}$, es decir, los métodos muestrales son exactos para una población normal.

8.46. En el problema 8.11, hallar los límites de confianza del 95% para las estaturas medias de los hijos cuyas estaturas de los padres son (*a*) 65.0 y (*b*) 70.0 pulgadas.

Ya que $t_{.975} = 2.23$ para 10 grados de libertad, los límites de confianza del 95% para $\bar{y}_p$ son

$$y_0 \pm \frac{2.23}{\sqrt{10}}\, s_{y.x}\sqrt{1 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{s_x^2}}$$

donde $y_0 = 35.82 + 0.476\, x_0$ (Problema 8.11), $s_{y.x} = 2.66$ (Problema 8.43).

(*a*) Si $x_0 = 65.0$, hallamos [comparar con el Problema 8.45(*a*)] los límites de confianza del 95%; 66.76 ± 1.07 pulgadas, es decir, se puede tener confianza de 95% que la estatura media de todos los hijos cuyas estaturas de los padres son 65.0 pulgadas se encontrarán entre 65.7 y 67.8 pulgadas.

(*b*) Si $x_0 = 70.0$, hallamos [comparar con el Problema 8.45(*b*)] los límites de confianza del 95%; 69.14 ± 1.45 pulgadas, es decir, se puede estar en la confianza del 95% de que la estatura media de todos los hijos cuyas estaturas de los padres son 70.0 pulgadas se encontrarán entre 67.7 y 70.6 pulgadas.

TEORIA MUESTRAL DE LA CORRELACION

8.47. Un coeficiente de correlación basado en una muestra de tamaño 18 resultó ser 0.32. ¿Puede concluirse a un nivel de significación del (*a*) 0.05 y (*b*) 0.01 que el coeficiente de correlación poblacional es apreciablemente mayor que cero?

Deseamos decidir entre las hipótesis $(H_0 : \rho = 0)$ y $(H_1 : \rho > 0)$.

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0.32\sqrt{18-2}}{\sqrt{1-(0.32)^2}} = 1.35$$

(*a*) Sobre la base de un ensayo unilateral de la distribución de Student a un nivel 0.05, rechazaríamos H_0 si $t > t_{.95} = 1.75$ para $18 - 2 = 16$ grados de libertad. Por tanto no podemos rechazar H_0 al nivel 0.05.

(*b*) Puesto que no podemos rechazar H_0 al nivel 0.05, ciertamente no podemos rechazarla al nivel 0.01

8.48. ¿Cuál es el tamaño mínimo de una muestra para que podamos concluir que un coeficiente de correlación de 0.32 sea considerablemente mayor que cero al nivel 0.05?

A un nivel 0.05 utilizando un ensayo unilateral de la distribución de Student, el valor mínimo de n debe ser tal que

$$\frac{0.32\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-(0.32)^2}} = t_{.95} \quad \text{para } n - 2 \text{ grados de libertad}$$

Para un número infinito de grados de libertad, $t_{.95} = 1.64$ y por tanto $n = 25.6$.

Para $n = 26$, $\nu = 24$, $t_{.95} = 1.71$, $t = 0.32\sqrt{24}/\sqrt{1-(0.32)^2} = 1.65$.

Para $n = 27$, $\nu = 25$, $t_{.95} = 1.71$, $t = 0.32\sqrt{25}/\sqrt{1-(0.32)^2} = 1.69$.

Para $n = 28$, $\nu = 26$, $t_{.95} = 1.71$, $t = 0.32\sqrt{26}/\sqrt{1-(0.32)^2} = 1.72$.

Entonces el tamaño mínimo de la muestra es $n = 28$.

8.49. Un coeficiente de correlación basado en una muestra de tamaño 24 se calculó era $r = 0.75$. ¿Podemos rechazar la hipótesis de que el coeficiente de correlación poblacional sea tan pequeño como (*a*) $\rho = 0.60$, (*b*) $\rho = 0.50$, a un nivel de significación del 0.05?

(*a*)
$$Z = 1.1513 \log\left(\frac{1+0.75}{1-0.75}\right) = 0.9730, \qquad \mu_Z = 1.1513 \log\left(\frac{1+0.60}{1-0.60}\right) = 0.6932,$$

$$\sigma_Z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = \frac{1}{\sqrt{21}} = 0.2182$$

La variable tipificada es

$$z = \frac{Z-\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{0.9730 - 0.6932}{0.2182} = 1.28$$

A un nivel de significación del 0.05 utilizando un ensayo unilateral de la distribución normal rechazaríamos la hipótesis solamente si z fuera mayor a 1.64. Por tanto no podemos rechazar la hipótesis de que el coeficiente de correlación sea tan pequeño como 0.60.

(*b*) Si $\rho = 0.50$, $\mu_Z = 1.1513 \log 3 = 0.5493$ y $z = (0.9730 - 0.5493)/0.2182 = 1.94$. Por tanto podemos rechazar la hipótesis de que el coeficiente de correlación poblacional sea tan pequeño como $\rho = 0.50$ a un nivel de significación del 0.05.

8.50. El coeficiente de correlación entre las calificaciones finales de física y matemáticas para un grupo de 21 estudiantes se calculó era 0.80. Hallar los límites de confianza del 95% para este coeficiente.

Puesto que $r = 0.80$ y $n = 21$, los límites de confianza del 95% para μ_Z vienen dados por

$$Z \pm 1.96\,\sigma_Z = 1.1513 \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \pm 1.96\left(\frac{1}{\sqrt{n-3}}\right) = 1.0986 \pm 0.4620$$

Entonces μ_Z tiene el intervalo de confianza del 95%; 0.5366 a 1.5606.

Si $\mu_Z = 1.1513 \log\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right) = 0.5366, \quad \rho = 0.4904.$

Si $\mu_Z = 1.1513 \log\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right) = 1.5606, \quad \rho = 0.9155.$

Por tanto los límites de confianza del 95% para ρ son 0.49 y 0.92.

8.51. Dos coeficientes de correlación obtenidos de muestras de tamaños $n_1 = 28$ y $n_2 = 35$ se calcularon como $r_1 = 0.50$ y $r_2 = 0.30$ respectivamente. ¿Hay una diferencia considerable entre los dos coeficientes a un nivel de 0.05?

$$Z_1 = 1.1513 \log\left(\frac{1+r_1}{1-r_1}\right) = 0.5493, \quad Z_2 = 1.1513 \log\left(\frac{1+r_2}{1-r_2}\right) = 0.3095$$

y
$$\sigma_{Z_1 - Z_2} = \sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}} = 0.2669$$

Deseamos decidir entre las hipótesis ($H_0: \mu_{Z_1} = \mu_{Z_2}$) y ($H_1: \mu_{Z_1} \neq \mu_{Z_2}$).

Bajo la hipótesis H_0,

$$z \;=\; \frac{Z_1 - Z_2 - (\mu_{Z_1} - \mu_{Z_2})}{\sigma_{Z_1 - Z_2}} \;=\; \frac{0.5493 - 0.3095 - 0}{0.2669} \;=\; 0.8985$$

Utilizando un ensayo bilateral de la distribución normal, rechazaríamos H_0 solamente si $z > 1.96$ ó $z < -1.96$. Por tanto no podemos rechazar H_0, y concluimos que los resultados no son considerablemente diferentes al nivel de 0.05.

PROBLEMAS DIVERSOS

8.52. Demostrar la fórmula *(25)*, página 262.

Para la recta de mínimos cuadrados tenemos, de los Problemas 8.20 y 8.21,

$$s^2_{y.x} \;=\; \frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n} - b\,\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}$$

Pero por definición,

$$\frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n} \;=\; s^2_y \qquad\qquad \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} \;=\; s_{xy}$$

y, por *(6)* en la página 260,

$$b \;=\; \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2} \;=\; \frac{s_{xy}}{s^2_x}$$

Por tanto

$$s^2_{y.x} \;=\; s^2_y - \frac{s^2_{xy}}{s^2_x} \;=\; s^2_y\left[1 - \left(\frac{s_{xy}}{s_x s_y}\right)^2\right] \;=\; s^2_y(1-r^2)$$

Una fórmula análoga es válida para la población (véase Problema 8.54).

8.53. Demostrar que $E[(Y-\bar{Y})^2] = E[(Y-Y_{\text{est}})^2] + E[(Y_{\text{est}}-\bar{Y})^2]$ para el caso de *(a)* una recta de mínimos cuadrados, *(b)* una parábola de mínimos cuadrados.

Tenemos
$$Y - \bar{Y} \;=\; (Y - Y_{\text{est}}) + (Y_{\text{est}} - \bar{Y})$$

Entonces
$$(Y-\bar{Y})^2 \;=\; (Y-Y_{\text{est}})^2 + (Y_{\text{est}}-\bar{Y})^2 + 2(Y-Y_{\text{est}})(Y_{\text{est}}-\bar{Y})$$

y así
$$E[(Y-\bar{Y})^2] \;=\; E[(Y-Y_{\text{est}})^2] + E[(Y_{\text{est}}-\bar{Y})^2] + 2E[(Y-Y_{\text{est}})(Y_{\text{est}}-\bar{Y})]$$

El resultado pedido se deduce si podemos demostrar que el último término es cero.

(a) Para regresión lineal, $Y_{\text{est}} = \alpha + \beta X$. Entonces

$$\begin{aligned} E[(Y-Y_{\text{est}})(Y_{\text{est}}-\bar{Y})] &= E[(Y-\alpha-\beta X)(\alpha+\beta X-\bar{Y})] \\ &= (\alpha-\bar{Y})E(Y-\alpha-\beta X) + \beta E(XY-\alpha X-\beta X^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

porque las ecuaciones normales

$$E(Y-\alpha-\beta X) \;=\; 0, \qquad E(XY-\alpha X-\beta X^2) \;=\; 0$$

(comparar con el Problema 8.3).

(b) Para regresión parabólica, $Y_{\text{est}} = \alpha + \beta X + \gamma X^2$. Entonces

$$\begin{aligned} E[(Y-Y_{\text{est}})(Y_{\text{est}}-\bar{Y})] &= E[(Y-\alpha-\beta X-\gamma X^2)(\alpha+\beta X+\gamma X^2-\bar{Y})] \\ &= (\alpha-\bar{Y})E(Y-\alpha-\beta X-\gamma X^2) + \beta E[X(Y-\alpha-\beta X-\gamma X^2)] \\ &\qquad + \gamma E[X^2(Y-\alpha-\beta X-\gamma X^2)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

debido a las ecuaciones normales

$$E(Y-\alpha-\beta X-\gamma X^2) = 0, \quad E[X(Y-\alpha-\beta X-\gamma X^2)] = 0, \quad E[X^2(Y-\alpha-\beta X-\gamma X^2)] = 0$$

Comparar las ecuaciones (*19*), página 261.

El resultado puede ampliarse a curvas de orden superior de mínimos cuadrados.

8.54. Demostrar que $\sigma^2_{Y.X} = \sigma^2_Y(1-\rho^2)$ para regresión de mínimos cuadrados.

Por definición del coeficiente de correlación generalizado ρ, junto con el Problema 8.53, tenemos para el caso lineal o parabólico

$$\rho^2 = \frac{E[(Y_{\text{est}}-\bar{Y})^2]}{E[(Y-\bar{Y})^2]} = 1 - \frac{E[(Y-Y_{\text{est}})^2]}{E[(Y-\bar{Y})^2]} = 1 - \frac{\sigma^2_{Y.X}}{\sigma^2_Y}$$

y el resultado se deduce inmediatamente.

También para órdenes superiores la relación sigue la curva de los mínimos cuadrados.

8.55. Demostrar que para el caso de regresión lineal el coeficiente de correlación definido por (*45*) se reduce al definido por (*40*).

El cuadrado del coeficiente de correlación, es decir, el *coeficiente de determinación*, dado por (*45*) en el caso de regresión lineal viene dado por

$$(1) \qquad \rho^2 = \frac{E[(Y_{\text{est}}-\bar{Y})^2]}{E[(Y-\bar{Y})^2]} = \frac{E[(\alpha+\beta X-\bar{Y})^2]}{\sigma^2_Y}$$

Pero dado que $\bar{Y} = \alpha + \beta\bar{X}$,

$$(2) \qquad E[(\alpha+\beta X-\bar{Y})^2] = E[\beta^2(X-\bar{X})^2] = \beta^2 E[(X-\bar{X})^2]$$

$$= \frac{\sigma^2_{XY}}{\sigma^4_X}\sigma^2_X = \frac{\sigma^2_{XY}}{\sigma^2_X}$$

Entonces (*1*) se convierte en

$$(3) \qquad \rho^2 = \frac{\sigma^2_{XY}}{\sigma^2_X\sigma^2_Y} \quad \text{ó} \quad \rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

que era lo que se pedía demostrar. (El signo correcto para ρ se incluye en σ_{XY}).

8.56. Referirse a la Tabla 8.21. (*a*) Hallar una parábola de regresión de mínimos cuadrados que se ajuste a los datos. (*b*) Calcular los valores de regresión (comúnmente llamados *valores de tendencia*) para los años dados y compararlos con los valores reales. (*c*) Estimar la población en 1945. (*d*) Estimar la población en 1960 y compararla con el valor real, 179.3. (*e*) Estimar la población en 1840 y compararla con el valor real, 17.1.

Tabla 8-21

Año	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950
Población en EE. UU. (millones)	23.2	31.4	39.8	50.2	62.9	76.0	92.0	105.7	122.8	131.7	151.1

Fuente: Bureau of the Census

(*a*) Denótese por las variables x, y el año y la población durante ese año respectivamente. La ecuación de la parábola de mínimos cuadrados que se ajusta a los datos es

$$(1) \qquad y = a + bx + cx^2$$

donde a, b, c se hallan de las ecuaciones normales

$$(2)\qquad \begin{aligned} \Sigma y &= an + b\Sigma x + c\Sigma x^2 \\ \Sigma xy &= a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3 \\ \Sigma x^2 y &= a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4 \end{aligned}$$

Conviene localizar el origen de modo que el año central, 1900, corresponda con $x = 0$, y los años 1910, 1920, 1930, 1940, 1950 y 1890, 1880, 1870, 1860, 1850 correspondan con 1, 2, 3, 4, 5 y $-1, -2, -3, -4, -5$ respectivamente. Con esta selección Σx y Σx^3 son cero y las ecuaciones (*2*) se simplifican.

El trabajo a realizarse para el cálculo puede ordenarse como en la Tabla 8-22. Las ecuaciones normales (*2*) se convierten en

$$(3)\qquad \begin{aligned} 11a + 110c &= 886.8 \\ 110b &= 1429.8 \\ 110a + 1958c &= 9209.0 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación en (*3*), $b = 13.00$; de la primera y tercera ecuaciones, $a = 76.64$, $c = 0.3974$. Entonces la ecuación pedida es

$$(4)\qquad y = 76.64 + 13.00\,x + 0.3974\,x^2$$

donde el origen, $x = 0$, es 1o. de julio de 1900 y la unidad de x es diez años.

Tabla 8-22

Año	x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
1850	−5	23.2	25	−125	625	−116.0	580.0
1860	−4	31.4	16	−64	256	−125.6	502.4
1870	−3	39.8	9	−27	81	−119.4	358.2
1880	−2	50.2	4	−8	16	−100.4	200.8
1890	−1	62.9	1	−1	1	−62.9	62.9
1900	0	76.0	0	0	0	0	0
1910	1	92.0	1	1	1	92.0	92.0
1920	2	105.7	4	8	16	211.4	422.8
1930	3	122.8	9	27	81	368.4	1105.2
1940	4	131.7	16	64	256	526.8	2107.2
1950	5	151.1	25	125	625	755.5	3777.5
	$\Sigma x = 0$	$\Sigma y =$ 886.8	$\Sigma x^2 =$ 110	$\Sigma x^3 = 0$	$\Sigma x^4 =$ 1958	$\Sigma xy =$ 1429.8	$\Sigma x^2y =$ 9209.0

(*b*) Los valores de tendencia, obtenidos al sustituir $x = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ en (*4*) se muestran en la Tabla 8-23 junto con los valores reales. Se observa que el ajuste es bueno.

Tabla 8-23

Año	$x = -5$ 1850	$x = -4$ 1860	$x = -3$ 1870	$x = -2$ 1880	$x = -1$ 1890	$x = 0$ 1900	$x = 1$ 1910	$x = 2$ 1920	$x = 3$ 1930	$x = 4$ 1940	$x = 5$ 1950
Valor de tendencia	21.6	31.0	41.2	52.2	64.0	76.6	90.0	104.2	119.2	135.0	151.6
Valor real	23.2	31.4	39.8	50.2	62.9	76.0	92.0	105.7	122.8	131.7	151.1

(*c*) 1945 corresponde a $x = 4.5$, para lo cual $y = 76.64 + 13.00(4.5) + 0.3974(4.5)^2 = 143.2$.

(*d*) 1960 corresponde a $x = 6$, para lo cual $y = 76.64 + 13.00(6) + 0.3974(6)^2 = 168.9$. Esto no se ajusta mucho al valor real, 179.3.

(*e*) 1840 corresponde a $x = -6$, para lo cual $y = 76.64 + 13.00(-6) + 0.3974(-6)^2 = 12.9$. Esto no se ajusta mucho al valor real 17.1.

Este ejemplo ilustra el hecho de que si se encuentra una relación satisfactoria para un intervalo de valores no implica necesariamente que lo sea para una prolongación del intervalo de valores.

8.57. Los precios promedios de acciones y obligaciones anotadas en el New York Stock Exchange durante los años 1950—1959 se dan en la Tabla 8-24. (*a*) Hallar el coeficiente de correlación, (*b*) interpretar los resultados.

Tabla 8-24

Año	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959
Precio promedio de acciones (dólares)	35.22	39.87	41.85	43.23	40.06	53.29	54.14	49.12	40.71	55.15
Precio promedio de obligaciones (dólares)	102.43	100.93	97.43	97.81	98.32	100.07	97.08	91.59	94.85	94.65

Fuente: New York Stock Exchange

(*a*) Denotando por x, y los precios promedio de acciones y obligaciones, el cálculo del coeficiente de correlación puede organizarse como en la Tabla 8-25. Nótese que el año se utiliza solamente para especificar los valores correspondientes de x, y.

Tabla 8-25

x	y	$x' = x - \bar{x}$	$y' = y - \bar{y}$	x'^2	$x'y'$	y'^2
35.22	102.43	−10.04	4.91	100.80	−49.30	24.11
39.87	100.93	−5.39	3.41	29.05	−18.38	11.63
41.85	97.43	−3.41	−0.09	11.63	0.31	0.01
43.23	97.81	−2.03	0.29	4.12	−0.59	0.08
40.06	98.32	−5.20	0.80	27.04	−4.16	0.64
53.29	100.07	8.03	2.55	64.48	20.48	6.50
54.14	97.08	8.88	−0.44	78.85	−3.91	0.19
49.12	91.59	3.86	−5.93	14.90	−22.89	35.16
40.71	94.85	−4.55	−2.67	20.70	12.15	7.13
55.15	94.65	9.89	−2.87	97.81	−28.38	8.24
$\Sigma x =$ 452.64 $\bar{x} =$ 45.26	$\Sigma y =$ 975.16 $\bar{y} =$ 97.52			$\Sigma x'^2 =$ 449.38	$\Sigma x'y' =$ −94.67	$\Sigma y'^2 =$ 93.69

Entonces por la fórmula producto-momento,

$$r = \frac{\Sigma x'y'}{\sqrt{(\Sigma x'^2)(\Sigma y'^2)}} = \frac{-94.67}{\sqrt{(449.38)(93.69)}} = -0.4614$$

(*b*) Se deduce que hay cierta correlación negativa entre los precios de acciones y obligaciones (es decir, una tendencia a disminuir los precios de las acciones cuando aumentan los de las obligaciones y viceversa), aunque esta relación no es muy marcada.

Otro método.

La Tabla 8-26 muestra las graduaciones de los precios promedios de acciones y obligaciones para los años 1950—1959 en orden de precios ascendentes. También se indican las diferencias en graduaciones d y Σd^2.

Tabla 8-26

Año	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	
Precios de acciones en orden de grad.	1	2	5	6	3	8	9	7	4	10	
Precios de obligaciones en orden de grad.	10	9	5	6	7	8	4	1	3	2	
Diferencia de graduación d	−9	−7	0	0	−4	0	5	6	1	8	
d^2	81	49	0	0	16	0	25	36	1	64	$\Sigma d^2 =$ 272

Entonces $$r_{\text{grad}} = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6(272)}{10(10^2-1)} = -0.6485$$

Esto se compara favorablemente con el resultado del primer método.

8.58. La Tabla 8.27 muestra las distribuciones de frecuencia de las calificaciones finales de 100 estudiantes en matemáticas y física. Refiriéndose a esta tabla determinar (*a*) el número de estudiantes que obtuvieron calificaciones 70—79 en matemáticas y 80—89 en física, (*b*) el porcentaje de estudiantes con calificaciones de matemáticas inferiores a 70, (*c*) el número de estudiantes que obtuvieron una calificación de 70 o más en física y menos de 80 en matemáticas, (*d*) el porcentaje de estudiantes que aprobaron al menos una de las asignaturas suponiendo que 60 es la calificación mínima de aprobación.

Tabla 8-27

CALIFICACIONES DE MATEMATICAS

CALIFICACIONES DE FISICA	**40—49**	**50—59**	**60—69**	**70—79**	**80—89**	**90—99**	TOTALES
90—99				2	4	4	10
80—89			1	4	6	5	16
70—79			5	10	8	1	24
60—69	1	4	9	5	2		21
50—59	3	6	6	2			17
40—49	3	5	4				12
TOTALES	7	15	25	23	20	10	100

(*a*) Bajando por la columna rotulada 70—79 (calificaciones de matemáticas) hasta la fila rotulada 80—89 (calificaciones de física). El resultado 4 da el número pedido de estudiantes.

(*b*) Número total de estudiantes con calificaciones inferiores a 70

= (No. con calif. 40—49) + (No. con calif. 50—59) + (No. con calif. 60—69)

= 7 + 15 + 25 = 47

Porcentaje de estudiantes con calificaciones menores a 70 = 47/100 = 47%.

(*c*) El número pedido de estudiantes es el total de las entradas en la Tabla 8-28, que representa parte de la Tabla 8-27.

Número de estudiantes pedidos $= 1 + 5 + 2 + 4 + 10 = 22$.

Tabla 8-28

CALIFICACIONES DE FISICA	CALIFICACIONES DE MATEMATICAS	
	60—69	70—79
90—99		2
80—89	1	4
70—79	5	10

Tabla 8-29

CALIFICACIONES DE FISICA	CALIFICACIONES DE MATEMATICAS	
	40—49	50—59
50—59	3	6
40—49	3	5

(*d*) Con referencia a la Tabla 8-29, que está sacada de la Tabla 8-27, se observa que el número de estudiantes con calificaciones menores a 60 en matemáticas y física es $3 + 3 + 6 + 5 = 17$. Entonces el número de estudiantes con calificaciones de 60 o más en física o matemáticas o en ambas es $100 - 17 = 83$, y el porcentaje pedido es $83/100 = 83\%$.

La Tabla 8-27 algunas veces se llama *tabla de frecuencias de doble variación* o *distribución de frecuencias de doble variación.* Cada cuadrado de la tabla se llama *casilla* y corresponde a un par de clases o intervalo de clase. El número indicado en la casilla se llama *frecuencia de casilla.* Por ejemplo, en la parte (*a*) el número 4 es la frecuencia de la casilla correspondiente al par de intervalos de clase 70—79 en matemáticas y 80—89 en física.

Los totales indicados en la última fila y en la última columna se llaman *totales marginales* o *frecuencias marginales.* Corresponden respectivamente a las frecuencias de clase de las distribuciones de frecuencia de las calificaciones de matemáticas y física por separado.

8.59. Mostrar cómo modificar la fórmula del Problema 8.31 para el caso de datos agrupados como en la Tabla 8-27.

Para datos agrupados, podemos considerar los diferentes valores de las variables x, y coincidiendo con las marcas de clase, en tanto que f_x y f_y son las correspondientes frecuencias de clase o frecuencias marginales indicadas en la última fila y columna de la tabla de frecuencias de doble variación. Si se representa por f las diferentes frecuencias de casilla correspondientes a los pares de marcas de clase (x, y), entonces podemos remplazar la fórmula del Problema 8.31 por

$$(1) \qquad r = \frac{n\Sigma fxy - (\Sigma f_x x)(\Sigma f_y y)}{\sqrt{[n\Sigma f_x x^2 - (\Sigma f_x x)^2][n\Sigma f_y y^2 - (\Sigma f_y y)^2]}}$$

Si hacemos $x = x_0 + c_x u_x$ y $y = y_0 + c_y u_y$, donde c_x, c_y son las amplitudes de los intervalos de clase (supuestos constantes) y x_0, y_0 son marcas de clase arbitrarias correspondientes a las variables, la fórmula anterior se convierte a

$$(2) \qquad r = \frac{n\Sigma fu_x u_y - (\Sigma f_x u_x)(\Sigma f_y u_y)}{\sqrt{[n\Sigma f_x u_x^2 - (\Sigma f_x u_x)^2][n\Sigma f_y u_y^2 - (\Sigma f_y u_y)^2]}}$$

Este es el *método clave* utilizado en el Capítulo 5 como un método breve para calcular medias, desviaciones típicas y momentos superiores.

8.60. Hallar el coeficiente de correlación lineal de las calificaciones de matemáticas y física del Problema 8.58.

Utilizamos la fórmula (*2*) del Problema 8.59. El trabajo puede ordenarse como en la Tabla 8-30, que se llama *tabla de correlación.*

Tabla 8-30

			Calificaciones de matemáticas, x									
		x	44.5	54.5	64.5	74.5	84.5	94.5	f_y	$f_y u_y$	$f_y u_y^2$	Suma de los números esquinados en cada fila
	y	u_x / u_y	-2	-1	0	1	2	3				
Calificaciones de Física, y	94.5	2				2 $\boxed{4}$	4 $\boxed{16}$	4 $\boxed{24}$	10	20	40	44
	84.5	1			1 $\boxed{0}$	4 $\boxed{4}$	6 $\boxed{12}$	5 $\boxed{15}$	16	16	16	31
	74.5	0			5 $\boxed{0}$	10 $\boxed{0}$	8 $\boxed{0}$	1 $\boxed{0}$	24	0	0	0
	64.5	-1	1 $\boxed{2}$	4 $\boxed{4}$	9 $\boxed{0}$	5 $\boxed{-5}$	2 $\boxed{-4}$		21	-21	21	-3
	54.5	-2	3 $\boxed{12}$	6 $\boxed{12}$	6 $\boxed{0}$	2 $\boxed{-4}$			17	-34	68	20
	44.5	-3	3 $\boxed{18}$	5 $\boxed{15}$	4 $\boxed{0}$				12	-36	108	33
	f_x		7	15	25	23	20	10	$\Sigma f_x = \Sigma f_y = n = 100$	$\Sigma f_y u_y = -55$	$\Sigma f_y u_y^2 = 253$	$\Sigma f u_x u_y = 125$
	$f_x u_x$		-14	-15	0	23	40	30	$\Sigma f_x u_x = 64$			
	$f_x u_x^2$		28	15	0	23	80	90	$\Sigma f_x u_x^2 = 236$			
	Suma de los números esquinados en cada columna		32	31	0	-1	24	39	$\Sigma f u_x u_y = 125$			

Verificación

El número en la esquina de cada casilla representa el producto $f u_x u_y$, donde f es la frecuencia de casilla. La suma de esos números esquinados en cada fila se indica en la fila correspondiente en la última columna. La suma de esos números esquinados en cada columna se indica en la columna correspondiente en la última fila. Los totales finales de la última fila y columna son iguales y representan $\Sigma f u_x u_y$.

De la Tabla 8-30 tenemos

$$r = \frac{n\Sigma f u_x u_y - (\Sigma f_x u_x)(\Sigma f_y u_y)}{\sqrt{[n\Sigma f_x u_x^2 - (\Sigma f_x u_x)^2][n\Sigma f_y u_y^2 - (\Sigma f_y u_y)^2]}}$$

$$= \frac{(100)(125) - (64)(-55)}{\sqrt{[(100)(236) - (64)^2][(100)(253) - (-55)^2]}} = \frac{16{,}020}{\sqrt{(19{,}504)(22{,}275)}} = 0.7686$$

8.61. Utilizar la tabla de correlación del Problema 8.60 para calcular (*a*) s_x, (*b*) s_y, (*c*) s_{xy} y verificar la fórmula

(*a*)
$$s_x = c_x\sqrt{\frac{\Sigma f_x u_x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f_x u_x}{n}\right)^2} = 10\sqrt{\frac{236}{100} - \left(\frac{64}{100}\right)^2} = 13.966$$

(*b*)
$$s_y = c_y\sqrt{\frac{\Sigma f_y u_y^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f_y u_y}{n}\right)^2} = 10\sqrt{\frac{253}{100} - \left(\frac{-55}{100}\right)^2} = 14.925$$

(*c*)
$$s_{xy} = c_x c_y\left[\frac{\Sigma f u_x u_y}{n} - \left(\frac{\Sigma f_x u_x}{n}\right)\left(\frac{\Sigma f_y u_y}{n}\right)\right] = (10)(10)\left[\frac{125}{100} - \left(\frac{64}{100}\right)\left(\frac{-55}{100}\right)\right] = 160.20$$

Por tanto las desviaciones típicas de las calificaciones de matemáticas y física son 14.0 y 14.9 respectivamente, en tanto que su covarianza es 160.2. Tenemos

$$\frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{160.20}{(13.966)(14.925)} = 0.7686$$

que concuerda con r hallado en el Problema 8.60.

8.62. Escribir las ecuaciones de las rectas de regresión de (*a*) y sobre x, (*b*) x sobre y para los datos del Problema 8.60.

De la Tabla 8-30 tenemos,

$$\bar{x} = x_0 + c_x \frac{\Sigma f_x u_x}{n} = 64.5 + \frac{(10)(64)}{100} = 70.9$$

$$\bar{y} = y_0 + c_y \frac{\Sigma f_y u_y}{n} = 74.5 + \frac{(10)(-55)}{100} = 69.0$$

De los resultados del Problema 8.61 $s_x = 13.966$, $s_y = 14.925$ y $r = 0.7686$.

Entonces utilizamos (*16*), página 261, para obtener las ecuaciones de las rectas de regresión

(*a*) $$y - \bar{y} = \frac{rs_y}{s_x}(x - \bar{x}), \qquad y - 69.0 = \frac{(0.7686)(14.925)}{13.966}(x - 70.9),$$

ó $$y - 69.0 = 0.821(x - 70.9)$$

(*b*) $$x - \bar{x} = \frac{rs_x}{s_y}(y - \bar{y}), \qquad x - 70.0 = \frac{(0.7686)(13.966)}{14.925}(y - 69.0),$$

ó $$x - 70.9 = 0.719(y - 69.0)$$

8.63. Calcular los errores típicos de la estima (*a*) $s_{y.x}$, (*b*) $s_{x.y}$ para los datos del Problema 8.60. Utilizar los resultados del Problema 8.61.

(*a*) $s_{y.x} = s_y\sqrt{1 - r^2} = 14.925\sqrt{1 - (0.7686)^2} = 9.548$

(*b*) $s_{x.y} = s_x\sqrt{1 - r^2} = 13.966\sqrt{1 - (0.7686)^2} = 8.934$

Problemas suplementarios

RECTA DE MINIMOS CUADRADOS

8.64. Ajustar una recta de mínimos cuadrados a los datos de la Tabla 8-31 utilizando a (*a*) x como la variable independiente, (*b*) x como la variable dependiente. Representar gráficamente los datos y las rectas de mínimos cuadrados utilizando el mismo conjunto de ejes coordenados.

Tabla 8-31

x	3	5	6	8	9	11
y	2	3	4	6	5	8

8.65 Para los datos del Problema 8.64, hallar (*a*) los valores de y cuando $x = 5$, $x = 12$. (*b*) el valor de x para $y = 7$.

8.66. (*a*) Utilizar el método a mano alzada para obtener la ecuación para una recta de ajuste de los datos del Problema 8.64. (*b*) Solucionar el Problema 8.65 utilizando el resultado de la parte (*a*).

8.67. La Tabla 8-32 muestra las calificaciones finales en álgebra y física obtenidas por diez estudiantes seleccionados aleatoriamente de un gran grupo de estudiantes. (*a*) Representar gráficamente los datos. (*b*) Hallar la recta de mínimos cuadrados que se ajuste a los datos, utilizando a x como la variable independiente. (*c*) Hallar la recta de mínimos cuadrados que se ajuste a los datos, utilizando a y como la variable independiente. (*d*) Si un estudiante obtiene una calificación de 75 en álgebra, ¿cuál es su puntuación esperada en física? (*e*) Si un estudiante obtiene una puntuación de 95 en física, ¿cuál es su puntuación esperada en álgebra?

Tabla 8-32

Algebra (x)	75	80	93	65	87	71	98	68	84	77
Física (y)	82	78	86	72	91	80	95	72	89	74

8.68. Con referencia a la Tabla 8-33. (*a*) Construir un diagrama de dispersión. (*b*) Hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados de y sobre x. (*c*) Hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados de x sobre y. (*d*) Representar gráficamente las dos rectas de regresión de (*b*) y (*c*) sobre el diagrama de dispersión de (*a*).

Tabla 8-33

Calificación en el primer examen	6	5	8	8	7	6	10	4	9	7
Calificación en el segundo examen	8	7	7	10	5	8	10	6	8	6

CURVAS DE REGRESION DE MINIMOS CUADRADOS

8.69. Ajustar una parábola de mínimos cuadrados, $y = a + bx + cx^2$ a los datos de la Tabla 8-34.

Tabla 8-34

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2.4	2.1	3.2	5.6	9.3	14.6	21.9

8.70. La Tabla 8-35 da las distancias de parada d (pies) de un automóvil que viaja a una velocidad v (millas por horas) en el instante que se observa el peligro. (*a*) Representar gráficamente d, v. (*b*) Ajustar una parábola de mínimos cuadrados de la forma $d = a + bv + cv^2$ a los datos. (*c*) Estimar d cuando $v = 45$ mi/h y 80 mi/h.

Tabla 8-35

Velocidad, v (mi/h)	20	30	40	50	60	70
Distancia de parada d(p)	54	90	138	206	292	396

8.71. El número y de bacterias por unidad de volumen presentes en un cultivo después de x horas viene dado en la Tabla 8-36. (*a*) Representar los datos en papel semi-logaritmo, con la escala logarítmica para y, la escala aritmética para x. (*b*) Ajustar una curva de mínimos cuadrados de la forma $y = ab^x$ a los datos y explicar por qué esta ecuación específica da buenos resultados. (*c*) Comparar los valores de y obtenidos de esta ecuación con los valores reales. (*d*) Estimar el valor de y cuando $x = 7$.

Tabla 8-36

Números de horas (x)	0	1	2	3	4	5	6
Número de bacterias por unidad de volumen (y)	32	47	65	92	132	190	275

8.72. En el Problema 8.71 mostrar cómo una gráfica en papel semilogarítmico puede utilizarse para obtener la ecuación pedida sin emplear el método de los mínimos cuadrados.

8.73. Escribir las ecuaciones normales para la curva cúbica de mínimos cuadrados dada por $y = a + bx + cx^2 + dx^3$.

REGRESION MULTIPLE

8.74. La Tabla 8-37 muestra los valores correspondientes de tres variables x, y, z. (*a*) Hallar la ecuación de regresión lineal de mínimos cuadrados de z sobre x, y. (*b*) Estimar z cuando $x = 10$, $y = 6$.

Tabla 8-37

x	3	5	6	8	12	14
y	16	10	7	4	3	2
z	90	72	54	42	30	12

8.75. Demostrar que la ecuación para regresión lineal de z sobre x, y puede escribirse como

$$z - \bar{z} = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y})$$

y obtener expresiones para los coeficientes de regresión de mínimos cuadrados a, b.

8.76. Utilizar el resultado del Problema 8.75 para solucionar el Problema 8.74.

8.77. Obtener las ecuaciones normales para la regresión lineal de mínimos cuadrados de w sobre x, y, z. ¿Hay alguna interpretación geométrica para esto? Explicar.

8.78. Una superficie de regresión de z sobre x, y tiene la forma

$$z = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2$$

Obtener las ecuaciones normales para los coeficientes de regresión de mínimos cuadrados.

ERROR TIPICO DE LA ESTIMA Y COEFICIENTE DE CORRELACION LINEAL

8.79. Hallar (*a*) $s_{y.x}$, (*b*) $s_{x.y}$ para los datos en el Problema 8.68.

8.80. Calcular (*a*) la variación total en y, (*b*) la variación no explicada en y, (*c*) la variación explicada en y para los datos del Problema 8.68.

8.81. Utilizar los resultados del Problema 8.80 para hallar el coeficiente de correlación entre los dos conjuntos de calificaciones de los exámenes del Problema 8.68.

8.82. (*a*) Hallar el coeficiente de correlación entre los dos conjuntos de calificaciones de los exámenes del Problema 8.68 utilizando la fórmula producto-momento y comparar con el resultado del Problema 8.81. (*b*) Obtener el coeficiente de correlación directamente de las pendientes de las rectas de regresión del Problema 8.68(*b*) y (*c*).

8.83. Hallar la covarianza para los datos del Problema 8.68 (*a*) directamente, (*b*) utilizando la fórmula $s_{xy} = rs_x s_y$ y el resultado del Problema 8.81 u 8.82.

8.84. La Tabla 8.38 muestra las edades x y la presión sanguínea y de 12 mujeres. (*a*) Hallar el coeficiente de correlación entre x, y. (*b*) Determinar la recta de regresión de mínimos cuadrados de y sobre x. (*c*) Estimar la presión sanguínea de una mujer de 45 años.

Tabla 8-38

Edad (x)	56	42	72	36	63	47	55	49	38	42	68	60
Presión Sanguínea (y)	147	125	160	118	149	128	150	145	115	140	152	155

8.85. Hallar los coeficientes de correlación para los datos del (*a*) Problema 8.64, (*b*) Problema 8.67.

8.86. El coeficiente de correlación entre dos variables x, y es $r = 0.60$. Si $s_x = 1.50$, $s_y = 2.00$, $\bar{x} = 10$, $\bar{y} = 20$, hallar las ecuaciones de la recta de regresión de (*a*) y sobre x, (*b*) x sobre y.

8.87. Calcular (*a*) $s_{y.x}$, (*b*) $s_{x.y}$ para los datos del Problema 8.86.

8.88. Si $s_{y.x} = 3$ y $s_y = 5$, hallar r.

8.89. Si el coeficiente de correlación entre x, y es 0.50, ¿qué porcentaje de la variación total permanece no explicada por la ecuación de regresión?

8.90. (*a*) Calcular el coeficiente de correlación entre los valores correspondientes de x, y dados en la Tabla 8-39. (*b*) Multiplicar todos los valores de x por 2 y sumarles 6. Multiplicar todos los valores de y por 3 y restarles 15. Hallar el coeficiente de correlación entre los dos nuevos conjuntos de valores, explicar por qué se obtiene o no el mismo resultado que en la parte (*a*).

Tabla 8-39

x	2	4	5	6	8	11
y	18	12	10	8	7	5

COEFICIENTE DE CORRELACION GENERALIZADO

8.91. Hallar el coeficiente de correlación para las variables en el Problema 8.68 utilizando el resultado (*35*), página 264.

8.92. Hallar el error típico de la estima de z sobre x, y para los datos del Problema 8.74.

8.93. (*a*) Calcular el coeficiente de correlación múltiple para los datos del Problema 8.74. (*b*) ¿Qué porcentaje de la variación total es explicada por la superficie de regresión?

8.94. Demostrar el resultado (*27*), página 263, para el caso de una superficie de regresión lineal para z sobre x, y.

CORRELACION GRADUAL

8.95. Dos jueces en una competencia debían clasificar a 8 candidatos A, B, C, D, E, F, G, H de acuerdo con sus preferencias, los resultados se muestran en la Tabla 8-40. Hallar el coeficiente de correlación gradual y decidir sobre el acuerdo de los jueces en sus elecciones.

Tabla 8-40

Candidato	A	B	C	D	E	F	G	H
Primer Juez	5	2	8	1	4	6	3	7
Segundo Juez	4	5	7	3	2	8	1	6

8.96. Hallar el coeficiente de correlación gradual para los datos del (*a*) Problema 8.68 y (*b*) Problema 8.84.

8.97. (*a*) Hallar el coeficiente de correlación gradual para los datos del Problema 8.90. (*b*) De sus observaciones en (*a*), estudiar una posible desventaja del método de correlación gradual.

8.98. Mostrar cómo se puede diseñar un coeficiente de correlación múltiple.

INTERPRETACION PROBABILISTICA DE LA REGRESION Y LA CORRELACION

8.99. La función de densidad conjunta de las variables aleatorias X, Y viene dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x + 3y & 0 < x < 1, \ 0 < y < 2 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Hallar la curva de regresión de (*a*) Y sobre X, (*b*) X sobre Y.

8.100. Hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados de (*a*) Y sobre X, (*b*) X sobre Y para el Problema 8.99.

8.101. Obtener el coeficiente de correlación lineal para el Problema 8.99.

8.102. Hallar la curva de regresión de (*a*) Y sobre X, (*b*) X sobre Y para los datos del Problema 2.8, página 52.

8.103. Hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados de (*a*) Y sobre X, (*b*) X sobre Y para los datos del Problema 2.8, página 52.

8.104. Hallar el coeficiente de correlación lineal para las variables aleatorias del Problema 2.8, página 52.

8.105. Dar un ejemplo para demostrar cómo hallaría (*a*) el error típico de la estima, (*b*) las variaciones explicada y no explicada, (*c*) el coeficiente de correlación generalizado, en el caso de dos variables aleatorias X, Y con función de densidad conjunta (o función de probabilidad conjunta) $f(x, y)$.

8.106. ¿Ocurren algunas simplificaciones en las curvas de regresión de Y sobre X ó X sobre Y para el caso de variables aleatorias independientes? Explicar.

TEORIA MUESTRAL DE LA REGRESION

8.107. Sobre la base de una muestra de tamaño 27 se encontró que la ecuación de regresión de y sobre x era $y = 25.0 + 2.00\,x$. Si $s_{y.x} = 1.50, s_x = 3.00$ y $\bar{x} = 7.50$, hallar los límites de confianza del (a) 95%, (b) 99% para el coeficiente de regresión.

8.108. En el Problema 8.107 ensayar la hipótesis de que el coeficiente de regresión poblacional es (a) tan bajo como 1.70, (b) tan alto como 2.20, a un nivel de significación del 0.01.

8.109. En el Problema 8.107 hallar los límites de confianza del (a) 95%,(b) 99% para y cuando $x = 6.00$.

8.110. En el Problema 8.107 hallar los límites de confianza del (a) 95%,(b) 99%para la media de todos los valores de y correspondientes a $x = 6.00$.

8.111. Con referencia al Problema 8.84, hallar los límites de confianza del 95% para (a) el coeficiente de regresión de y sobre x, (b) la presión sanguínea de las mujeres de 45 años, (c) la media de las presiones sanguíneas de las mujeres de 45 años.

TEORIA MUESTRAL DE LA CORRELACION

8.112. Un coeficiente de correlación basado sobre una muestra de tamaño 27 se calculó como 0.40. ¿Podemos concluir a un nivel de significación del (a) 0.05, (b) 0.01, que el correspondiente coeficiente de correlación poblacional es considerablemente mayor que cero?

8.113. Un coeficiente de correlación basado sobre una muestra de tamaño 35 se calculó como 0.50. ¿Podemos rechazar la hipótesis de que el coeficiente de correlación poblacional es (a) tan pequeño como $\rho = 0.30$, (b) tan grande como $\rho = 0.70$, utilizando un nivel de significación del 0.05?

8.114. Hallar los límites de confianza del (a) 95%,(b) 99%para un coeficiente de correlación que se calculó como 0.60 de una muestra de tamaño 28.

8.115. Solucionar el Problema 8.114 si el tamaño de la muestra es 52.

8.116. Hallar los límites de confianza del 95% para el coeficiente de correlación calculado en el Problema 8.84.

8.117. Dos coeficientes de correlación obtenidos de muestras de tamaños 23 y 28 se calcularon como 0.80 y 0.95 respectivamente. ¿Podemos concluir a un nivel del (a) 0.05, (b) 0.01, que hay una diferencia significativa entre los dos coeficientes?

RESULTADOS DIVERSOS

8.118. Verificar los coeficientes (5), página 260, para la recta de mínimos cuadrados.

8.119. Demostrar que para el caso de regresión lineal el valor mínimo de $E\{[Y - (\alpha + \beta X)]^2\}$ es

$$\sigma^2_{Y.X} = \sigma^2_Y(1 - \rho^2)$$

8.120. Las rectas de regresión muestrales de mínimos cuadrados para un conjunto de datos involucrando X, Y vienen dadas por $2x - 5y = 3$, $5x - 8y = 2$. Hallar el coeficiente de correlación lineal.

8.121. Demostrar que el ángulo entre dos rectas de regresión muestrales de mínimos cuadrados viene dado por

$$\tan^{-1}\left[\frac{(1 - r^2)s_x s_y}{r(s_x^2 + s_y^2)}\right]$$

8.122. Demostrar que el coeficiente de correlación entre x, y puede expresarse como

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{[\overline{x^2} - \bar{x}^2][\overline{y^2} - \bar{y}^2]}}$$

8.123. Demostrar que el coeficiente de correlación es independiente de la elección del origen de las variables o de las unidades en que se expresan. (*Sugerencia:* Suponga que $x' = x_0 + c_1 x$, $y' = y_0 + c_2 y$, donde x_0, y_0, c_1, c_2 son constantes arbitrarias, demuestre que el coeficiente de correlación entre x', y' es el mismo que el entre x, y).

8.124. Demostrar que para regresión lineal $\frac{s_{y.x}^2}{s_y^2} = \frac{s_{x.y}^2}{s_x^2}$. ¿Es el resultado válido para regresión no lineal?

8.125. Hallar el coeficiente de correlación entre las estaturas y pesos de 300 adultos dados en la tabla de frecuencias siguiente.

Tabla 8-41

ESTATURAS x (pulgadas)

		59–62	63–66	67–70	71–74	75–78
PESOS y (libras)	90–109	2	1			
	110–129	7	8	4	2	
	130–149	5	15	22	7	1
	150–169	2	12	63	19	5
	170–189		7	28	32	12
	190–209		2	10	20	7
	210–229			1	4	2

8.126. (*a*) Hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados de y sobre x para los datos del Problema 8.125. (*b*) Estimar los pesos de dos hombres cuyas estaturas son 64 y 72 pulgadas respectivamente.

8.127. Hallar (*a*) $s_{y.x}$, (*b*) $s_{x.y}$ para los datos del Problema 8.125.

8.128. Hallar los límites de confianza del 95% para el coeficiente de correlación calculado en el Problema 8.125.

8.129. Hallar el coeficiente de correlación entre los índices de precios al consumidor y los índices de precios al por mayor para todos los artículos indicados en la Tabla 8-42. El período base es de 1947 − 1949 = 100.

Tabla 8-42

Año	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
Indice de precios al consumidor	101.8	102.8	111.0	113.5	114.4	114.8	114.5	116.2	120.2	123.5
Indice de precios al por mayor	99.2	103.1	114.8	111.6	110.1	110.3	110.7	114.3	117.6	119.2

Fuente: Bureau of Labor Statistics

8.130. Con referencia a la Tabla 8-43. (*a*) Representar gráficamente los datos. (*b*) Hallar la recta de mínimos cuadrados que se ajusta a los datos y construir su gráfica. (*c*) Calcular los valores de tendencia y compararlos con los valores reales. (*d*) Predecir el índice de precio para la asistencia médica durante 1958 y compararlo con el valor verdadero (144.4). (*e*) ¿En qué año podemos esperar que el índice de costos médicos doble el del 1947-1949, suponiendo que las tendencias presentes continúen?

Tabla 8-43

Año	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Indice de precios al consumidor por asistencia médica (1947 − 1949 = 100)	106.0	111.1	117.2	121.3	125.2	128.0	132.6	138.0

Fuente: Bureau of Labor Statistics

8.131. Con referencia a la Tabla 8-44. (*a*) Representar gráficamente los datos. (*b*) Hallar la parábola de mínimos cuadrados que se ajuste a los datos. (*c*) Calcular los valores de tendencia y compararlos con los valores reales. (*d*) Explicar por qué la ecuación en (*b*) no es útil para propósitos de extrapolación.

Tabla 8-44

Año	1915	1920	1925	1930	1935	1940	1945	1950	1955
Natalidad por cada 1000 habitantes	25.0	23.7	21.3	18.9	16.9	17.9	19.5	23.6	24.6

Fuente: Department of Health, Education and Welfare

8.132. Sean X, Y variables aleatorias con función de densidad conjunta (o función de probabilidad) $f(x, y)$. Demostrar que si $g(x) = E(Y \mid X = x)$ entonces

$$E\{[Y - \phi(X)]^2\} = E\{[Y - g(X)]^2\} + E\{[g(X) - \phi(X)]^2\}$$

donde $\phi(x)$ es cualquier función de x para el cual estas esperanzas existen.

8.133. Estudiar la relación, si la hay, del Problema 8.132 para variaciones explicadas y no explicadas.

8.134. Demostrar el Teorema 8-1, página 265. (*Sugerencia:* Utilizar el Problema 8.132).

8.135. En el Teorema 8-1, ¿es $g(x)$ única? Explicar.

8.136. Demostrar el Teorema 8-2, página 265.

Capítulo 9

Análisis de varianza

PROPOSITO DEL ANALISIS DE VARIANZA

En el Capítulo 7 utilizamos la teoría de muestreo para ensayar la significación de diferencias entre dos medias muestrales. Supusimos que las dos poblaciones, de las cuales se extrajeron las muestras, tenían la misma varianza. En muchas situaciones existe la necesidad de ensayar la significación de diferencias entre tres o más medias muestrales, o lo que es equivalente a ensayar la hipótesis nula de que las medias muestrales son iguales.

EJEMPLO 9.1. Supóngase que en un experimento agrícola cuatro tratamientos químicos diferentes del suelo producen rendimientos medios de trigo de 28, 22, 18 y 24 hl/ha respectivamente. ¿Hay una diferencia apreciable en estas medias o la dispersión observada simplemente se debe al azar?

Problemas como estos pueden resolverse utilizando una técnica importante conocida como *análisis de varianza*, desarrollada por Fisher. Utiliza la distribución F considerada anteriormente en los capítulos previos.

CLASIFICACION SIMPLE O EXPERIMENTOS DE UN FACTOR

En un *experimento de un factor* se obtienen medidas u observaciones para a grupos independientes de muestras, donde el número de medidas en cada grupo es b. Hablamos de a *tratamientos*, cada uno de los cuales tiene b *repeticiones* o *réplicas*. En el Ejemplo 9.1, $a = 4$.

Los resultados de un experimento de un factor pueden representarse en una tabla con a filas y b columnas (Tabla 9-1). Aquí x_{jk} denota la medida en la fila j y la columna k, donde $j = 1, 2, \ldots, a$; $k = 1, 2, \ldots, b$. Por ejemplo, x_{35} se refiere a la quinta medida para el tercer tratamiento.

Tabla 9-1

Tratamiento 1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1b}	$\bar{x}_{1.}$
Tratamiento 2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{1b}	$\bar{x}_{2.}$
$\vdots$		$\vdots$			
Tratamiento a	x_{a1}	x_{a2}	$\cdots$	x_{ab}	$\bar{x}_{a.}$

Denotaremos por $\bar{x}_{j.}$ la media de las medidas en la fila j. Tenemos

$$\bar{x}_{j.} = \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b} x_{jk} \qquad j = 1, 2, \ldots, a \tag{1}$$

El punto en $\bar{x}_{j.}$ se utiliza para indicar que el índice k se ha sumado. Los valores $\bar{x}_{j.}$ se denominan *medias de grupo, medias de tratamiento* o *medias de fila*. La *gran media* o *media total* es la media de todas las medidas en todos los grupos y se denota por $\bar{x}$, esto es

$$\bar{x} = \frac{1}{ab}\sum_{j,k} x_{jk} = \frac{1}{ab}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} x_{jk} \tag{2}$$

VARIACION TOTAL. VARIACION DENTRO DE TRATAMIENTOS. VARIACION ENTRE TRATAMIENTOS

Definimos la *variación total*, denotada por v, como la suma de los cuadrados de las desviaciones de cada medida de la gran media $\bar{x}$, es decir

$$\text{Variación total} \;=\; v \;=\; \sum_{j,k} (x_{jk} - \bar{x})^2 \tag{3}$$

Al escribir la identidad

$$x_{jk} - \bar{x} \;=\; (x_{jk} - \bar{x}_{j.}) + (\bar{x}_{j.} - \bar{x}) \tag{4}$$

y luego elevando al cuadrado y sumando sobre j y k podemos demostrar (véase Problema 9.1) que

$$\sum_{j,k} (x_{jk} - \bar{x})^2 \;=\; \sum_{j,k} (x_{jk} - \bar{x}_{j.})^2 + \sum_{j,k} (\bar{x}_{j.} - \bar{x})^2 \tag{5}$$

ó

$$\sum_{j,k} (x_{jk} - \bar{x})^2 \;=\; \sum_{j,k} (x_{jk} - \bar{x}_{j.})^2 + b \sum_{j} (\bar{x}_{j.} - \bar{x})^2 \tag{6}$$

A la primera suma a la derecha de (*5*) o (*6*) las llamamos *variación dentro de tratamientos* (puesto que incluye los cuadrados de las desviaciones de x_{jk} con respecto a las medias de tratamiento $\bar{x}_{j.}$) y la denotamos por v_w. Por tanto

$$v_w \;=\; \sum_{j,k} (x_{jk} - \bar{x}_{j.})^2 \tag{7}$$

La segunda suma a la derecha de (*5*) o (*6*) se llama la *variación entre tratamientos* (ya que involucra los cuadrados de las desviaciones de las diferentes medias de tratamiento $\bar{x}_{j.}$ de la gran media $\bar{x}$) y se denota por v_b. Por tanto

$$v_b \;=\; \sum_{j,k} (\bar{x}_{j.} - \bar{x})^2 \;=\; b \sum_{j} (\bar{x}_{j.} - \bar{x})^2 \tag{8}$$

Así las ecuaciones (*5*) o (*6*) pueden escribirse como

$$v \;=\; v_w + v_b \tag{9}$$

METODOS CORTOS PARA OBTENER VARIACIONES

Para minimizar el trabajo en calcular las variaciones anteriores son convenientes las formas siguientes:

$$v \;=\; \sum_{j,k} x_{jk}^2 - \frac{\tau^2}{ab} \tag{10}$$

$$v_b \;=\; \frac{1}{b} \sum_{j} \tau_{j.}^2 - \frac{\tau^2}{ab} \tag{11}$$

$$v_w \;=\; v - v_b \tag{12}$$

donde τ es el total de todos los valores x_{jk} y $\tau_{j.}$ es el total de todos los valores en el tratamiento j, esto es

$$\tau \;=\; \sum_{j,k} x_{jk} \qquad\qquad \tau_{j.} \;=\; \sum_{k} x_{jk} \tag{13}$$

En la práctica es conveniente restar algún valor fijo de todos los datos en la tabla; esto no tiene efecto en los resultados finales.

MODELO MATEMATICO LINEAL PARA ANALISIS DE VARIANZA

Podemos considerar que cada fila de la Tabla 9-1 representa una muestra aleatoria de tamaño b de la población para ese tratamiento particular. Así, para el tratamiento j tenemos las variables aleatorias X_{j1}, X_{j2}, . . . , X_{jb} independientes y distribuidas idénticamente, las cuales toman los valores

$x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jb}$ respectivamente. Cada una de las X_{jk} $(k = 1, 2, \ldots, b)$ puede expresarse como la suma de su valor esperado y un término de "error":

$$X_{jk} = \mu_j + \Delta_{jk} \tag{14}$$

Los Δ_{jk} pueden tomarse como variables aleatorias independientes (relativas a j y k), distribuidas normalmente con media cero y varianza σ^2. Esto equivale a suponer que las X_{jk} $(j = 1, 2, \ldots, a; k = 1, 2, \ldots, b)$ son variables normales, mutuamente independientes con medias μ_j y varianza común σ^2.

Definamos la constante μ por

$$\mu = \frac{1}{a}\sum_j \mu_j$$

Podemos interpretar a μ como la media para una clase de gran población que comprende todas las poblaciones de tratamiento. Entonces (*14*) puede escribirse como (véase Problema 9.18).

$$X_{jk} = \mu + \alpha_j + \Delta_{jk} \qquad \text{donde} \qquad \sum_j \alpha_j = 0 \tag{15}$$

La constante α_j puede considerarse como el efecto especial del tratamiento j.

La hipótesis nula de que todas las medias de tratamiento son iguales viene dada por $(H_0\colon \alpha_i = 0; j = 1, 2, \ldots, a)$ o en forma equivalente por $(H_0\colon \mu_i = \mu; j = 1, 2, \ldots, a)$. Si H_0 es cierta, las poblaciones de tratamiento, que por suposición son normales, tienen una media común como también una varianza común. Por tanto solamente hay una población de tratamiento y todos los tratamientos son estadísticamente idénticos.

VALORES ESPERADOS DE LAS VARIACIONES

La variación entre tratamientos V_b, la variación dentro de tratamientos V_w y la variación total V son variables aleatorias que respectivamente toman los valores v_b, v_w y v de acuerdo con las definiciones (*8*), (*7*) y (*3*). Podemos demostrar que (véase Problema 9.19)

$$E(V_b) = (a-1)\sigma^2 + b\sum_j \alpha_j^2 \tag{16}$$

$$E(V_w) = a(b-1)\sigma^2 \tag{17}$$

$$E(V) = (ab-1)\sigma^2 + b\sum \alpha_j^2 \tag{18}$$

De (*17*) se deduce que

$$E\left[\frac{V_w}{a(b-1)}\right] = \sigma^2 \tag{19}$$

de modo que

$$\hat{S}_w^2 = \frac{V_w}{a(b-1)} \tag{20}$$

es siempre la mejor estima (insesgada) de σ^2 independiente de si H_0 es cierta o no. De otra parte, de (*16*) y (*18*) vemos que sólo si H_0 es cierta tendremos

$$E\left(\frac{V_b}{a-1}\right) = \sigma^2 \qquad E\left(\frac{V}{ab-1}\right) = \sigma^2 \tag{21}$$

de modo que solamente en ese caso

$$\hat{S}_b^2 = \frac{V_b}{a-1} \qquad \hat{S}^2 = \frac{V}{ab-1} \tag{22}$$

proveerá estimas insesgadas de σ^2. Sin embargo, si H_0 no es cierta, entonces tenemos de (*16*)

$$E(\hat{S}_b^2) = \sigma^2 + \frac{b}{a-1}\sum_j \alpha_j^2 \tag{23}$$

DISTRIBUCIONES DE LAS VARIACIONES

Utilizando el Teorema 4-4, página 116, podemos demostrar los siguientes teoremas fundamentales relativos a las distribuciones de las variaciones V_w, V_b y V.

Teorema 9-1: V_w/σ^2 tiene la distribución chi-cuadrado con $a(b-1)$ grados de libertad.

Teorema 9-2: Bajo la hipótesis nula H_0, V_b/σ^2 y V/σ^2 tienen la distribución chi-cuadrado con $a-1$ y $ab-1$ grados de libertad respectivamente.

Es importante recalcar que el Teorema 9-1 es válido si se supone o no H_0, en tanto que el Teorema 9-2 sólo es válido si se supone H_0.

ENSAYO *F* PARA LA HIPOTESIS NULA DE MEDIAS IGUALES

Si la hipótesis nula H_0 no es cierta, es decir, si las medias de tratamiento no son iguales, vemos de (*23*) que $\hat{S}_b^2$ puede ser mayor que σ^2, siendo el efecto más pronunciado a medida que la discrepancia entre medias aumenta. Por otra parte, de (*19*) y (*20*) cabe esperarse que $\hat{S}_w^2$ sea igual a σ^2 independientemente de si las medias son iguales o no. Se deduce que un buen estadístico para ensayar la hipótesis H_0 viene dado por $\hat{S}_b^2/\hat{S}_w^2$. Si este estadístico es considerablemente grande podemos concluir que hay una diferencia significante entre las medias de tratamiento y así rechazamos H_0. De otra forma podemos o aceptar H_0 o reservarnos el juicio dependiendo de análisis posterior.

Para utilizar este estadístico debemos conocer su distribución. Esto viene dado en el teorema siguiente, el cual es una consecuencia del Teorema 5-8, página 161.

Teorema 9-3: El estadístico $F = \hat{S}_b^2/\hat{S}_w^2$ tiene la distribución F con $a-1$ y $a(b-1)$ grados de libertad.

El Teorema 9-3 nos permite ensayar la hipótesis nula a un nivel de significación determinado empleando un ensayo unilateral de la distribución F.

TABLAS DE ANALISIS DE VARIANZA

Los cálculos pedidos para el ensayo anterior se resumen en la Tabla 9-2, que se denomina *tabla de análisis de varianza.* En la práctica calcularíamos v y v_b empleando el método largo, (*3*) y (*8*), o el método corto, (*10*) y (*11*), y luego calcular $v_w = v - v_b$. Debe advertirse que los grados de libertad para la variación total, esto es, $ab-1$, es igual a la suma de los grados de libertad para las variaciones entre tratamientos y las variaciones dentro de tratamientos.

Tabla 9-2

Variación	Grados de libertad	Media de cuadrados	F
Entre tratamientos, $v_b = b\sum_j (\bar{x}_{j.} - \bar{x})^2$	$a-1$	$\hat{s}_b^2 = \dfrac{v_b}{a-1}$	$\dfrac{\hat{s}_b^2}{\hat{s}_w^2}$ con $a-1$, $a(b-1)$ grados de libertad
Dentro de tratamientos, $v_w = v - v_b$	$a(b-1)$	$\hat{s}^2 = \dfrac{v_w}{a(b-1)}$	
Total, $v = v_b + v_w$ $= \sum_{j,k} (x_{jk} - \bar{x})^2$	$ab-1$		

MODIFICACIONES PARA NUMEROS DESIGUALES DE OBSERVACIONES

En el caso de que los tratamientos 1, . . . , a tengan números diferentes de observaciones iguales a $n_1, \ldots, n_a$ respectivamente, los resultados anteriores se modifican fácilmente. Por tanto obtenemos

$$v = \sum_{j,k}(x_{jk}-\bar{x})^2 = \sum_{j,k} x_{jk}^2 - \frac{\tau^2}{n} \tag{24}$$

$$v_b = \sum_{j,k}(\bar{x}_{j.}-\bar{x})^2 = \sum_{j} n_j(\bar{x}_{j.}-\bar{x})^2 = \sum_{j} \frac{\tau_{j.}^2}{n_j} - \frac{\tau^2}{n} \tag{25}$$

$$v_w = v - v_b \tag{26}$$

donde $\sum_{j,k}$ denota la suma sobre k desde 1 hasta n_j y luego sobre j desde 1 hasta a, $n = \sum_j n_j$ es el número total de observaciones en todos los tratamientos, τ es la suma de todas las observaciones, $\tau_{j.}$ es la suma de todos los valores en el tratamiento j y $\sum_j$ es la suma desde $j = 1$ hasta a.

La tabla de análisis de varianza para este caso viene dada en la Tabla 9-3.

Tabla 9-3

Variación	Grados de libertad	Media de cuadrados	F
Entre tratamientos, $v_b = \sum_j n_j(\bar{x}_{j.}-\bar{x})^2$	$a-1$	$\hat{s}_b^2 = \dfrac{v_b}{a-1}$	$\dfrac{\hat{s}_b^2}{\hat{s}_w^2}$ con $a-1$, $n-a$ grados de libertad
Dentro de tratamientos, $v_w = v - v_b$	$n-a$	$\hat{s}_w^2 = \dfrac{v_w}{n-a}$	
Total, $v = v_b + v_w$ $= \sum_{j,k}(x_{jk}-\bar{x})^2$	$n-1$		

CLASIFICACION DOBLE O EXPERIMENTOS DE DOS FACTORES

Las ideas de análisis de varianza para clasificación simple o experimentos de un factor pueden generalizarse. Ilustramos el procedimiento para *clasificación doble* o *experimentos de dos factores.*

EJEMPLO 9-2. Supóngase que un experimento agrícola consiste en examinar los rendimientos por acre de 4 variedades diferentes de trigo, donde cada variedad se cultiva en 5 parcelas diferentes. Luego se necesita un total de (4)(5) = 20 parcelas. Es conveniente en tal caso combinar las parcelas en *bloques,* por ejemplo 4 parcelas en un bloque, con una variedad diferente de trigo cultivado en cada parcela dentro de un bloque. Por tanto se necesitarán 5 bloques.

En este caso hay dos clasificaciones o factores, puesto que pueden existir diferencias en el rendimiento por acre debido a (*i*) el tipo particular de trigo cultivado o (*ii*) el bloque particular utilizado (que puede tener diferente fertilidad del suelo, etc.).

Por analogía con el experimento agrícola del Ejemplo 9.2 con frecuencia nos referimos a las dos clasificaciones o factores en un experimento como *tratamientos* y *bloques,* pero lógicamente podríamos simplemente referirnos a ellos como factor 1, factor 2, etc.

NOTACION PARA EXPERIMENTOS DE DOS FACTORES

Suponiendo que tenemos a tratamientos y b bloques, construimos la Tabla 9-4, donde se supone que hay un valor experimental (por ejemplo, rendimiento por acre) correspondiente a cada tratamiento y bloque. Para el tratamiento j y el bloque k denotamos este valor por x_{jk}. La media de los valores en la fila j se denota por $\bar{x}_{j.}$, donde $j = 1, \ldots, a$, mientras que la media de los valores en la columna k se denota por $\bar{x}_{.k}$, donde $k = 1, \ldots, b$. La *gran media* o *media total* se denota por $\bar{x}$. En símbolos

Tabla 9-4

Bloques

		1	2	...	b	
Tratamientos	1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1b}	$\bar{x}_{1.}$
	2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2b}	$\bar{x}_{2.}$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	a	x_{a1}	x_{a2}	...	x_{ab}	$\bar{x}_{a.}$
		$\bar{x}_{.1}$	$\bar{x}_{.2}$	...	$\bar{x}_{.b}$	

$$\bar{x}_{j.} = \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b} x_{jk}, \qquad \bar{x}_{.k} = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{a} x_{jk}, \qquad \bar{x} = \frac{1}{ab}\sum_{j,k} x_{jk} \tag{27}$$

VARIACIONES PARA EXPERIMENTOS DE DOS FACTORES

Como en el caso de experimentos de un factor, podemos definir variaciones para experimentos de dos factores. Definimos la *variación total*, semejante a (*3*), como

$$v = \sum_{j,k} (x_{jk} - \bar{x})^2 \tag{28}$$

Al escribir la identidad

$$x_{jk} - \bar{x} = (x_{jk} - \bar{x}_{j.} - \bar{x}_{.k} + \bar{x}) + (x_{j.} - \bar{x}) + (\bar{x}_{.k} - \bar{x}) \tag{29}$$

y luego elevando al cuadrado y sumando sobre j y k podemos demostrar que

$$v = v_e + v_r + v_c \tag{30}$$

donde

$$v_e = \text{Variación debida al error o al azar} = \sum_{j,k} (x_{jk} - \bar{x}_{j.} - \bar{x}_{.k} + \bar{x})^2$$

$$v_r = \text{Variación entre filas (tratamientos)} = b\sum_{j=1}^{a} (\bar{x}_{j.} - \bar{x})^2$$

$$v_c = \text{Variación entre columnas (bloques)} = a\sum_{k=1}^{b} (\bar{x}_{.k} - \bar{x})^2$$

La variación debida al error o al azar se conoce también como *variación residual*.

Las siguientes son fórmulas cortas para computación, análogas a (*10*), (*11*) y (*12*).

$$v = \sum_{j,k} x_{jk}^2 - \frac{\tau^2}{ab} \tag{31}$$

$$v_r = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{a} \tau_{j.}^2 - \frac{\tau^2}{ab} \tag{32}$$

$$v_c = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{b} \tau_{.k}^2 - \frac{\tau^2}{ab} \tag{33}$$

$$v_e = v - v_r - v_c \tag{34}$$

donde $\tau_{j.}$ es el total de valores en la fila j, $\tau_{.k}$ es el total de valores de la columna k y τ es el total de todos los valores.

ANALISIS DE VARIANZA PARA EXPERIMENTOS DE DOS FACTORES

Para el modelo matemático de los experimentos de dos factores supongamos que las variables aleatorias X_{jk} cuyos valores son los x_{jk} pueden expresarse como

$$X_{jk} = \mu + \alpha_j + \beta_k + \Delta_{jk} \tag{35}$$

Aquí μ es la gran media poblacional, α_j es la parte de X_{jk} debida a los dierentes tratamientos (algunas veces denominados *efectos de tratamientos*), β_k es la parte de X_{jk} debida a los diferentes bloques (algunas veces denominados *efectos de bloque*) y Δ_{jk} es la parte de X_{jk} debida al azar o error. Como antes podemos tomar los Δ_{jk}como variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con media cero y varianza σ^2, de modo que las X_{jk} son también variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con varianza σ^2 . Bajo suposiciones apropiadas de las medias de X_{jk} tenemos

$$\sum_j \alpha_j = 0 \qquad \sum_k \beta_k = 0 \tag{36}$$

de donde

$$\mu = \frac{1}{ab} \sum_{j,k} E(X_{jk})$$

Correspondiendo a los resultados (*16*)—(*18*) podemos demostrar que

$$E(V_r) = (a-1)\sigma^2 + b \sum_j \alpha_j^2 \tag{37}$$

$$E(V_c) = (b-1)\sigma^2 + a \sum_k \beta_k^2 \tag{38}$$

$$E(V_e) = (a-1)(b-1)\sigma^2 \tag{39}$$

$$E(V) = (ab-1)\sigma^2 + b \sum_j \alpha_j^2 + a \sum_k \beta_k^2 \tag{40}$$

Hay dos hipótesis nulas que desearíamos ensayar:

$H_0^{(1)}$: Todas las medias de tratamientos (filas) son iguales, es decir $\alpha_j = 0,\ j = 1, \ldots, a$

$H_0^{(2)}$: Todas las medias de bloques (columnas) son iguales, es decir $\beta_k = 0,\ k = 1, \ldots, b$

Vemos de (39) que, sin tener en cuenta a $H_0^{(1)}$ó $H_0^{(2)}$, la mejor estima (insesgada) de σ^2 viene dada por

$$\hat{S}_e^2 = \frac{V_e}{(a-1)(b-1)} \quad \text{es decir, } E(\hat{S}_e^2) = \sigma^2 \tag{41}$$

También, si la hipótesis $H_0^{(1)}$ y $H_0^{(2)}$ son ciertas, entonces

$$\hat{S}_r^2 = \frac{V_r}{a-1}, \quad \hat{S}_c^2 = \frac{V_c}{b-1}, \quad \hat{S}^2 = \frac{V}{ab-1} \tag{42}$$

serán estimas insesgadas de σ^2 . Si $H_0^{(1)}$ y $H_0^{(2)}$ no son ciertas, tenemos, de (*37*) y (*38*) respectivamente

$$E(\hat{S}_r^2) = \sigma^2 + \frac{b}{a-1} \sum_j \alpha_j^2 \tag{43}$$

$$E(\hat{S}_c^2) = \sigma^2 + \frac{a}{b-1} \sum_k \beta_k^2 \tag{44}$$

Los teoremas siguientes son semejantes a los Teoremas 9-1 y 9-2.

Teorema 9-4: V_e/σ^2 tiene la distribución chi-cuadrado con $(a-1)$ $(b-1)$ grados de libertad, sin tener en cuenta a $H_0^{(1)}$ or $H_0^{(2)}$.

Teorema 9-5: Bajo la hipótesis $H_0^{(1)}$, V_r/σ^2 tiene la distribución chi-cuadrado con $a-1$ grados de libertad. Bajo la hipótesis $H_0^{(2)}$, V_c/σ^2 tiene la distribución chi-cuadrado con $b-1$ grados de libertad. Bajo ambas hipótesis $H_0^{(1)}$ y $H_0^{(2)}$, V/σ^2 tiene la distribución chi-cuadrado con $ab-1$ grados de libertad.

Para ensayar la hipótesis $H_0^{(1)}$ es lógico considerar el estadístico $\hat{S}_r^2/\hat{S}_e^2$ ya que podemos ver de (*43*) que $\hat{S}_r^2$ se espera difiera significativamente de σ^2 si las medias de fila (tratamientos) son significativamente diferentes. Análogamente para ensayar la hipótesis $H_0^{(2)}$ consideramos el estadístico $\hat{S}_c^2/\hat{S}_e^2$. Las distribuciones de $\hat{S}_r^2/\hat{S}_e^2$ y $\hat{S}_c^2/\hat{S}_e^2$ vienen dados en el teorema siguiente análogo al Teorema 9-3.

Teorema 9-6: Bajo la hipótesis $H_0^{(1)}$ el estadístico $\hat{S}_r^2/\hat{S}_e^2$ tiene la distribución F con $a-1$ y $(a-1)(b-1)$ grados de libertad. Bajo la hipótesis $H_0^{(2)}$ el estadístico $\hat{S}_c^2/\hat{S}_e^2$ tiene la distribución F con $b-1$ y $(a-1)(b-1)$ grados de libertad.

El teorema nos permite aceptar o rechazar $H_0^{(1)}$ ó $H_0^{(2)}$ a niveles de significación especificados. Por conveniencia, como en el caso de factor uno, una tabla de análisis de varianza puede construirse como se muestra en la Tabla 9-5.

Tabla 9-5

Variación	Grados de libertad	Media de cuadrados	F
Entre tratamientos, $v_r = b\sum_j (\bar{x}_{j.} - \bar{x})^2$	$a-1$	$\hat{s}_r^2 = \frac{v_r}{a-1}$	$\hat{s}_r^2/\hat{s}_e^2$ con $a-1$, $(a-1)(b-1)$ grados de libertad
Entre bloques, $v_c = a\sum_k (\bar{x}_{.k} - \bar{x})^2$	$b-1$	$\hat{s}_c^2 = \frac{v_c}{b-1}$	$\hat{s}_c^2/\hat{s}_e^2$ con $b-1$, $(a-1)(b-1)$ grados de libertad
Residual o aleatoria, $v_e = v - v_r - v_c$	$(a-1)(b-1)$	$\hat{s}_e^2 = \frac{v_e}{(a-1)(b-1)}$	
Total, $v = v_r + v_c + v_e$ $= \sum_{j,k} (x_{jk} - \bar{x})^2$	$ab-1$		

EXPERIMENTOS DE DOS FACTORES CON REPETICION

En la Tabla 9-4 solamente hay un valor correspondiente a un tratamiento dado y a un bloque dado. Más información considerando los factores puede a veces obtenerse repitiendo el experimento, proceso conocido como *repetición*. En tal caso habrá más de un valor correspondiente a un tratamiento dado y a un bloque dado. Supondremos que hay c valores para cada posición; cambios apropiados pueden hacerse cuando los números de repeticiones no son todos iguales.

Debido a la repetición debe utilizarse un modelo apropiado para remplazar el dado por (*35*), página 312. Para obtener esto denotemos por X_{jkl} la variable aleatoria correspondiente a la fila o tratamiento j, la columna o bloque k y a la repetición l. El modelo viene dado por

$$X_{jkl} = \mu + \alpha_j + \beta_k + \gamma_{jk} + \Delta_{jkl}$$

donde μ, α_j, β_k se definen como antes, Δ_{jkl} son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con media cero y varianza σ^2, mientras que γ_{jk} denota *efectos de interacción* fila-columna o tratamiento-bloque (a veces denominados *interacciones*). Correspondiente a (*36*) tenemos

$$\sum_j \alpha_j = 0, \quad \sum_k \beta_k = 0, \quad \sum_j \gamma_{jk} = 0, \quad \sum_k \gamma_{jk} = 0 \tag{45}$$

Como antes, la variación total v de todos los datos puede dividirse en variaciones debidas a las filas v_r, columnas v_c, interacción v_i y error residual o aleatorio v_e:

$$v = v_r + v_c + v_i + v_e \tag{46}$$

donde

$$v = \sum_{j,k,l} (x_{jkl} - \bar{x})^2 \tag{47}$$

$$v_r = bc \sum_{j=1}^{a} (\bar{x}_{j..} - \bar{x})^2 \tag{48}$$

$$v_c = ac \sum_{k=1}^{b} (\bar{x}_{.k.} - \bar{x})^2 \tag{49}$$

$$v_i = c \sum_{j,k} (\bar{x}_{jk.} - \bar{x}_{j..} - \bar{x}_{.k.} + \bar{x})^2 \tag{50}$$

$$v_e = \sum_{j,k,l} (x_{jkl} - \bar{x}_{jk.})^2 \tag{51}$$

En estos resultados los puntos en los subíndices tienen significados análogos a los dados anteriormente (página 306). Así, por ejemplo,

$$\bar{x}_{j..} = \frac{1}{bc} \sum_{k,l} x_{jkl} = \frac{1}{b} \sum_k \bar{x}_{jk.} \tag{52}$$

Utilizando el número apropiado de grados de libertad para cada fuente de variación, podemos establecer la tabla de análisis de varianza, Tabla 9-6.

Tabla 9-6

Variación	Grados de libertad	Media de cuadrados	F
Entre tratamientos, v_r	$a-1$	$\hat{s}_r^2 = \dfrac{v_r}{a-1}$	$\hat{s}_r^2/\hat{s}_e^2$ con $a-1$, $ab(c-1)$ grados de libertad
Entre bloques, v_c	$b-1$	$\hat{s}_e^2 = \dfrac{v_c}{b-1}$	$\hat{s}_c^2/\hat{s}_e^2$ con $b-1$, $ab(c-1)$ grados de libertad
Interacción, v_i	$(a-1)(b-1)$	$\hat{s}_i^2 = \dfrac{v_i}{(a-1)(b-1)}$	$\hat{s}_i^2/\hat{s}_e^2$ con $(a-1)(b-1)$, $ab(c-1)$ grados de libertad
Residual o aleatorio, v_e	$ab(c-1)$	$\hat{s}_e^2 = \dfrac{v_e}{ab(c-1)}$	
Total, v	$abc-1$		

Las relaciones F en la última columna de la Tabla 9-6 pueden utilizarse para ensayar las hipótesis nulas

$H_0^{(1)}$: Todas las medias de tratamiento (fila) son iguales, esto es $\alpha_j = 0$

$H_0^{(2)}$: Todas las medias de bloque (columna) son iguales, esto es $\beta_k = 0$

$H_0^{(3)}$: No hay interacciones entre tratamientos y bloques, esto es $\gamma_{jk} = 0$

Desde un punto de vista práctico debemos primero decidir si puede rechazarse o no $H_0^{(3)}$ a un nivel apropiado de significación utilizando la relación F de $\hat{s}_i^2/\hat{s}_e^2$ de la Tabla 9-6. Dos casos posibles se presentan.

Caso I. $H_0^{(3)}$ **no puede rechazarse.** En este caso podemos concluir que las interacciones no son muy grandes. Luego podemos ensayar $H_0^{(1)}$ y $H_0^{(2)}$ utilizando las relaciones F de $\hat{s}_r^2/\hat{s}_e^2$ y $\hat{s}_c^2/\hat{s}_e^2$ respectivamente como se muestra en la Tabla 9-6. Algunos estadísticos recomiendan combinar las variaciones en este caso tomando el total $v_i + v_e$ y dividiéndolo por el total correspondiente de los grados de libertad, $(a - 1)(b - 1) + ab(c - 1)$, y utilizando este valor para remplazar el denominador $\hat{s}_e^2$ en el ensayo F.

Caso II. $H_0^{(3)}$ **puede rechazarse.** En este caso podemos concluir que las interacciones son considerablemente grandes. Las diferencias en los factores serían importantes solamente si fueran grandes comparadas con tales interacciones. Por esta razón muchos estadísticos recomiendan que se ensayen $H_0^{(1)}$ y $H_0^{(2)}$ utilizando las relaciones F de $\hat{s}_r^2/\hat{s}_i^2$ y $\hat{s}_c^2/\hat{s}_i^2$ en cambio de esas dadas en la Tabla 9-6. Utilizaremos este procedimiento alterno.

El análisis de varianza con repetición se efectúa mucho más fácilmente al totalizar primero los valores de repetición que corresponden a tratamientos (filas) y bloques (columnas) particulares. Esto produce una tabla factor dos con valores singulares, que pueden analizarse como en la Tabla 9-5. El procedimiento se ilustra en el Problema 9-13.

DISEÑO EXPERIMENTAL

Las técnicas de análisis de varianza discutidas anteriormente se emplean después de que se han obtenido los resultados de un experimento. Sin embargo, para ganar tanta información como sea posible, los detalles de un experimento deben planearse cuidadosamente con anterioridad. Esto se denomina a veces como *diseño del experimento*. En lo que sigue damos algunos ejemplos importantes de diseño de experimentos.

1. **Completa aleatoriedad.** Supóngase que tenemos un experimento agrícola como en el Ejemplo 9.1, página 306. Para diseñar tal experimento podríamos dividir el terreno en 4 × 4 = 16 parcelas (indicadas en la Fig. 9-1 por cuadrados, aunque físicamente cualquier forma puede utilizarse) y asignar cada tratamiento, indicados por A, B, C, D, a cuatro bloques escogidos completamente al azar. El propósito de la aleatoriedad es la de eliminar varias fuentes de error tal como fertilidad del suelo, etc.

D	A	C	C
B	D	B	A
D	C	B	D
A	B	C	A

Completa aleatoriedad

Fig. 9-1

I	C	B	A	D
II	A	B	D	C
III	B	C	D	A
IV	A	D	C	B

Bloques aleatorios

Fig. 9-2

D	B	C	A
B	D	A	C
C	A	D	B
A	C	B	D

Cuadrado latino

Fig. 9-3

B_γ	A_β	D_δ	C_α
A_δ	B_α	C_γ	D_β
D_α	C_δ	B_β	A_γ
C_β	D_γ	A_α	B_δ

Cuadrado greco-latino

Fig. 9-4

2. **Bloques aleatorios:** Cuando, como en el Ejemplo 9.2, es necesario tener un conjunto completo de tratamientos para cada bloque los tratamientos A, B, C, D se introducen en orden aleatorio dentro de cada bloque I, II, III, IV (véase Fig. 9-2) y por esta razón los bloques se conocen como *bloques aleatorios.* Este tipo de diseño se utiliza cuando se desea controlar *una fuente de error o variabilidad*, principalmente la diferencia en bloques (filas en la Fig. 9-2).

3. **Cuadrados latinos.** Para algunos propósitos es necesario controlar *dos fuentes de error o variabilidad* al mismo tiempo, como la diferencia en filas y la diferencia en columnas. En el experimento del Ejemplo 9.1, por ejemplo, errores en diferentes filas y columnas podrían ser causadas a cambios en la fertilidad del suelo en diferentes partes del terreno. En tal caso es deseable que cada tratamiento ocurra una vez en cada fila y una vez en cada columna, como en la Fig. 9-3. El arreglo se llama *cuadrado latino* puesto que se utilizan letras latinas A, B, C, D.

4. **Cuadrados greco-latinos.** Si es necesario controlar *tres* fuentes de error o variabilidad se usa un cuadrado *greco-latino*, como se indica en la Fig. 9-4. Tal cuadrado es esencialmente dos cuadrados latinos superpuestos entre sí, con letras latinas A, B, C, D utilizadas para un cuadrado mientras que para el otro cuadrado se utilizan letras griegas α, β, γ, δ. El requisito adicional que debe cumplirse es que cada letra latina debe utilizarse solamente una vez con cada letra griega. Cuando se cumple esta propiedad el cuadrado se dice *ortogonal.*

Problemas resueltos

CLASIFICACION SIMPLE O EXPERIMENTOS DE UN FACTOR

9.1. Demostrar que

$$\sum_{j,k} (x_{jk} - \bar{x})^2 = \sum_{j,k} (x_{jk} - \bar{x}_{j.})^2 + \sum_{j,k} (\bar{x}_{j.} - \bar{x})^2$$

Tenemos $x_{jk} - \bar{x} = (x_{jk} - \bar{x}_{j.}) + (\bar{x}_{j.} - \bar{x})$. Entonces elevando al cuadrado y sumando sobre j y k hallamos

$$\sum_{j,k} (x_{jk} - \bar{x})^2 = \sum_{j,k} (x_{jk} - \bar{x}_{j.})^2 + \sum_{j,k} (\bar{x}_{j.} - \bar{x})^2 + 2 \sum_{j,k} (x_{jk} - \bar{x}_{j.})(\bar{x}_{j.} - \bar{x})$$

Para demostrar el resultado pedido debemos mostrar que la última suma es cero. Para hacer esto procedemos así

$$\begin{aligned}\sum_{j,k} (x_{jk} - \bar{x}_{j.})(\bar{x}_{j.} - \bar{x}) &= \sum_{j=1}^{a} (\bar{x}_{j.} - \bar{x}) \left[\sum_{k=1}^{b} (x_{jk} - \bar{x}_{j.}) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{a} (\bar{x}_{j.} - \bar{x}) \left[\left(\sum_{k=1}^{b} x_{jk} \right) - b\bar{x}_{j.} \right] = 0\end{aligned}$$

ya que $\bar{x}_{j.} = \dfrac{1}{b} \sum_{k=1}^{b} x_{jk}$.

9.2. Verificar que (*a*) $\tau = ab\bar{x}$, (*b*) $\tau_{j.} = b\bar{x}_{j.}$, (*c*) $\sum_j \tau_{j.} = ab\bar{x}$, utilizando la notación en la página 307.

(*a*)
$$\tau = \sum_{j,k} x_{jk} = ab\left(\frac{1}{ab}\sum_{j,k} x_{jk}\right) = ab\bar{x}$$

(*b*)
$$\tau_{j.} = \sum_{k} x_{jk} = b\left(\frac{1}{b}\sum_{k} x_{jk}\right) = b\bar{x}_{j.}$$

(*c*) Puesto que $\tau_{j.} = \sum_k x_{jk}$ tenemos

$$\sum_j \tau_{j.} = \sum_j \sum_k x_{jk} = \tau = ab\bar{x}$$

por la parte (*a*).

9.3. Verificar las fórmulas cortas (*10*)—(*12*), página 307.

Tenemos

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j,k}(x_{jk}-\bar{x})^2 = \sum_{j,k}(x_{jk}^2 - 2\bar{x}x_{jk} + \bar{x}^2) \\ &= \sum_{j,k} x_{jk}^2 - 2\bar{x}\sum_{j,k} x_{jk} + ab\bar{x}^2 \\ &= \sum_{j,k} x_{jk}^2 - 2\bar{x}(ab\bar{x}) + ab\bar{x}^2 \\ &= \sum_{j,k} x_{jk}^2 - ab\bar{x}^2 \\ &= \sum_{j,k} x_{jk}^2 - \frac{\tau^2}{ab} \end{aligned}$$

utilizando el Problema 9.2(*a*) en el tercero y último renglones anteriores. Análogamente

$$\begin{aligned} v_b &= \sum_{j,k}(\bar{x}_{j.}-\bar{x})^2 = \sum_{j,k}(\bar{x}_{j.}^2 - 2\bar{x}\bar{x}_{j.} + \bar{x}^2) \\ &= \sum_{j,k} \bar{x}_{j.}^2 - 2\bar{x}\sum_{j,k} \bar{x}_{j.} + ab\bar{x}^2 \\ &= \sum_{j,k}\left(\frac{\tau_{j.}}{b}\right)^2 - 2\bar{x}\sum_{j,k}\frac{\tau_{j.}}{b} + ab\bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{b^2}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\tau_{j.}^2 - \frac{2\bar{x}}{b}(ab\bar{x}) + ab\bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{a}\tau_{j.}^2 - ab\bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{a}\tau_{j.}^2 - \frac{\tau^2}{ab} \end{aligned}$$

utilizando el Problema 9.2(*b*) en el tercer renglón y el Problema 9.2(*a*) en el último renglón.

Finalmente (*12*) se deduce del hecho de que $v = v_b + v_w$ ó $v_w = v - v_b$.

9.4. La Tabla 9-7 muestra los rendimientos en hl/ha de una cierta variedad de trigo cultivado en un tipo particular de suelo tratado con químicos *A*, *B*, o *C*. Hallar (*a*) el rendimiento medio para los diferentes tratamientos, (*b*) la gran media para todos los tratamientos, (*c*) la variación total, (*d*) la variación entre tratamientos y (*e*) la variación dentro de tratamientos. Utilizar el método largo.

Tabla 9-7

A	48	49	50	49
B	47	49	48	48
C	49	51	50	50

Para simplificar la aritmética podemos restar algún número apropiado, por ejemplo 45, de todos los datos sin afectar los valores de las variaciones. Entonces obtenemos los datos de la Tabla 9-8.

Tabla 9-8

3	4	5	4
2	4	3	3
4	6	5	5

(*a*) Las medias de tratamiento (fila) para la Tabla 9-8 vienen dados respectivamente por

$$\bar{x}_{1.} = \frac{1}{4}(3+4+5+4) = 4, \quad \bar{x}_{2.} = \frac{1}{4}(2+4+3+3) = 3,$$

$$\bar{x}_{3.} = \frac{1}{4}(4+6+5+5) = 5$$

Por tanto los rendimientos medios, obtenidos al sumar 45 a éstos, son 49, 48 y 50 hl/ha para *A*, *B*, *C* respectivamente.

(*b*)

$$\bar{x} = \frac{1}{12}(3+4+5+4+2+4+3+3+4+6+5+5) = 4$$

Así la gran media para el conjunto original de datos es 45 + 4 = 49 hl/ha.

(*c*)

$$\begin{aligned} \text{Variación total} = v &= \sum_{j,k}(x_{jk} - \bar{x})^2 \\ &= (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (4-4)^2 \\ &\quad + (2-4)^2 + (4-4)^2 + (3-4)^2 + (3-4)^2 \\ &\quad + (4-4)^2 + (6-4)^2 + (5-4)^2 + (5-4)^2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

(*d*)

$$\begin{aligned} \text{Variación entre tratamientos} = v_b &= b\sum_j(\bar{x}_{j.} - \bar{x})^2 \\ &= 4[(4-4)^2 + (3-4)^2 + (5-4)^2] = 8 \end{aligned}$$

(*e*)

$$\text{Variación dentro de tratamientos} = v_w = v - v_b = 14 - 8 = 6$$

Otro método.

$$\begin{aligned} v_w &= \sum_{j,k}(x_{jk} - \bar{x}_{j.})^2 \\ &= (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (4-4)^2 \\ &\quad + (2-3)^2 + (4-3)^2 + (3-3)^2 + (3-3)^2 \\ &\quad + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (5-5)^2 + (5-5)^2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

9.5. Con referencia al Problema 9.4, hallar una estima insesgada de la varianza poblacional σ^2 de (*a*) la variación entre tratamientos bajo la hipótesis nula de igual medias de tratamiento, (*b*) la variación dentro de tratamientos.

(*a*)

$$\hat{s}_b^2 = \frac{v_b}{a-1} = \frac{8}{3-1} = 4$$

(*b*)

$$\hat{s}_w^2 = \frac{v_w}{a(b-1)} = \frac{6}{3(4-1)} = \frac{2}{3}$$

9.6. Con referencia al Problema 9.4, ¿podemos rechazar la hipótesis nula de medias iguales al nivel de significación del (*a*) 0.05, (*b*) 0.01?

Tenemos

$$F = \frac{\hat{s}_b^2}{\hat{s}_w^2} = \frac{4}{2/3} = 6$$

con $a - 1 = 3 - 1 = 2$ y $a(b-1) = 3(4-1) = 9$ grados de libertad.

(*a*) Con referencia al Apéndice *F*, con $v_1 = 2$ y $v_2 = 9$, vemos que $F_{.95} = 4.26$. Puesto que $F = 6 > F_{.95}$ podemos rechazar la hipótesis nula de medias iguales al nivel 0.05.

(*b*) Con referencia al Apéndice *F*, con $v_1 = 2$ y $v_2 = 9$, vemos que $F_{.99} = 8.02$. Puesto que $F = 6 < F_{.99}$ no podemos rechazar la hipótesis nula de medias iguales al nivel 0.01.

La tabla de análisis de varianza para los Problemas 9.4—9.6 se muestran en la Tabla 9-9.

Tabla 9-9

Variación	Grados de libertad	Media de cuadrados	F
Entre tratamientos, $v_b = 8$	$a - 1 = 2$	$\hat{s}_b^2 = \frac{8}{2} = 4$	$F = \frac{\hat{s}_b^2}{\hat{s}_w^2} = \frac{4}{2/3}$ $= 6$ con 2, 9 grados de libertad
Dentro de tratamientos, $v_w = v - v_b$ $= 14 - 8 = 6$	$a(b-1) = (3)(3) = 9$	$\hat{s}_w^2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$	
Total, $v = 14$	$ab - 1 = (3)(4) - 1$ $= 11$		

9.7. Utilizar las fórmulas cortas (*10*)—(*12*) para obtener los resultados del Problema 9.4.

(*a*) Tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{j,k} x_{jk}^2 &= 9 + 16 + 25 + 16 \\ &\quad + 4 + 16 + 9 + 9 \\ &\quad + 16 + 36 + 25 + 25 \\ &= 206\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}\tau &= 3 + 4 + 5 + 4 \\ &\quad + 2 + 4 + 3 + 3 \\ &\quad + 4 + 6 + 5 + 5 \\ &= 48\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}v &= \sum_{j,k} x_{jk}^2 - \frac{\tau^2}{ab} \\ &= 206 - \frac{(48)^2}{(3)(4)} = 206 - 192 = 14\end{aligned}$$

(*b*) Los totales de las filas son

$$\begin{aligned}\tau_{1.} &= 3 + 4 + 5 + 4 = 16 \\ \tau_{2.} &= 2 + 4 + 3 + 3 = 12 \\ \tau_{3.} &= 4 + 6 + 5 + 5 = 20\end{aligned}$$

También

$$\tau = 16 + 12 + 20 = 48$$

Luego

$$\begin{aligned}v_b &= \frac{1}{b}\sum_j \tau_{j.}^2 - \frac{\tau^2}{ab} \\ &= \frac{1}{4}(16^2 + 12^2 + 20^2) - \frac{(48)^2}{(3)(4)} = 200 - 192 = 8\end{aligned}$$

(*c*)

$$v_w = v - v_b = 14 - 8 = 6$$

Es conveniente ordenar los datos como en la Tabla 9-10.

Tabla 9-10

					$\tau_{j.}$	$\tau_{j.}^2$
A	3	4	5	4	16	256
B	2	4	3	3	12	144
C	4	6	5	5	20	400
	$\sum_{j,k} x_{jk} = 206$				$\tau = \sum_j \tau_{j.}$ $= 48$	$\sum_j \tau_{j.}^2$ $= 800$

$$v = (206)^2 - \frac{(48)^2}{(3)(4)} = 14$$

$$v_b = \frac{1}{4}(800) - \frac{(48)^2}{(3)(4)} = 8$$

Los resultados concuerdan con los obtenidos en el Problema 9.4 y a partir de este punto el análisis procede como antes.

9.8. Una compañía desea comprar una de cinco máquinas diferentes *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. En un experimento diseñado para decidir si hay diferencia en el rendimiento de las máquinas, cinco operadores experimentados trabajan con las máquinas durante intervalos iguales. La Tabla 9-11 muestra el número de unidades producidas. Ensayar la hipótesis de que no hay diferencia entre las máquinas a un nivel de significación del (*a*) 0.05, (*b*) 0.01.

Tabla 9-11

A	68	72	75	42	53
B	72	52	63	55	48
C	60	82	65	77	75
D	48	61	57	64	50
E	64	65	70	68	53

Reste un número apropiado, por ejemplo 60, de todos los datos para obtener la Tabla 9-12.

Tabla 9-12

						$\tau_{j.}$	$\tau_{j.}^2$
A	8	12	15	−18	−7	10	100
B	12	−8	3	−5	−2	0	0
C	0	22	6	17	15	60	3600
D	−12	1	−3	4	−10	−20	400
E	4	5	10	8	−7	20	400
	$\Sigma x_{jk}^2 = 2356$					70	4500

Entonces $$v = 2356 - \frac{(70)^2}{(5)(4)} = 2356 - 245 = 2111$$

$$v_b = \frac{1}{5}(4500) - \frac{(70)^2}{(5)(4)} = 900 - 245 = 655$$

Formamos la Tabla 9-13.

Tabla 9-13

Variación	Grados de libertad	Media de cuadrados	F
Entre tratamientos, $v_b = 655$	$a-1=4$	$\hat{s}_b^2 = \frac{655}{4} = 163.75$	$F = \frac{\hat{s}_b^2}{\hat{s}_w^2} = 2.25$
Dentro de tratamientos, $v_w = 1456$	$a(b-1) = 5(4)$ $= 20$	$\hat{s}_w^2 = \frac{1456}{(5)(4)} = 72.8$	
Totales, $v = 2111$	$ab-1 = 24$		

Para 4, 20 grados de libertad tenemos $F_{.95} = 2.87$. Por tanto no podemos rechazar la hipótesis nula a un nivel 0.05, lógicamente tampoco la podemos rechazar al nivel 0.01.

MODIFICACIONES PARA NUMEROS DESIGUALES DE OBSERVACIONES

9.9. La Tabla 9-14 muestra la duración en horas de las muestras de tres tipos diferentes de tubos de televisión fabricados por una compañía. Utilizando el método largo, ensayar al nivel de significación del (*a*) 0.05, (*b*) 0.01 si hay una diferencia en los tres tipos.

Tabla 9-14

Muestra 1	407	411	409		
Muestra 2	404	406	408	405	402
Muestra 3	410	408	406	408	

Es conveniente restar un número apropiado, por ejemplo 400, y obtener la Tabla 9-15.

Tabla 9-15

						Total	Media
Muestra 1	7	11	9			27	9
Muestra 2	4	6	8	5	2	25	5
Muestra 3	10	8	6	8		32	8
	$\bar{x}$ = Gran media = $\frac{84}{12}$ = 7						

En esta tabla hemos indicado los totales de fila, las medias de grupo o muestrales y la gran media. Entonces tenemos

$$v = \sum_{j,k} (x_{jk} - \bar{x})^2 = (7-7)^2 + (11-7)^2 + \cdots + (8-7)^2 = 72$$

$$v_b = \sum_{j,k} (\bar{x}_{j.} - \bar{x})^2 = \sum_j n_j(\bar{x}_{j.} - \bar{x})^2$$

$$= 3(9-7)^2 + 5(7-5)^2 + 4(8-7)^2 = 36$$

$$v_w = v - v_b = 72 - 36 = 36$$

También podemos obtener v_w directamente observando que es igual a

$$(7-9)^2 + (11-9)^2 + (9-9)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (8-5)^2 + (5-5)^2$$
$$+ (2-5)^2 + (10-8)^2 + (8-8)^2 + (6-8)^2 + (8-8)^2$$

Los datos pueden resumirse en la tabla de análisis de varianza, Tabla 9-16.

Tabla 9-16

Variación	Grados de libertad	Media de cuadrados	F
$v_b = 36$	$a - 1 = 2$	$\hat{s}_b^2 = \frac{36}{2} = 18$	$\frac{\hat{s}_b^2}{\hat{s}_w^2} = \frac{18}{4}$ $= 4.5$
$v_w = 36$	$n - a = 9$	$\hat{s}_w^2 = \frac{36}{9} = 4$	

Entonces para 2 y 9 grados de libertad hallamos del Apéndice F que $F_{.95} = 4.26$, $F_{.99} = 8.02$. Por tanto podemos rechazar la hipótesis de medias iguales (esto es, ninguna diferencia en los tres tipos de tubos) al nivel 0.05 pero no al nivel 0.01.

9.10. Solucionar el Problema 9.9 utilizando las fórmulas cortas incluidas en *(24)*, *(25)* y *(26)*.

De la Tabla 9-15,

$$n_1 = 3, \quad n_2 = 5, \quad n_3 = 4, \quad n = 12, \quad \tau_{1.} = 27, \quad \tau_{2.} = 25, \quad \tau_{3.} = 32, \quad \tau = 84$$

Por tanto

$$v \;=\; \sum_{j,k} x_{jk}^2 - \frac{\tau^2}{n} \;=\; 7^2 + 11^2 + \cdots + 6^2 + 8^2 - \frac{(84)^2}{12} \;=\; 72$$

$$v_b \;=\; \sum_j \frac{\tau_{j.}^2}{n_j} - \frac{\tau^2}{n} \;=\; \frac{(27)^2}{3} + \frac{(25)^2}{5} + \frac{(32)^2}{4} - \frac{(84)^2}{12} \;=\; 36$$

$$v_w \;=\; v - v_b \;=\; 36$$

Utilizando estos resultados el análisis de varianza procede como en el Problema 9.9.

CLASIFICACION DOBLE O EXPERIMENTOS DE DOS FACTORES

9.11. La Tabla 9-17 muestra los rendimientos por acre de cuatro cosechas de plantas diferentes cultivadas en parcelas tratadas con tres tipos diferentes de fertilizantes. Utilizando el método largo, ensayar al nivel de significación de 0.01 si (*a*) hay una diferencia significativa en rendimiento por acre debida a los fertilizantes, (*b*) hay una diferencia significativa en rendimiento por acre debido a las cosechas.

Tabla 9-17

	Cosecha I	Cosecha II	Cosecha III	Cosecha IV
Fertilizante A	4.5	6.4	7.2	6.7
Fertilizante B	8.8	7.8	9.6	7.0
Fertilizante C	5.9	6.8	5.7	5.2

Calculamos los totales de fila y medias de fila, como también los totales de columna, las medias de columna y la gran media, como se indica en la Tabla 9-18.

Tabla 9-18

	Cosecha I	Cosecha II	Cosecha III	Cosecha IV	Totales de fila	Media de fila
Fertilizante A	4.5	6.4	7.2	6.7	24.8	6.2
Fertilizante B	8.8	7.8	9.6	7.0	33.2	8.3
Fertilizante C	5.9	6.8	5.7	5.2	23.6	5.9
Totales de columna	19.2	21.0	22.5	18.9	Gran total $= 81.6$	
Medias de columna	6.4	7.0	7.5	6.3	Gran media $= 6.8$	

v_r = **Variación de medias de fila con respecto a la gran media**

$$= 4[(6.2-6.8)^2 + (8.3-6.8)^2 + (5.9-6.8)^2] = 13.68$$

v_c = **Variación de medias de columna con respecto a la gran media**

$$= 3[(6.4-6.8)^2 + (7.0-6.8)^2 + (7.5-6.8)^2 + (6.3-6.8)^2] = 2.82$$

v = **Variación total**

$$\begin{aligned} &= (4.5-6.8)^2 + (6.4-6.8)^2 + (7.2-6.8)^2 + (6.7-6.8)^2 \\ &\quad + (8.8-6.8)^2 + (7.8-6.8)^2 + (9.6-6.8)^2 + (7.0-6.8)^2 \\ &\qquad + (5.9-6.8)^2 + (6.8-6.8)^2 + (5.7-6.8)^2 + (5.2-6.8)^2 \\ &= 23.08 \end{aligned}$$

v_e = **Variación aleatoria** $= v - v_r - v_c = 6.58$

Esto conduce al análisis de varianza en la Tabla 9-19.

Tabla 9-19

Variación	Grados de libertad	Media de cuadrados	F
$v_r = 13.68$	2	$\hat{s}_r^2 = 6.84$	$F = \hat{s}_r^2/\hat{s}_e^2 = 6.24$ gl: 2, 6
$v_c = 2.82$	3	$\hat{s}_c^2 = 0.94$	$F = \hat{s}_c^2/\hat{s}_e^2 = 0.86$ gl: 3, 6
$v_e = 6.58$	6	$\hat{s}_e^2 = 1.097$	
$v = 23.08$	11		

Al nivel de significación de 0.05 con 2, 6 grados de libertad, $F_{.95} = 5.14$. Entonces, ya que $6.24 > 5.14$, podemos rechazar la hipótesis de que las medias de fila son iguales y concluir que al nivel 0.05 hay una diferencia significativa en el rendimiento debida a los fertilizantes.

Ya que el valor de F correspondiente a las diferencias en las medias de columna es menor que 1 podemos concluir que no hay diferencia significativa en el rendimiento debido a las cosechas.

9.12. Utilizar las fórmulas cortas para obtener los resultados del Problema 9.11.

Tenemos de la Tabla 9-18:

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k} x_{jk}^2 &= (4.5)^2 + (6.4)^2 + \cdots + (5.2)^2 = 577.96 \\
\tau &= 24.8 + 33.2 + 23.6 = 81.6 \\
\sum \tau_{j.}^2 &= (24.8)^2 + (33.2)^2 + (23.6)^2 = 2274.24 \\
\sum \tau_{.k}^2 &= (19.2)^2 + (21.0)^2 + (22.5)^2 + (18.9)^2 = 1673.10
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
v &= \sum_{j,k} x_{jk}^2 - \frac{\tau^2}{ab} \\
&= 577.96 - 554.88 = 23.08 \\
v_r &= \frac{1}{b} \sum \tau_{j.}^2 - \frac{\tau^2}{ab} \\
&= \frac{1}{4}(2274.24) - 554.88 = 13.68 \\
v_c &= \frac{1}{a} \sum \tau_{.k}^2 - \frac{\tau^2}{ab} \\
&= \frac{1}{3}(1673.10) - 554.88 = 2.82 \\
v_e &= v - v_r - v_c \\
&= 23.08 - 13.68 - 2.82 = 6.58
\end{aligned}$$

de acuerdo con el Problema 9.11.

EXPERIMENTOS DE DOS FACTORES CON REPETICION

9.13. Un productor desea determinar la efectividad de cuatro tipos de máquinas A, B, C, D en la producción de tornillos. Para llevarlo a cabo se obtiene el número de tornillos defectuosos producidos por cada máquina durante los días de una semana en cada uno de los dos turnos. Los resultados se indican en la Tabla 9-20. Efectuar un análisis de varianza para ensayar al nivel de significación del 0.05 si hay (*a*) una diferencia en las máquinas, (*b*) una diferencia en los turnos.

Tabla 9-20

	PRIMER TURNO					SEGUNDO TURNO				
	Lun	Mar	Mie	Jue	Vie	Lun	Mar	Mie	Jue	Vie
A	6	4	5	5	4	5	7	4	6	8
B	10	8	7	7	9	7	9	12	8	8
C	7	5	6	5	9	9	7	5	4	6
D	8	4	6	5	5	5	7	9	7	10

Los datos se pueden organizar de igual forma como en la Tabla 9-21. En esta tabla se indican los dos factores principales, *máquina* y *turno*. Nótese que para cada máquina se han indicado dos turnos. Los días de la semana se pueden considerar como réplicas o repeticiones del rendimiento de cada máquina para los dos turnos.

Tabla 9-21

FACTOR I	FACTOR II	REPETICIONES					
Máquina	Turno	Lun	Mar	Mie	Jue	Vie	Totales
A	1	6	4	5	5	4	24
	2	5	7	4	6	8	30
B	1	10	8	7	7	9	41
	2	7	9	12	8	8	44
C	1	7	5	6	5	9	32
	2	9	7	5	4	6	31
D	1	8	4	6	5	5	28
	2	5	7	9	7	10	38
	TOTALES	57	51	54	47	59	268

La variación total para los datos de la Tabla 9-21 es

$$v = 6^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + 7^2 + 10^2 - \frac{(268)^2}{40} = 1946 - 1795.6 = 150.4$$

Para considerar los dos factores principales, *máquina* y *turno*, concentremos nuestra atención al total de los valores de repetición correspondiente a cada combinación de factores. Estos se ordenan en la Tabla 9-22, que es una tabla de dos factores con valores simples.

Tabla 9-22

	Primer turno	Segundo turno	TOTALES
A	24	30	54
B	41	44	85
C	32	31	63
D	28	38	66
TOTALES	125	143	268

La variación total para la Tabla 9-22, que llamaremos *variación subtotal* v_s, viene dada por

$$\begin{aligned} v_s &= \frac{(24)^2}{5} + \frac{(41)^2}{5} + \frac{(32)^2}{5} + \frac{(28)^2}{5} + \frac{(30)^2}{5} + \frac{(44)^2}{5} + \frac{(31)^2}{5} + \frac{(38)^2}{5} - \frac{(268)^2}{40} \\ &= 1861.2 - 1795.6 = 65.6 \end{aligned}$$

La variación entre filas viene dada por

$$v_r = \frac{(54)^2}{10} + \frac{(85)^2}{10} + \frac{(63)^2}{10} + \frac{(66)^2}{10} - \frac{(268)^2}{40} = 1846.6 - 1795.6 = 51.0$$

La variación entre columnas viene dada por

$$v_c = \frac{(125)^2}{20} + \frac{(143)^2}{20} - \frac{(268)^2}{40} = 1803.7 - 1795.6 = 8.1$$

Si restamos de la variación subtotal v_s la suma de las variaciones entre filas y columnas $(v_r + v_c)$ obtenemos la variación debida a las *interacciones* entre las filas y columnas. Esta viene dada por

$$v_i = v_s - v_r - v_c = 65.6 - 51.0 - 8.1 = 6.5$$

Finalmente la variación residual, que puede considerarse como la variación aleatoria o de error v_e (si se cree que los diferentes días de la semana no proveen ninguna diferencia importante), se halla restando la suma de variaciones fila, columna e interacción (es decir, la variación subtotal) de la variación total v. Esto resulta en

$$v_e = v - (v_r + v_c + v_i) = v - v_s = 150.4 - 65.6 = 84.8$$

Estas variaciones se indican en el análisis de varianza, Tabla 9-23. La tabla también da el número de grados de libertad correspondientes a cada tipo de variación. Así, ya que hay 4 filas en la Tabla 9-22 la variación debida a las filas tiene $4 - 1 = 3$ grados de libertad, en tanto que la variación debida a las 2 columnas tiene $2 - 1 = 1$ grado de libertad. Para hallar los grados de libertad debidos a la interacción observamos que hay 8 valores en la Tabla 9-22. Por tanto el total de grados de libertad es $8 - 1 = 7$. Puesto que 3 de esos se deben a filas y 1 a columnas, el resto, $7 - (3 + 1) = 3$, se debe a interacción. Ya que hay 40 valores en la tabla original 9-21 el total de grados de libertad es $40 - 1 = 39$. Por tanto los grados de libertad debidos a la variación residual o aleatoria es $39 - 7 = 32$.

Tabla 9-23

Variación	Grados de libertad	Media de cuadrados	F
Filas (máquinas), $v_r = 51.0$	3	$\hat{s}_r^2 = 17.0$	$\frac{17.0}{2.65} = 6.42$
Columnas (turnos), $v_c = 8.1$	1	$\hat{s}_c^2 = 8.1$	$\frac{8.1}{2.65} = 3.06$
Interacción, $v_i = 6.5$	3	$\hat{s}_i^2 = 2.167$	$\frac{2.167}{2.65} = 0.817$
Subtotal, $v_s = 65.6$	7		
Aleatoria o residual, $v_e = 84.8$	32	$\hat{s}_e^2 = 2.65$	
Total, $v = 150.4$	39		

Para continuar debemos determinar primero si hay alguna interacción significativa entre los factores básicos (es decir, filas y columnas de la Tabla 9-22). De la Tabla 9-23 vemos que para interacción $F = 0.817$, lo cual indica que la interacción no es significante, esto es, podemos rechazar la hipótesis $H_0^{(3)}$ de la página 315. Siguiendo las reglas de la página 315, vemos que F para las filas es 6.42. Puesto que $F_{.95} = 2.90$ para 3, 32 grados de libertad podemos rechazar la hipótesis $H_0^{(1)}$ de que las filas tienen medias iguales. Esto es equivalente a decir que al nivel 0.05 podemos concluir que las máquinas no son igualmente efectivas.

Para 1, 32 grados de libertad $F_{.95} = 4.15$. Entonces ya que F calculado para las columnas es 3.06, *no podemos* rechazar la hipótesis $H_0^{(2)}$ de que las columnas tengan medias iguales. Esto es equivalente a decir que al nivel 0.05 no hay diferencia significativa entre turnos.

Si decidimos analizar los resultados combinando las variaciones residual e interacción como lo recomiendan algunos estadísticos, hallamos para la variación combinada y grados de libertad combinados $v_i + v_e = 6.5 + 84.8 = 91.3$ y $3 + 32 = 35$ respectivamente, que conduce a una varianza combinada de $91.3/35 = 2.61$. Al usar este valor en cambio de 2.65 para el denominador de F en la Tabla 9-23 no afectan las conclusiones alcanzadas anteriormente.

9.14. Solucionar el Problema 9.13 si se utiliza el nivel 0.01.

A este nivel aún no hay interacción apreciable, de modo que podemos proceder más allá.

Ya que $F_{.99} = 4.47$ para 3, 32 grados de libertad y puesto que F para filas es 6.49, podemos concluir que aún al nivel 0.01 las máquinas no son igualmente efectivas.

Ya que $F_{.99} = 7.51$ para 1, 32 grados de libertad y puesto que F para columnas es 3.05, concluimos que al nivel 0.01 no hay diferencia significativa en los turnos.

CUADRADOS LATINOS

9.15. Un hacendado desea ensayar los efectos de cuatro fertilizantes A, B, C, D en el rendimiento de trigo. Para eliminar fuentes de error debidas a la variabilidad en la fertilidad del suelo emplea los fertilizantes en una distribución de un cuadrado latino como se indica en la Tabla 9-24, donde los números indican rendimientos en dkl por unidad de área. Efectuar un análisis de varianza para determinar si hay una diferencia significativa entre los fertilizantes a niveles de significación de (*a*) 0.05 y (*b*) 0.01.

Tabla 9-24

A 18	*C* 21	*D* 25	*B* 11
D 22	*B* 12	*A* 15	*C* 19
B 15	*A* 20	*C* 23	*D* 24
C 22	*D* 21	*B* 10	*A* 17

Tabla 9-25

					TOTALES
	A 18	*C* 21	*D* 25	*B* 11	75
	D 22	*B* 12	*A* 15	*C* 19	68
	B 15	*A* 20	*C* 23	*D* 24	82
	C 22	*D* 21	*B* 10	*A* 17	70
TOTALES	77	74	73	71	295

Tabla 9-26

	A	*B*	*C*	*D*	
TOTAL	70	48	85	92	295

Primero obtenemos totales para filas y columnas como se indica en la Tabla 9-25. También obtenemos el total de rendimientos para cada uno de los fertilizantes como se muestra en la Tabla 9-26. La variación total y las variaciones para filas, columnas y tratamientos se obtienen común y corriente. Hallamos

$$\text{Variación total} = v = (18)^2 + (21)^2 + (25)^2 + \cdots + (10)^2 + (17)^2 - \frac{(295)^2}{16}$$

$$= 5769 - 5439.06 = 329.94$$

$$\text{Variación entre filas} = v_r = \frac{(75)^2}{4} + \frac{(68)^2}{4} + \frac{(82)^2}{4} + \frac{(70)^2}{4} - \frac{(295)^2}{16}$$

$$= 5468.25 - 5439.06 = 29.19$$

$$\text{Variación entre columnas} = v_c = \frac{(77)^2}{4} + \frac{(74)^2}{4} + \frac{(73)^2}{4} + \frac{(71)^2}{4} - \frac{(295)^2}{16}$$

$$= 5443.75 - 5439.06 = 4.69$$

$$\text{Variación entre tratamientos} = v_t = \frac{(70)^2}{4} + \frac{(48)^2}{4} + \frac{(85)^2}{4} + \frac{(92)^2}{4} - \frac{(295)^2}{16}$$

$$= 5723.25 - 5439.06 = 284.19$$

El análisis de varianza se muestra en la Tabla 9-27.

Tabla 9-27

Variación	Grados de libertad	Media de cuadrados	F
Filas, 29.19	3	9.73	4.92
Columnas, 4.69	3	1.563	0.79
Tratamientos, 284.19	3	94.73	47.9
Residuales, 11.87	6	1.978	
Total, 329.94	15		

(*a*) Puesto que $F_{.95,3,6} = 4.76$, rechazamos al nivel 0.05 la hipótesis de que hay medias de fila iguales. Se deduce que al nivel 0.05 hay diferencia en la fertilidad del suelo de una fila a otra.

Puesto que el valor F para columnas es menor que 1, concluimos que no hay diferencia en la fertilidad del suelo en las columnas.

Ya que el valor de F para tratamientos es $47.9 > 4.76$, podemos concluir que hay diferencia entre fertilizantes.

(*b*) Ya que $F_{.99,3,6} = 9.78$, podemos aceptar la hipótesis que no hay diferencia en la fertilidad del suelo en las filas (o las columnas) al nivel de significación del 0.01. Sin embargo, debemos concluir que hay una diferencia entre fertilizantes al nivel 0.01.

CUADRADOS GRECO-LATINOS

9.16. Es de interés determinar si hay alguna diferencia en el kilometraje por galón entre las gasolinas A, B, C, D. Diseñar un experimento utilizando cuatro conductores, cuatro autos y cuatro caminos diferentes.

Puesto que se incluye igual número (cuatro) de gasolinas, conductores, autos y caminos podemos emplear un *cuadrado greco-latino*. Supóngase que los diferentes autos se representan por las filas y los diferentes conductores por las columnas, como se indica en la Tabla 9-28. Asignamos las diferentes gasolinas A, B, C, D aleatoriamente a filas y columnas, de modo que cada letra aparezca solamente una vez en cada fila y solamente una vez en cada columna. Así cada conductor tendrá una oportunidad para conducir cada auto y utilizar cada tipo de gasolina (y ningún auto será conducido dos veces con la misma gasolina).

Asignamos aleatoriamente los cuatro caminos que van a emplearse, denotados por α, β, γ, δ, sujetos a los mismos requisitos impuestos a las letras latinas. Así cada conductor tendrá la oportunidad de conducir a lo largo de cada uno de los caminos. Un arreglo posible es el dado en la Tabla 9-28.

Tabla 9-28

	CONDUCTORES			
AUTOS	1	2	3	4
1	B_γ	A_β	D_δ	C_α
2	A_δ	B_α	C_γ	D_β
3	D_α	C_δ	B_β	A_γ
4	C_β	D_γ	A_α	B_δ

9.17. Suponga que en el desarrollo del experimento del Problema 9-16 el número de kilómetros por galón es el dado en la Tabla 9-29. Utilizar el análisis de varianza para determinar si hay alguna diferencia significativa al nivel 0.05.

Primero obtenemos totales fila y columna como se indica en la Tabla 9-30.

Tabla 9-29

CONDUCTORES

AUTOS	1	2	3	4
1	B_γ 19	A_β 16	D_δ 16	C_α 14
2	A_δ 15	B_α 18	C_γ 11	D_β 15
3	D_α 14	C_δ 11	B_β 21	A_γ 16
4	C_β 16	D_γ 16	A_α 15	B_δ 23

Tabla 9-30

					TOTALES
	B_γ 19	A_β 16	D_δ 16	C_α 14	65
	A_δ 15	B_α 18	C_γ 11	D_β 15	59
	D_α 14	C_δ 11	B_β 21	A_γ 16	62
	C_β 16	D_γ 16	A_α 15	B_δ 23	70
TOTALES	64	61	63	68	256

Entonces obtenemos los totales para cada letra latina y para cada letra griega, como sigue:

$$\begin{aligned}
&A \text{ total:} && 15+16+15+16 = 62\\
&B \text{ total:} && 19+18+21+23 = 81\\
&C \text{ total:} && 16+11+11+14 = 52\\
&D \text{ total:} && 14+16+16+15 = 61\\
&\alpha \text{ total:} && 14+18+15+14 = 61\\
&\beta \text{ total:} && 16+16+21+15 = 68\\
&\gamma \text{ total:} && 19+16+11+16 = 62\\
&\delta \text{ total:} && 15+11+16+23 = 65
\end{aligned}$$

Entonces calculamos sus variaciones correspondientes, utilizando el método corto.

$$\text{Filas:} \quad \frac{(65)^2}{4}+\frac{(59)^2}{4}+\frac{(62)^2}{4}+\frac{(70)^2}{4}-\frac{(256)^2}{16} = 4112.50 - 4096 = 16.50$$

$$\text{Columnas:} \quad \frac{(64)^2}{4}+\frac{(61)^2}{4}+\frac{(63)^2}{4}+\frac{(68)^2}{4}-\frac{(256)^2}{16} = 4102.50 - 4096 = 6.50$$

$$\begin{matrix}\text{Gasolinas:}\\ (A, B, C, D)\end{matrix} \quad \frac{(62)^2}{4}+\frac{(81)^2}{4}+\frac{(52)^2}{4}+\frac{(61)^2}{4}-\frac{(256)^2}{16} = 4207.50 - 4096 = 111.50$$

$$\begin{matrix}\text{Caminos:}\\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta)\end{matrix} \quad \frac{(61)^2}{4}+\frac{(68)^2}{4}+\frac{(62)^2}{4}+\frac{(65)^2}{4}-\frac{(256)^2}{16} = 4103.50 - 4096 = 7.50$$

La variación total es

$$(19)^2+(16)^2+(16)^2+\cdots+(15)^2+(23)^2-\frac{(256)^2}{16} = 4244 - 4096 = 148.00$$

de modo que la variación debida al error es

$$148.00 - 16.50 - 6.50 - 111.50 - 7.50 = 6.00$$

Los resultados se muestran en el análisis de varianza, Tabla 9-31. El número total de grados de libertad es $n^2 - 1$ para un cuadrado de $n \times n$. Las filas, columnas, letras latinas y letras griegas cada una tiene $n - 1$ grados de libertad. Por tanto los grados de libertad para el error es $n^2 - 1 - 4(n-1) = (n-1)(n-3)$. En nuestro caso $n = 4$.

Tabla 9-31

Variación	Grados de libertad	Media de cuadrados	F
Filas (autos) 16.50	3	5.500	$\frac{5.500}{2.000} = 2.75$
Columnas (conductores), 6.50	3	2.167	$\frac{2.167}{2.000} = 1.08$
Gasolinas, (A, B, C, D), 111.50	3	37.167	$\frac{37.167}{2.000} = 18.6$
Caminos $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, 7.50	3	2.500	$\frac{2.500}{2.000} = 1.25$
Error, 6.00	3	2.000	
Total, 148.00	15		

Tenemos $F_{.95, 3, 3} = 9.28$ y $F_{.99, 3, 3} = 29.5$. Por tanto podemos rechazar la hipótesis de que las gasolinas son iguales al nivel 0.05 pero no al nivel 0.01.

PROBLEMAS DIVERSOS

9.18. Demostrar que $\sum \alpha_j = 0$ [(*15*), página 308].

El tratamiento medias de la población viene dado por $\mu_j = \mu + \alpha_j$. Por tanto

$$\sum_{j=1}^{a} \mu_j = \sum_{j=1}^{a} \mu + \sum_{j=1}^{a} \alpha_j = a\mu + \sum_{j=1}^{a} \alpha_j = \sum_{j=1}^{a} \mu_j + \sum_{j=1}^{a} \alpha_j$$

donde hemos utilizado la definición $\mu = (\Sigma \mu_j)/a$. Se deduce que $\Sigma \alpha_j = 0$.

9.19. Derivar (*a*) la ecuación (*17*), (*b*) la ecuación (*16*), de la página 308.

(*a*) Por definición tenemos

$$\begin{aligned} V_w &= \sum_{j,k} (X_{jk} - \bar{X}_{j.})^2 \\ &= b \sum_{j=1}^{a} \left[\frac{1}{b} \sum_{k=1}^{b} (X_{jk} - \bar{X}_{j.})^2 \right] \\ &= b \sum_{j=1}^{a} S_j^2 \end{aligned}$$

donde S_j^2 es la varianza muestral para el tratamiento j, como se define por (*15*), Capítulo 5. Entonces, ya que el tamaño de la muestra es b,

$$\begin{aligned} E(V_w) &= b \sum_{j=1}^{a} E(S_j^2) \\ &= b \sum_{j=1}^{a} \left(\frac{b-1}{b} \sigma^2 \right) \\ &= a(b-1)\sigma^2 \end{aligned}$$

utilizando (*16*) del Capítulo 5.

(*b*) Por definición

$$\begin{aligned} V_b &= b\sum_{j=1}^{a}(\bar{X}_{j.}-\bar{X})^2 \\ &= b\sum_{j=1}^{a}\bar{X}_{j.}^2 - 2b\bar{X}\sum_{j=1}^{a}\bar{X}_{j.} + ab\bar{X}^2 \\ &= b\sum_{j=1}^{a}\bar{X}_{j.}^2 - ab\bar{X}^2 \end{aligned}$$

ya que $\bar{X} = \left(\sum_j \bar{X}_{j.}\right)\Big/ a$. Entonces, omitiendo el índice de la suma, tenemos

$$(1) \qquad E(V_b) = b\sum E(\bar{X}_{j.}^2) - abE(\bar{X}^2)$$

Entonces para cualquier variable aleatoria U, $E(U^2) = \text{Var}(U) + [E(U)]^2$. Por tanto

$$(2) \qquad E(\bar{X}_{j.}^2) = \text{Var}(\bar{X}_{j.}) + [E(\bar{X}_{j.})]^2$$

$$(3) \qquad E(\bar{X}^2) = \text{Var}(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2$$

Pero ya que las poblaciones de tratamiento son normales, con medias μ_j y varianza común σ^2, tenemos del Teorema 5-4, página 158:

$$(4) \qquad \text{Var}(\bar{X}_{j.}) = \frac{\sigma^2}{b}$$

$$(5) \qquad \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{ab}$$

$$(6) \qquad E(\bar{X}_{j.}) = \mu_j = \mu + \alpha_j$$

$$(7) \qquad E(\bar{X}) = \mu$$

Utilizando los resultados (*2*)-(*7*), más el resultado del Problema 9.18, en (*1*) tenemos

$$\begin{aligned} E(V_b) &= b\sum\left[\frac{\sigma^2}{b} + (\mu+\alpha_j)^2\right] - ab\left[\frac{\sigma^2}{ab} + \mu^2\right] \\ &= a\sigma^2 + b\sum(\mu+\alpha_j)^2 - \sigma^2 - ab\mu^2 \\ &= (a-1)\sigma^2 + ab\mu^2 + 2b\mu\sum\alpha_j + \sum\alpha_j^2 - ab\mu^2 \\ &= (a-1)\sigma^2 + b\sum\alpha_j^2 \end{aligned}$$

9.20. Demostrar el Teorema 9-1, página 309.

Como se indica en el Problema 9.19(*a*),

$$V_w = b\sum_{j=1}^{a} S_j^2 \qquad \text{ó} \qquad \frac{V_w}{\sigma^2} = \sum_{j=1}^{a}\frac{bS_j^2}{\sigma^2}$$

donde S_j^2 es la varianza muestral para muestras de tamaño b extraídas de la población de tratamiento j. Por el Teorema 5-6, página 161, bS_j^2/σ^2 tiene una distribución chi-cuadrado con $b-1$ grados de libertad. Entonces, puesto que las varianzas S_j^2 son independientes, concluimos del Teorema 4-4, página 116, que V_w/σ^2 tiene distribución chi-cuadrado con $a(b-1)$ grados de libertad.

9.21. En el Problema 9.13 supusimos que no existían diferencias significativas en las repeticiones, esto es, los diferentes días de la semana. ¿Podemos sostener esta conclusión al nivel de significación del (*a*) 0.05, (*b*) 0.01?

Si existe alguna variación debida a las repeticiones se incluye en lo que se llama el error residual o aleatorio, $v_e = 84.8$, en la Tabla 9-23. Para hallar la variación debida a la repetición utilizamos los totales de columna en la Tabla 9-21, obteniendo

$$\begin{aligned} v_{\text{rep}} &= \frac{(57)^2}{8} + \frac{(51)^2}{8} + \frac{(54)^2}{8} + \frac{(47)^2}{8} + \frac{(59)^2}{8} - \frac{(268)^2}{40} \\ &= 1807 - 1795.6 = 11.4 \end{aligned}$$

Puesto que hay 5 repeticiones, el número de grados de libertad asociados con esta variación es $5 - 1 = 4$. La variación residual después de restar la variación debida a la repetición es $v_e = 84.8 - 114 = 73.4$. Las otras variaciones son las mismas a las de la Tabla 9-23. La tabla final de análisis de varianza, teniendo en cuenta las repeticiones, es la Tabla 9-32.

Tabla 9-32

Variación	Grados de libertad	Media de cuadrados	F
Filas (máquinas), $v_r = 51.0$	3	17.0	$\frac{17.0}{2.621} = 6.49$
Columnas (turnos), $v_c = 8.1$	1	8.1	$\frac{8.1}{2.621} = 3.05$
Repeticiones (días de la semana), $v_{\text{rep}} = 11.4$	4	2.85	$\frac{2.85}{2.621} = 1.09$
Interacción, $v_i = 6.5$	3	2.167	$\frac{2.167}{2.621} = 0.827$
Aleatoria o residual $v_e' = 73.4$	28	2.621	
Total, $v = 150.4$	39		

De la tabla vemos que el F calculado para repeticiones es 1.09. Pero ya que $F_{.95} = 2.71$ para 4, 28 grados de libertad, podemos concluir que no hay variación significativa al nivel de 0.05 (y por tanto al nivel 0.01) debida a las repeticiones, es decir, los días de la semana no son significativos. Las conclusiones relacionando máquinas y turnos son las mismas a las obtenidas en el Problema 9.13.

9.22. Describir cómo se pueden utilizar las técnicas de análisis de varianza para clasificación triple o experimentos con los tres factores (con factores simples). Reproduzca la tabla de análisis de varianza a emplearse en tal caso.

Suponemos que la clasificación se hace en A grupos, denotados por $A_1, \ldots, A_a$; B-grupos, denotados por $B_1, \ldots, B_b$; C-grupos denotados por $C_1, \ldots, C_c$. El valor en A_j, B_k, C_l se denota por x_{jkl}. El valor $\bar{x}_{jk.}$, por ejemplo, denota la media de valores en la clase C cuando A_j y B_k se mantienen fijos. Significados análogos se dan a $\bar{x}_{j.l}$ y $\bar{x}_{.kl}$. El valor $\bar{x}_{j..}$ es la media de valores para las clases B y C cuando A_j es constante. Finalmente $\bar{x}$ denota la gran media.

Existirá una *variación total* dada por

$$v = \sum_{j,k,l} (x_{jkl} - \bar{x})^2 \tag{1}$$

que puede dividirse en siete variaciones, como se indica en la Tabla 9-33. Estas variaciones son entre clases del mismo tipo y entre clases de diferentes tipos (*interacciones*). La interacción entre todas las clases se denomina como antes la *variación aleatoria* o *residual*.

Las siete variaciones en las que se puede dividir (*1*) vienen dadas por

$$v = v_A + v_B + v_C + v_{AB} + v_{BC} + v_{CA} + v_{ABC}$$

donde

$$v_A = bc \sum_j (\bar{x}_{j..} - \bar{x})^2, \quad v_B = ca \sum_k (\bar{x}_{.k.} - \bar{x})^2, \quad v_C = ab \sum_l (\bar{x}_{..l} - \bar{x})^2$$

$$v_{AB} = c \sum_{j,k} (\bar{x}_{jk.} - \bar{x}_{j..} - \bar{x}_{.k.} + \bar{x})^2$$

$$v_{BC} = a \sum_{k,l} (\bar{x}_{.kl} - \bar{x}_{.k} - \bar{x}_{..l} + \bar{x})^2$$

$$v_{CA} = b \sum_{j,l} (\bar{x}_{j.l} - \bar{x}_{..l} - \bar{x}_{j..} + \bar{x})^2$$

$$v_{ABC} = \sum_{j,k,l} (x_{jkl} - \bar{x}_{jk.} - \bar{x}_{j.l} - \bar{x}_{.kl} + \bar{x}_{j..} + \bar{x}_{.k.} + \bar{x}_{..l} - \bar{x})^2$$

Tabla 9-33

Variación	Grados de libertad	Media de cuadrados	F
v_A (entre grupos A)	$a-1$	$\hat{s}_A^2 = \dfrac{v_A}{a-1}$	$\hat{s}_A^2/\hat{s}_{ABC}^2$ $a-1,\ (a-1)(b-1)(c-1)$ gl
v_B (entre grupos B)	$b-1$	$\hat{s}_B^2 = \dfrac{v_B}{b-1}$	$\hat{s}_B^2/\hat{s}_{ABC}^2$ $b-1,\ (a-1)(b-1)(c-1)$ gl
v_C (entre grupos C)	$c-1$	$\hat{s}_C^2 = \dfrac{v_C}{c-1}$	$\hat{s}_C^2/\hat{s}_{ABC}^2$ $c-1,\ (a-1)(b-1)(c-1)$ gl
v_{AB} (entre grupos A y B)	$(a-1)(b-1)$	$\hat{s}_{AB}^2 = \dfrac{v_{AB}}{(a-1)(b-1)}$	$\hat{s}_{AB}^2/\hat{s}_{ABC}^2$ $(a-1)(b-1),\ (a-1)(b-1)(c-1)$ gl
v_{BC} (entre grupos B y C)	$(b-1)(c-1)$	$\hat{s}_{BC}^2 = \dfrac{v_{BC}}{(b-1)(c-1)}$	$\hat{s}_{BC}^2/\hat{s}_{ABC}^2$ $(b-1)(c-1),\ (a-1)(b-1)(c-1)$ gl
v_C (entre grupos C y A)	$(c-1)(a-1)$	$\hat{s}_{CA}^2 = \dfrac{v_{CA}}{(c-1)(a-1)}$	$\hat{s}_{CA}^2/\hat{s}_{ABC}^2$ $(c-1)(a-1),\ (a-1)(b-1)(c-1)$ gl
v_A (entre grupos A, B y C)	$(a-1)(b-1)(c-1)$	$\hat{s}_{ABC}^2 = \dfrac{v_{ABC}}{(a-1)(b-1)(c-1)}$	
v (total)	$abc-1$		

Problemas suplementarios

CLASIFICACION SIMPLE O EXPERIMENTOS DE UN FACTOR

9.23. Se efectúa un experimento para determinar el rendimiento de 5 variedades de trigo A, B, C, D, E. Se asignan cuatro parcelas de terreno a cada variedad y los rendimientos (en hl/ha) son los mostrados en la Tabla 9.34. Suponiendo que las parcelas son de fertilidad semejante y que las variedades se asignan aleatoriamente a las parcelas, determinar si hay una diferencia significativa en rendimientos a los niveles de significación del (a) 0.05, (b) 0.01.

Tabla 9-34

A	20	12	15	19
B	17	14	12	15
C	23	16	18	14
D	15	17	20	12
E	21	14	17	18

9.24. Una compañía desea ensayar 4 tipos de neumáticos *A*, *B*, *C*, *D*. La duración de los neumáticos, determinada de sus fibras, vienen dadas (en miles de millas) en la Tabla 9-35, donde cada tipo se ha tratado en 6 automóviles semejantes asignando los neumáticos aleatoriamente. Ensayar a los niveles (*a*) 0.05, (*b*) 0.01 si hay diferencia en los neumáticos.

9.25. Un profesor desea ensayar tres métodos de enseñanza I, II, III. Para llevarlo a cabo, tres grupos de 5 estudiantes se escogen aleatoriamente, y a cada grupo se le enseña por un método diferente. Luego se da el mismo examen a todos los estudiantes y se obtienen las calificaciones indicadas en la Tabla 9-36. Determinar al nivel de (*a*) 0.05, (*b*) 0.01 si hay una diferencia significativa en los métodos de enseñanza.

Tabla 9-35

A	33	38	36	40	31	35
B	32	40	42	38	30	34
C	31	37	35	33	34	30
D	29	34	32	30	33	31

Tabla 9-36

Método I	75	62	71	58	73
Método II	81	85	68	92	90
Método III	73	79	60	75	81

MODIFICACIONES PARA NUMEROS DESIGUALES DE OBSERVACIONES

9.26. La Tabla 9-37 da los números de millas al galón obtenido por automóviles semejantes utilizando 5 marcas de gasolinas. Ensayar al nivel de (*a*) 0.05, (*b*) 0.01 si hay alguna diferencia significativa en las marcas.

9.27. Durante un semestre un estudiante obtuvo las calificaciones indicadas en la Tabla 9-38. Ensayar a los niveles de (*a*) 0.05, (*b*) 0.01 si hay una diferencia significativa en sus calificaciones entre ésas asignaturas.

Tabla 9-37

Marca *A*	12	15	14	11	15
Marca *B*	14	12	15		
Marca *C*	11	12	10	14	
Marca *D*	15	18	16	17	14
Marca *E*	10	12	14	12	

Tabla 9-38

Matemáticas	72	80	83	75	
Ciencias	81	74	77		
Inglés	88	82	90	87	80
Economía	74	71	77	70	

9.28. Demostrar los resultados (*24*), (*25*) y (*26*), página 310, para el caso en que los números de observaciones sean diferentes.

CLASIFICACION DOBLE O EXPERIMENTOS DE DOS FACTORES

9.29. Demostrar el resultado (*30*), página 311.

9.30. Demostrar las fórmulas cortas (*31*)—(*34*), página 311.

9.31. Los artículos fabricados por una compañía se producen por 3 operarios utilizando 3 máquinas diferentes. El fabricante desea determinar si hay una diferencia (*a*) entre operarios, (*b*) entre máquinas. Se efectúa un experimento para determinar el número de artículos diarios producidos por cada operario utilizando cada una de las máquinas; los resultados se dan en la Tabla 9-39. Dar la información deseada utilizando un nivel de significación del 0.05.

Tabla 9-39

	Operario 1	Operario 2	Operario 3
Máquina *A*	23	27	24
Máquina *B*	34	30	28
Máquina *C*	28	25	27

9.32. Solucionar el Problema 9-31 utilizando el nivel de significación del 0.01.

9.33. Semillas de 5 tipos de maíz se siembran en 5 bloques. Cada bloque se divide en 4 parcelas, que se asignan aleatoriamente a los 4 tipos. Ensayar al nivel 0.05 si los rendimientos en hl/ha, como se muestra en la Tabla 9-40, varían significativamente con (*a*) las diferencias del terreno (es decir, los 5 bloques), (*b*) las diferencias en el tipo de maíz.

Tabla 9-40

		TIPOS DE MAIZ			
		I	*II*	*III*	*IV*
	A	12	15	10	14
	B	15	19	12	11
BLOQUES	*C*	14	18	15	12
	D	11	16	12	16
	E	16	17	11	14

9.34. Solucionar el Problema 9.33 utilizando el nivel de significación del 0.01.

9.35. Suponer que en el Problema 9.24 la primera observación para cada tipo de neumático se hace empleando una clase específica de automóvil, la segunda observación empleando una segunda clase específica, y así sucesivamente. Ensayar al nivel de 0.05 si hay diferencia en (*a*) los tipos de neumáticos, (*b*) las clases de automóviles.

9.36. Solucionar el Problema 9.35 utilizando el nivel de significación del 0.01.

9.37. Suponer que en el Problema 9.25 el primer valor para cada método de enseñanza corresponde a un estudiante de un plantel específico, el segundo a un estudiante de otro plantel, y así sucesivamente. Ensayar la hipótesis al nivel 0.05 de que hay diferencia en (*a*) el método de enseñanza, (*b*) en los planteles.

9.38. Se efectúa un experimento para ensayar si el color del pelo y las estaturas de estudiantes adultos tienen alguna incidencia en el rendimiento escolástico. Los resultados se dan en la Tabla 9-41, donde los números indican 10 en el tope de los graduados. Analizar el experimento al nivel de 0.05.

Tabla 9-41

	pelirrojo	rubio	castaño
Alto	75	78	80
Mediano	81	76	79
Pequeño	73	75	77

9.39. Solucionar el Problema 9.38 al nivel 0.01.

EXPERIMENTOS DE DOS FACTORES CON REPETICION

9.40. Suponer que el experimento del Problema 9.23 se lleva a cabo en el suroeste de un país y que las columnas de la Tabla 9-34 indican 4 tipos diferentes de fertilizante, en tanto que en un experimento semejante efectuado en el oeste da los resultados en la Tabla 9-42. Ensayar al nivel 0.05 si hay una diferencia en (*a*) los fertilizantes, (*b*) la localización.

Tabla 9-42

A	16	18	20	23
B	15	17	16	19
C	21	19	18	21
D	18	22	21	23
E	17	18	24	20

9.41. Solucionar el Problema 9.40 utilizando un nivel 0.01.

9.42. La Tabla 9-43 da el número de artículos producidos por 4 operarios diferentes trabajando en dos tipos de máquinas, *I* y *II*, durante días diferentes. Determinar al nivel de 0.05 si hay diferencias significativas en (*a*) los operarios, (*b*) las máquinas.

Tabla 9-43

	Máquina *I*					Máquina *II*				
	Lun	Mar	Mie	Jue	Vie	Lun	Mar	Mie	Jue	Vie
Operario *A*	15	18	17	20	12	14	16	18	17	15
Operario *B*	12	16	14	18	11	11	15	12	16	12
Operario *C*	14	17	18	16	13	12	14	16	14	11
Operario *D*	19	16	21	23	18	17	15	18	20	17

CUADRADOS LATINOS

9.43. Se efectúa un experimento para ensayar el efecto sobre el rendimiento de 4 tratamientos de fertilizantes A, B, C, D, y de variaciones del terreno en dos direcciones perpendiculares. Se obtiene el cuadrado latino, Tabla 9.44, donde los números indican rendimiento de maíz por unidad de área. Ensayar la hipótesis a un nivel del 0.01 de que no hay diferencia en (*a*) los fertilizantes, (*b*) las variaciones del terreno.

Tabla 9-44

C 8	A 10	D 12	B 11
A 14	C 12	B 11	D 15
D 10	B 14	C 16	A 10
B 7	D 16	A 14	C 12

9.44. Solucionar el Problema 9.43 utilizando un nivel 0.05.

9.45. Con referencia al Problema 9.38 suponer que introducimos un factor adicional dando la sección donde nació el estudiante Este, Centro, Oeste, como se muestra en la Tabla 9-45. Determinar a un nivel de 0.05 si hay una diferencia significativa en rendimiento académico de los estudiantes debida a diferencias en (*a*) estatura, (*b*) color de pelo, (*c*) lugar de nacimiento.

Tabla 9-45

E 75	O 78	C 80
C 81	E 76	O 79
O 73	C 75	E 77

CUADRADOS GRECO-LATINOS

9.46. Para producir un tipo superior de alimento para pollos, 4 cantidades diferentes de dos compuestos químicos se agregan a los ingredientes básicos. Las cantidades diferentes del primer compuesto se indican por A, B, C, D y las del segundo por $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. El alimento se da a los pollitos ordenados en grupos de acuerdo con 4 pesos iniciales, W_1, W_2, W_3, W_4 y 4 especies diferentes S_1, S_2 S_3, S_4. El aumento en peso por unidad de tiempo se da en el cuadrado greco-latino de la Tabla 9-46. Efectuar un análisis de la varianza del experimento al nivel de significación del 0.05, estableciendo cualquier conclusión a que pueda llegarse.

Tabla 9-46

	W_1	W_2	W_3	W_4
S_1	C_γ 8	B_β 6	A_α 5	D_δ 6
S_2	A_δ 4	D_α 3	C_β 7	B_γ 3
S_3	D_β 5	A_γ 6	B_δ 5	C_α 6
S_4	B_α 6	C_δ 10	D_γ 10	A_β 8

9.47. Cuatro tipos de cable T_1, T_2, T_3, T_4 se fabrican por cada una de cuatro compañías, C_1, C_2, C_3, C_4. Cuatro operarios A, B, C, D usando cuatro máquinas diferentes, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, miden las fortalezas de los cables. Las fortalezas promedio obtenidas se dan en el cuadrado greco-latino de la Tabla 9-47. Efectuar un análisis de varianza al nivel 0.05, estableciendo cualquier conclusión a que pueda llegarse.

Tabla 9-47

	C_1	C_2	C_3	C_4
T_1	A_β 164	B_γ 181	C_α 193	D_δ 160
T_2	C_δ 171	D_α 162	A_γ 183	B_β 145
T_3	D_γ 198	C_β 212	B_δ 207	A_α 188
T_4	B_α 157	A_δ 172	D_β 166	C_γ 136

PROBLEMAS DIVERSOS

9.48. La Tabla 9-48 contiene los datos sobre el moho acumulado en hierro tratado con químicos A, B o C, respectivamente. Determinar al nivel (*a*) 0.05, (*b*) 0.01 si hay una diferencia significativa en los tratamientos.

Tabla 9-48

A	3	5	4	4
B	4	2	3	3
C	6	4	5	5

Tabla 9-49

Alto	110	105	118	112	90	
Pequeño	95	103	115	107		
Mediano	108	112	93	104	96	102

9.49. Un experimento mide el I. Q. de estudiantes adultos de estaturas altas, medias y pequeñas. Los resultados se indican en la Tabla 9-49. Determinar al nivel (*a*) 0.05, (*b*) 0.01 si hay alguna diferencia significativa en los I.Q. relativo a diferencia de estaturas.

9.50. Demostrar (*a*) la ecuación (*37*), (*b*) la ecuación (*38*), página 312.

9.51. Demostrar (*a*) la ecuación (*39*), (*b*) la ecuación (*40*), página 312.

9.52. Se realiza un examen para determinar si los veteranos o los no veteranos de diferentes I.Q. rinden mejor. Los puntajes obtenidos se muestran en la Tabla 9-50. Determinar al nivel de 0.05 si hay una diferencia en los puntajes debido a diferencias en (*a*) el estado veterano, (*b*) I.Q.

Tabla 9-50

	Alto I.Q.	Medio I.Q.	Bajo I.Q.
Veterano	90	81	74
No veterano	85	78	70

9.53. Solucionar el Problema 9.52 utilizando un nivel 0.01.

9.54. La Tabla 9-51 muestra los puntajes para una muestra de estudiantes universitarios de diferentes partes del país con diferentes I.Q. Analizar la tabla al nivel de 0.05 y establecer sus conclusiones.

9.55. Solucionar el Problema 9.54 al nivel 0.01.

9.56. En el Problema 9-42, ¿puede determinar si hay una diferencia significativa en el número de artículos producidos en los diferentes días de la semana? Explicar.

Tabla 9-51

	Alto	Medio	Bajo
Este	88	80	72
Oeste	84	78	75
Sur	86	82	70
Norte y centro	80	75	79

9.57. En los cálculos de análisis de varianza se sabe que puede sumarse o restarse una constante apropiada de cada valor sin afectar las conclusiones. ¿Es ésto cierto si cada valor se multiplica o divide por una constante apropiada? Justificar su respuesta.

9.58. Derivar los resultados (*43*) y (*44*), página 312.

9.59. Demostrar el Teorema 9-2, página 309.

9.60. Demostrar el Teorema 9-3, página 309.

9.61. Suponer que los resultados en la Tabla 9-48 del Problema 9-48 son válidos para el noroeste, en tanto que los resultados correspondientes para el oeste se dan en la Tabla 9-52. Determinar el nivel de 0.05 si hay diferencias debido a (*a*) los químicos, (*b*) la localización.

Tabla 9-52

A	5	4	6	3
B	3	4	2	3
C	5	7	4	6

Tabla 9-53

A	17	14	18	12
B	20	10	20	15
C	18	15	16	17
D	12	11	14	11
E	15	12	19	14

9.62. Con referencia a los Problemas 9.23 y 9.40 suponer que un experimento adicional realizado en el noroeste produce los resultados de la Tabla 9-53. Ensayar al nivel 0.05 si hay diferencia en (*a*) fertilizantes, (*b*) los tres lugares.

9.63. Solucionar el Problema 9.62 utilizando un nivel 0.01.

9.64. Efectuar un análisis de varianza en el cuadrado latino de la Tabla 9-54 a un nivel 0.05 y establecer conclusiones.

9.65. Haga el montaje de un experimento que conduzca al cuadrado latino de la Tabla 9-54.

Tabla 9-54

FACTOR 1

FACTOR 2	*B* 16	*C* 21	*A* 15
	A 18	*B* 23	*C* 14
	C 15	*A* 18	*B* 12

9.66. Efectuar un análisis de varianza en el cuadrado greco-latino de la Tabla 9-55 a un nivel 0.05 y establecer conclusiones.

Tabla 9-55

FACTOR 1

FACTOR 2	A_γ 6	B_β 12	C_δ 4	D_α 18
	B_δ 3	A_α 8	D_γ 15	C_β 14
	D_β 15	C_γ 20	B_α 9	A_δ 5
	C_α 16	D_δ 6	A_β 17	B_γ 7

9.67. Haga el montaje de un experimento que conduzca al cuadrado greco-latino de la Tabla 9-55.

9.68. Describir cómo emplear las técnicas de análisis de varianza para experimentos de tres factores con repetición.

9.69. Montar y solucionar un problema que ilustre el procedimiento en el Problema 9.68.

9.70. Suponer que en el Problema 9.21 hallamos una diferencia significativa en los días de la semana, es decir, las repeticiones. ¿Deberían modificarse las conclusiones obtenidas en el Problema 9.13? Justificar sus conclusiones.

9.71. En la práctica, ¿esperaría encontrar un (*a*) cuadrado latino de 2 × 2? (*b*) ¿un cuadrado greco-latino de 3 × 3? Explicar.

Apéndices

Apéndice A

Temas matemáticos

SUMAS ESPECIALES

Las siguientes son algunas sumas de series que se presentan con frecuencia. 0! = 1. Cuando la serie es infinita se indica el intervalo de convergencia.

1. $\sum_{j=1}^{m} j = 1 + 2 + 3 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$

2. $\sum_{j=1}^{m} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$

3. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ para todo x

4. $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!}$ para todo x

5. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!}$ para todo x

6. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} x^j$ $|x| < 1$

7. $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}$ $-1 \leqq x < 1$

FORMULAS DE EULER

8. $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta, \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$

9. $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

LA FUNCION GAMMA

La *función gamma*, denotada por $\Gamma(n)$, se define por

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t}\, dt \qquad n > 0 \tag{1}$$

La *fórmula de recurrencia* viene dada por

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \tag{2}$$

donde Γ (*1*) = 1. Una extensión de la función gamma para $n < 0$ puede obtenerse por el empleo de (*2*).

Si n es un entero positivo, entonces

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{3}$$

Por esta razón $\Gamma(n)$ se conoce como la *función factorial*. Una propiedad importante de la función gamma es que

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi} \tag{4}$$

Para $p = 1/2$, (*4*) da

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{5}$$

Para valores grandes de n tenemos la *fórmula asintótica de Stirling:*

$$\Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \tag{6}$$

donde el signo ~ indica que la relación de los dos lados tiende a 1 cuando $n \to \infty$. En el caso de que n sea un entero positivo grande, una buena aproximación para $n!$ viene dada por

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \tag{7}$$

LA FUNCION BETA

La *función beta*, denotada por $B(m, n)$, se define como

$$B(m,n) = \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\,du \qquad m > 0,\ n > 0 \tag{8}$$

Está relacionada a la función gamma por

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{9}$$

INTEGRALES ESPECIALES

Las siguientes son algunas integrales que se presentan en probabilidad y estadística.

10. $$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad a > 0$$

11. $$\int_0^\infty x^m e^{-ax^2}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2a^{(m+1)/2}} \qquad a > 0,\ m > -1$$

12. $$\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-b^2/4a} \qquad a > 0$$

13. $$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad a > 0$$

14. $$\int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} bx \, dx = \frac{b}{a^2 + b^2} \qquad a > 0$$

15. $$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \, dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \qquad a > 0, \; p > 0$$

16. $$\int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+bx+c)} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{(b^2-4ac)/4a} \qquad a > 0$$

17. $$\int_0^\infty e^{-(ax^2+bx+c)} \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{(b^2-4ac)/4a} \operatorname{erfc}\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right) \qquad a > 0$$

donde

$$\operatorname{erfc}(u) = 1 - \operatorname{erf}(u) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-x^2} \, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty e^{-x^2} \, dx$$

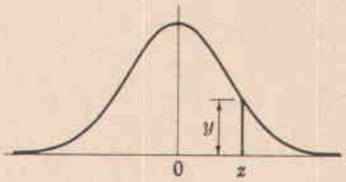
se denomina la *función complementaria de error.*

18. $$\int_0^\infty \frac{\cos \omega x}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a\omega} \qquad a > 0, \; \omega > 0$$

19. $$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta \, d\theta = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)} \qquad m > 0, \; n > 0$$

Apéndice B

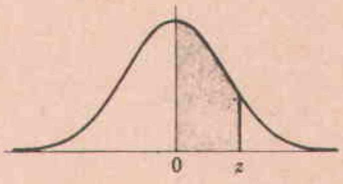
**Ordenadas (y)
de la
curva normal
tipificada
en z**



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.1	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026	.0025	.0025
3.2	.0024	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0020	.0019	.0018	.0018
3.3	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0013	.0013
3.4	.0012	.0012	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009
3.5	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007	.0007	.0007	.0006
3.6	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0004
3.7	.0004	.0004	0004	.0004	.0004	.0004	.0003	.0003	.0003	.0003
3.8	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
3.9	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001

Apéndice C

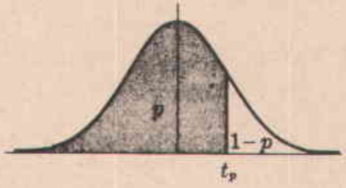
Areas
bajo la
curva normal
tipificada
de 0 a z



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

Apéndice D

Percentilas (t_p)
de la
distribución t de Student
con ν grados de libertad

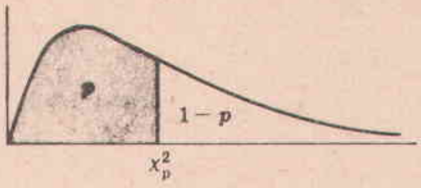


ν	$t_{.55}$	$t_{.60}$	$t_{.70}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$
1	.158	.325	.727	1.000	1.376	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
2	.142	.289	.617	.816	1.061	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92
3	.137	.277	.584	.765	.978	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84
4	.134	.271	.569	.741	.941	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60
5	.132	.267	.559	.727	.920	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03
6	.131	.265	.553	.718	.906	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71
7	.130	.263	.549	.711	.896	1.42	1.90	2.36	3.00	3.50
8	.130	.262	.546	.706	.889	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36
9	.129	.261	.543	.703	.883	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25
10	.129	.260	.542	.700	.879	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17
11	.129	.260	.540	.697	.876	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11
12	.128	.259	.539	.695	.873	1.36	1.78	2.18	2.68	3.06
13	.128	.259	.538	.694	.870	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01
14	.128	.258	.537	.692	.868	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98
15	.128	.258	.536	.691	.866	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95
16	.128	.258	.535	.690	.865	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92
17	.128	.257	.534	.689	.863	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90
18	.127	.257	.534	.688	.862	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88
19	.127	.257	.533	.688	.861	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86
20	.127	.257	.533	.687	.860	1.32	1.72	2.09	2.53	2.84
21	.127	.257	.532	.686	.859	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83
22	.127	.256	.532	.686	.858	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82
23	.127	.256	.532	.685	.858	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81
24	.127	.256	.531	.685	.857	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80
25	.127	.256	.531	.684	.856	1.32	1.71	2.06	2.48	2.79
26	.127	.256	.531	.684	.856	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78
27	.127	.256	.531	.684	.855	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77
28	.127	.256	.530	.683	.855	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76
29	.127	.256	.530	.683	.854	1.31	1.70	2.04	2.46	2.76
30	.127	.256	.530	.683	.854	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75
40	.126	.255	.529	.681	.851	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70
60	.126	.254	.527	.679	.848	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66
120	.126	.254	.526	.677	.845	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62
∞	.126	.253	.524	.674	.842	1.28	1.645	1.96	2.33	2.58

Fuente: R.A. Fisher y F. Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, publicado por Longman Group Ltd., (previamente publicado por Oliver y Boyd, Edinburgh), con permiso de los autores y editores.

Apéndice E

Percentilas (χ^2_p)
de la
distribución chi-cuadrado
con ν grados de libertad



ν	$\chi^2_{.005}$	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.10}$	$\chi^2_{.25}$	$\chi^2_{.50}$	$\chi^2_{.75}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.999}$
1	.0000	.0002	.0010	.0039	.0158	.102	.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	.0100	.0201	.0506	.103	.211	.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	.0717	.115	.216	.352	.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	99.6
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100	104	112
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	102	107	112	116	125
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	80.6	89.3	98.6	108	113	118	124	128	137
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	99.3	109	118	124	130	136	140	149

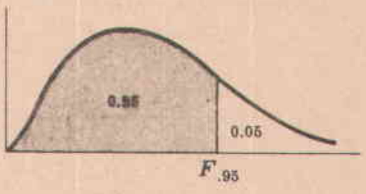
Fuente: **E.S. Pearson y H.O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1(1966), Tabla 8, páginas 137 y 138, con permiso de los autores y editores.**

Apéndice F

Percentila 95 (niveles 0.05), $F_{.95}$,
para la
distribución F

ν_1 grados de libertad en el numerador

ν_2 grados de libertad en el denominador



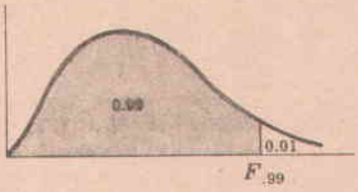
ν_1 ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Fuente: **E. S. Pearson y H. O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians,* Vol. 2 (1972), Tabla 5, página 178, con permiso de los autores y editores.**

Percentila 99 (niveles 0.01), $F_{.99}$, para la distribución F

ν_1 grados de libertad en el numerador

ν_2 grados de libertad en el denominador



ν_1 / ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6023	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.82	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

Fuente: **E.S. Pearson y H.O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 2 (1972), Tabla 5, página 180, con permiso de los autores y editores.**

Apéndice G

Logaritmos decimales con cuatro cifras

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes Proporcionales								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Logaritmos decimales con cuatro cifras

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes Proporcionales								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9603	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Apéndice H

Valores de $e^{-\lambda}$

$(0 < \lambda < 1)$

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	1.0000	.9900	.9802	.9704	.9608	.9512	.9418	.9324	.9231	.9139
0.1	.9048	.8958	.8869	.8781	.8694	.8607	.8521	.8437	.8353	.8270
0.2	.8187	.8106	.8025	.7945	.7866	.7788	.7711	.7634	.7558	.7483
0.3	.7408	.7334	.7261	.7189	.7118	.7047	.6977	.6907	.6839	.6771
0.4	.6703	.6636	.6570	.6505	.6440	.6376	.6313	.6250	.6188	.6126
0.5	.6065	.6005	.5945	.5886	.5827	.5770	.5712	.5655	.5599	.5543
0.6	.5488	.5434	.5379	.5326	.5273	.5220	.5169	.5117	.5066	.5016
0.7	.4966	.4916	.4868	.4819	.4771	.4724	.4677	.4630	.4584	.4538
0.8	.4493	.4449	.4404	.4360	.4317	.4274	.4232	.4190	.4148	.4107
0.9	.4066	.4025	.3985	.3946	.3906	.3867	.3829	.3791	.3753	.3716

$(\lambda = 1, 2, 3, \ldots, 10)$

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$e^{-\lambda}$	.36788	.13534	.04979	.01832	.006738	.002479	.000912	.000335	.000123	.000045

NOTA: Para obtener los valores de $e^{-\lambda}$ para otros valores de λ, emplear las leyes de los exponentes.

Ejemplo: $e^{-3.48} = (e^{-3.00})(e^{-0.48}) = (.04979)(.6188) = .03081.$

Apéndice I

Números aleatorios

51772	74640	42331	29044	46621	62898	93582	04186	19640	87056
24033	23491	83587	06568	21960	21387	76105	10863	97453	90581
45939	60173	52078	25424	11645	55870	56974	37428	93507	94271
30586	02133	75797	45406	31041	86707	12973	17169	88116	42187
03585	79353	81938	82322	96799	85659	36081	50884	14070	74950
64937	03355	95863	20790	65304	55189	00745	65253	11822	15804
15630	64759	51135	98527	62586	41889	25439	88036	24034	67283
09448	56301	57683	30277	94623	85418	68829	06652	41982	49159
21631	91157	77331	60710	52290	16835	48653	71590	16159	14676
91097	17480	29414	06829	87843	28195	27279	47152	35683	47280

Respuestas a problemas suplementarios

CAPITULO 1

1.57. (*a*) $A = \{6, 8, 10, 12, 14\}$ (*b*) $A = \{x \mid x \text{ es par}, 5 < x < 15\}$

1.63. (*a*) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (*c*) $\{5\}$ (*e*) $\emptyset$ (*g*) $\{2, 5, 3\}$
(*b*) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (*d*) $\{5\}$ (*f*) $\{3\}$ (*h*) $\{5\}$

1.64. (*a*) $\{2, 3, 4\}$ (*b*) $\{2\}$ (*c*) $\{x \mid x \geqq 0,\ x \neq 2, 3, 4\}$ (*d*) $\{4\}$ (*e*) $\{3\}$ (*f*) $\{3, 4\}$

1.81. (*a*) 5/26 (*b*) 5/36 (*c*) 0.98, (*d*) 2/9 (*e*) 7/8

1.82. (*a*) Probabilidad de rey en la primera extracción y no rey en la segunda.
(*b*) Probabilidad de rey en la primera extracción o rey en la segunda o ambas.
(*c*) No rey en la primera extracción o no rey en la segunda o ambas (no rey en la primera y segunda extracciones).
(*d*) No rey en la primera, segunda y tercera extracciones.
(*e*) Probabilidad de rey en la primera extracción y rey en la segunda o no rey en la segunda y rey en la tercera.

1.83. (*a*) 1/3 (*b*) 3/5 (*c*) 11/15 (*d*) 2/5 (*e*) 4/5

1.84. (*a*) 4/25 (*c*) 16/25 (*e*) 11/15 (*g*) 104/225 (*i*) 6/25
(*b*) 4/75 (*d*) 64/225 (*f*) 1/5 (*h*) 221/225 (*j*) 52/225

1.85. (*a*) 29/185 (*c*) 118/185 (*e*) 11/15 (*g*) 86/185 (*i*) 9/37
(*b*) 2/37 (*d*) 52/185 (*f*) 1/5 (*h*) 182/185 (*j*) 26/111

1.86. (*a*) 3/10 (*b*) 1/10 (*c*) 3/5

1.87. (*a*) 1/2197 (*b*) 1/17,576

1.88. 1/3

1.94 21/56

1.95. 21/31

1.96. 1/3

1.97. 14/57

1.100. 8

1.101. (*a*) 12 (*b*) 2520 (*c*) 720

1.102. $n = 5$

1.103. 60

1.104. (*a*) 5040 (*b*) 720 (*c*) 240

1.105. (*a*) 8400 (*b*) 2520

1.106. (*a*) 32,805 (*b*) 11,664

1.107. 1260

1.108. (*a*) 120 (*b*) 72 (*c*) 12

1.109. (*a*) 10 (*b*) 70 (*c*) 45

1.110. $n = 6$

1.111. 210

1.112. 840

1.113. (*a*) 42,000 (*b*) 7000

1.114. (*a*) 120 (*b*) 2520

1.115. (*a*) 150 (*b*) 45 (*c*) 100

1.116. (*a*) 17 (*b*) 163

1.117. (*a*) 20 (*b*) 330 (*c*) 14/99

1.118. (*a*) $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^3 + 6xy^5 + y^6$
(*b*) $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$
(*c*) $x^5 - 5x^3 + 10x - 10x^{-1} + 5x^{-3} - x^{-5}$
(*d*) $x^8 + 8x^6 + 24x^4 + 32x^2 + 16$

1.119. 2016

1.122. (*a*) 5/18 (*b*) 11/36 (*c*) 1/36

1.123. (*a*) 47/52 (*b*) 16/221 (*c*) 15/34 (*d*) 13/17 (*e*) 210/221 (*f*) 10/13 (*g*) 40/51 (*h*) 77/442

1.124. 5/18

1.125. (*a*) 81 : 44 (*b*) 21 : 4

1.126. (*a*) $({}_{13}C_7)({}_{13}C_2)({}_{13}C_3)({}_{13}C_1)/{}_{52}C_{13}$ (*b*) $4/{}_{52}C_{13}$

1.127. $({}_6C_3)({}_8C_2)/{}_{14}C_5$

1.128. (*a*) 91/216 (*b*) al menos 17

1.129. (*a*) $4 \cdot {}_{13}C_3/{}_{52}C_3$ (*b*) $({}_4C_2 \cdot {}_{48}C_1 + {}_4C_3)/{}_{52}C_3$

1.130. $4({}_{13}C_9)({}_{39}C_4)/{}_{52}C_{53}$

1.131. 2.95×10^{25}

1.133. 0.8% aproximadamente

1.135. $\sqrt{11} - 3$

1.138. (*a*) 120 (*b*) 60 (*c*) 72

1.139. (*a*) 3/1250 (*b*) 237/5000

1.140. 3125/46,656

1.141. (*a*) 4 (*b*) 14

1.146. (*a*) $4/{}_{52}C_5$
(*b*) $(13)(2)(4)(6)/{}_{52}C_5$
(*c*) $4^5({}_{13}C_5)/{}_{52}C_5$
(*d*) $(5)(4)(3)(2)/(52)(51)(50)(49)$

1.147. 2/243

1.148. (*a*) 126 (*b*) ${}_{n+r-1}C_{n-1}$

1.149. (*a*) 462 (*b*) ${}_{r-1}C_{n-1}$

1.150. (*a*) 3/32 (*b*) 1/16 (*c*) 1/32 (*d*) 1/8

1.151. prob A gane = 61/216, prob. B gane = 5/36, prob. empate = 125/216

1.153. (*a*) $12/({}_{52}C_{13})({}_{39}C_{13})$ (*b*) $24/({}_{52}C_{13})({}_{39}C_{13})({}_{26}C_{13})$

CAPITULO 2

2.38. (*a*)

x	0	1	2	3
$f(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

2.39. (*a*)

x	0	1	2
$f(x)$	3/28	15/28	5/14

2.40. (*a*)

x	0	1	2
$f(x)$	9/64	15/32	25/64

2.42. (*a*)

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{194{,}580}{270{,}725}$	$\frac{69{,}184}{270{,}725}$	$\frac{6768}{270{,}725}$	$\frac{192}{270{,}725}$	$\frac{1}{270{,}725}$

2.43. (*a*)

x	0	1	2	3
$F(x)$	1/8	1/2	7/8	1

2.46. (*a*)

x	1	2	3	4
$f(x)$	1/8	1/4	3/8	1/4

(*b*) 3/4 (*c*) 7/8 (*d*) 3/8 (*e*) 7/8

2.47. (*a*) 3 (*b*) $e^{-3} - e^{-6}$ (*c*) e^{-9} (*d*) $1 - e^{-3}$

2.48. $$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-3x} & x \geqq 0 \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases}$$

2.49. (*a*) 6/29 (*b*) 15/29 (*c*) 19/116

2.50. $$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqq 1 \\ (2x^3 - 2)/29 & 1 \leqq x \leqq 2 \\ (3x^2 + 2)/29 & 2 \leqq x \leqq 3 \\ 1 & x \geqq 3 \end{cases}$$

2.51. (*a*) 1/27 (*b*) $f(x) = \begin{cases} x^2/9 & 0 \leqq x < 3 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$ (*c*) 26/27 (*d*) 1/9

2.53. (*a*) 1/2 (*b*) 15/16 (*c*) 3/4 (*d*) $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqq 0 \\ x^2/4 & 0 \leqq x \leqq 2 \\ 1 & x \geqq 2 \end{cases}$

2.54. (*a*) 1/36 (*b*) 1/6 (*c*) 1/4 (*d*) 5/6 (*e*) 1/6 (*f*) 1/6 (*g*) 1/2

2.55. (*a*) $f_1(x) = \begin{cases} x/6 & x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{otra } x \end{cases}$ (*b*) $f_2(y) = \begin{cases} y/6 & y = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{otra } y \end{cases}$

2.57. (*a*) 3/2 (*b*) 1/4 (*c*) 29/64 (*d*) 5/16

2.58. (*a*) $F_1(x) = \begin{cases} 0 & x \leqq 0 \\ \frac{1}{2}(x^3 + x) & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 1 & x \geqq 1 \end{cases}$ (*b*) $F_2(y) = \begin{cases} 0 & y \leqq 0 \\ \frac{1}{2}(y^3 + y) & 0 \leqq y \leqq 1 \\ 1 & y \geqq 1 \end{cases}$

2.60. (*a*) $f(x \mid y) = f_1(x)$ para $y = 1, 2, 3$ (véase Problema 2.55)

(*b*) $f(y \mid x) = f_2(y)$ para $x = 1, 2, 3$ (véase Problema 2.55)

2.61. (*a*) $$f(x \mid y) = \begin{cases} (x + y)/(y + \frac{1}{2}) & 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 & \text{otra } x,\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{cases}$$

(*b*) $$f(y \mid x) = \begin{cases} (x + y)/(x + \frac{1}{2}) & 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 & 0 \leqq x \leqq 1,\ \text{otra } y \end{cases}$$

2.62. (*a*) $f(x \mid y) = \begin{cases} (x^2+y^2)/(y^2+\frac{1}{3}) & 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 & \text{otra } x,\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{cases}$

(*b*) $f(y \mid x) = \begin{cases} (x^2+y^2)/(x^2+\frac{1}{3}) & 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 & 0 \leqq x \leqq 1,\ \text{otra } y \end{cases}$

2.63. (*a*) $f(x \mid y) = \begin{cases} e^{-x} & x \geqq 0,\ y \geqq 0 \\ 0 & x < 0,\ y \geqq 0 \end{cases}$ (*b*) $f(y \mid x) = \begin{cases} e^{-y} & x \geqq 0,\ y \geqq 0 \\ 0 & x \geqq 0,\ y < 0 \end{cases}$

2.64. $e^{-\sqrt{y}}/2\sqrt{y}$ para $y > 0$; 0 de otra forma

2.68. $(2\pi)^{-1/2}y^{-1/2}e^{-y}$ para $y > 0$; 0 de otra forma

2.70. $1/\pi$ para $-\pi/2 < y < \pi/2$; 0 de otra forma

2.72. (*a*) $g(y) = \begin{cases} \frac{1}{6} & -5 < y < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$ (*b*) $g(y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(1-y)^{-2/3} & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{6}(y-1)^{-2/3} & 1 < y < 2 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$

2.74. $ve^{-v/}(1+u)^2$ para $u \geqq 0$, $v \geqq 0$; 0 de otra forma

2.77. $g(z) = \begin{cases} -\ln z & 0 < z < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$ **2.82.** $g(x) = \begin{cases} x^3e^{-x}/6 & x \geqq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

2.78. $g(u) = \begin{cases} u & 0 \leqq u \leqq 1 \\ 2-u & 1 \leqq u \leqq 2 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$ **2.83.** 1/4

2.79. $g(u) = \begin{cases} ue^{-u} & u \geqq 0 \\ 0 & u < 0 \end{cases}$ **2.84.** 35/288

2.86. (*a*) 2 (*b*) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 - 3^{-y} & y \leqq x < y+1;\ y = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$ (*d*) 26/81 (*e*) 1/9

2.87. (*a*) 4 (*b*) $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}(2x+1) & x \geqq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ (*d*) $3e^{-2}$ (*e*) $5e^{-4} - 7e^{-6}$

2.88. (*a*) 3/7 (*b*) 5/7

2.89. (*a*) $c = 1$ (*b*) $3e^{-2} - 2e^{-1} - e^{-4}$

2.91. (*a*) $c_1 = 2,\ c_2 = 9$ (*b*) $9e^{-2} - 14e^{-3}$ (*c*) $4e^{-5} - 4e^{-7}$ (*d*) $e^{-2} - e^{-4}$ (*e*) $4e^{-3}$

2.93. (*a*) 1/4 (*b*) 7/64 (*c*) $f_1(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$ (*d*) $f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(y+1) & 0 < y < 2 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$

2.95. (*a*) $\begin{cases} e^{-2y}/\sqrt{y} & y > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$ (*b*) $\begin{cases} 18e^{-2u} & u > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$

2.96. (*b*) $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$ (*c*) $\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\ln 2$ (*d*) $\frac{1}{2}\ln 2$ **2.100.** (*b*) 15/256 (*c*) 9/16 (*d*) 0

2.98. $g(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-z/2} & z \geqq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$ **2.106.** (*a*) 45/256 (*b*) 1/14

2.99. (*b*) 7/18 **2.108.** $\sqrt{2}/2$

CAPITULO 3

3.43. (*a*) 1 (*b*) 7 (*c*) 6

3.44. (*a*) 3/4 (*b*) 1/4 (*c*) 3/5

3.45. (*a*) 1 (*b*) 2 (*c*) 1

3.46. 10.5

3.47. 3

3.48. (*a*) 1 (*b*) 1 (*c*) 1/4

3.50. (*a*) 7/0 (*b*) 6/5 (*c*) 19/10 (*d*) 5/6

3.52. (*a*) 2/3 (*b*) 2/3 (*c*) 4/3 (*d*) 4/9

3.54. (*a*) 7/12 (*b*) 7/6
(*c*) 7/4 (*d*) 2/3 (*e*) 7/4 (*f*) 2/3

3.55. (*a*) 3/2 (*b*) −29/6 (*c*) 1/4 (*d*) 1/4

3.56. (*a*) n (*b*) $13n/6$

3.57. (*a*) 35/12 (*b*) $\sqrt{35/12}$

3.58. (*a*) 4/3 (*b*) $\sqrt{4/3}$

3.59. (*a*) 1 (*b*) 1

3.60. (*a*) $\text{Var}(X) = 5,\ \sigma_X = \sqrt{5}$ (*b*) $\text{Var}(X) = 3/80,\ \sigma_X = \sqrt{15}/20$

3.61. (*a*) 4 (*b*) 2

3.62. (*a*) 3/2 (*b*) 39/4 (*c*) $\sqrt{39}/2$

3.64. (*a*) $\frac{1}{2}(e^{t/2} + e^{-t/2}) = \cosh t$ (*b*) $\mu = 0,\ \mu_2' = 1,\ \mu_3' = 0,\ \mu_4' = 1$

3.65. (*a*) $(1 + 2te^{2t} - e^{2t})/2t^2$ (*b*) $\mu = 4/3,\ \mu_2' = 2,\ \mu_3' = 16/5,\ \mu_4' = 16/3$

3.66. (*a*) $\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 5,\ \mu_3 = -5,\ \mu_4 = 35$
(*b*) $\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 3/80,\ \mu_3 = -121/160,\ \mu_4 = 2307/8960$

3.67. (*a*) $1/(1 - t),\ |t| < 1$ (*b*) $\mu = 1,\ \mu_2' = 2,\ \mu_3' = 6,\ \mu_4' = 24$

3.68. $\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 1,\ \mu_3 = 2,\ \mu_4 = 33$

3.69. (*a*) $(b^{k+1} - a^{k+1})/(k + 1)(b - a)$ (*b*) $[1 + (-1)^k](b - a)^k/2^{k+1}(k + 1)$

3.72. $pe^{i\omega a} + qe^{i\omega b}$

3.73. $(\text{sen}\, a\omega)/a\omega$

3.74. $(e^{2i\omega} - 2ie^{2i\omega} - 1)/\omega^2$

3.77. (*a*) 11/144 (*b*) 11/144 (*c*) $\sqrt{11}/12$ (*d*) $\sqrt{11}/12$ (*e*) −1/144 (*f*) −1/11

3.78. (*a*) 1 (*b*) 1 (*c*) 1 (*d*) 1 (*e*) 0 (*f*) 0

3.79. (*a*) 73/960 (*b*) 73/960 (*c*) $\sqrt{73/960}$ (*d*) $\sqrt{73/960}$ (*e*) −1/64 (*f*) −15/73

3.80. (*a*) 233/324 (*b*) 233/324 (*c*) $\sqrt{233}/18$ (*d*) $\sqrt{233}/18$ (*e*) −91/324 (*f*) −91/233

3.81. (*a*) 4 (*b*) $4/\sqrt{35}$

3.82. $-\sqrt{15}/4$

3.83. (*a*) $(3x + 2)/(6x + 3)$ para $0 \leqq x \leqq 1$ (*b*) $(3y + 2)/(6y + 3)$ para $0 \leqq y \leqq 1$

3.84. (*a*) 1/2 para $x \geqq 0$ (*b*) 1 para $y \geqq 0$

3.85. (*a*)

X	0	1	2
$E(Y \mid X)$	4/3	1	5/7

(*b*)

Y	0	1	2
$E(X \mid Y)$	4/3	7/6	1/2

3.89. (*a*) $\dfrac{6x^2+6x+1}{18(2x+1)^2}$ para $0 \leqq x \leqq 1$ (*b*) $\dfrac{6y^2+6y+1}{18(2y+1)^2}$ para $0 \leqq y \leqq 1$

3.90. (*a*) 1/9 (*b*) 1

3.91. (*a*)

X	0	1	2
Var $(Y \mid X)$	5/9	4/5	24/49

(*b*)

Y	0	1	2
Var $(X \mid Y)$	5/9	29/36	7/12

3.92. (*a*) 1 (*b*) 1/4

3.94. (*a*) e^{-2} (*b*) 0.5

3.100. (*a*) +0 (*b*) ln 2 (*c*) 1

3.102. (*a*) no existe (*b*) −1 (*c*) 0

3.103. (*a*) 3 (*b*) 3 (*c*) 3

3.104. (*a*) $1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (*b*) 1/2

3.101. (*a*) $1/\sqrt{3}$ (*b*) $\sqrt{1-(1/\sqrt{2}\,)}$ (*c*) 8/15

3.105. (*a*) $\sqrt{1-(3/\sqrt{10}\,)}$ (*b*) $\sqrt{1-(\sqrt{3}/2)}$ (*c*) $\sqrt{1/2}$ (*d*) $\sqrt{1-(1/\sqrt{10}\,)}$

3.108. (*a*) 1 (*b*) $(\sqrt{3}-1)/4$ (*c*) 16/81

3.109. (*a*) 1 (*b*) 0.17 (*c*) 0.051

3.113. (*a*) $1 - 2e^{-1}$ (*b*) no existe

3.114. (*a*) $2(\sqrt{3}-1)/3$ (*b*) 15/7

3.116. (*a*) 2 (*b*) 9

3.118. (*a*) 0 (*b*) $24/5a$

3.119. (*a*) 2 (*b*) 9

3.120. (*a*) 7/3 (*b*) 5/9 (*c*) $(e^t + 2e^{2t} + 3e^{3t})/6$ (*d*) $(e^{i\omega} + 2e^{2i\omega} + 3e^{3i\omega})/6$ (*e*) −7/27

3.121. (*a*) 1/3 (*b*) 1/18 (*c*) $2(e^t - 1 - t)/t^2$ (*d*) $-2(e^{i\omega} - 1 - i\omega)/\omega^2$ (*e*) 1/135

3.122. (*a*) 21/2 (*b*) 35/4

3.123. (*a*) 4/3 (*c*) $(1 + 2te^{2t} - e^{2t})/2t^2$ (*e*) $-2\sqrt{18}/15$
(*b*) 2/9 (*d*) $-(1 + 2i\omega e^{2i\omega} - e^{2i\omega})/2\omega^2$ (*f*) 12/5

3.124. 1

3.125. (*a*) 1 (*b*) $8(2\sqrt{2}-1)/15$

3.126. (*a*) 2 (*b*) $\sqrt{2\pi}/2$

3.127. (*a*) 0 (*b*) 1/3 (*c*) 0

CAPITULO 4

4.61. (*a*) 1/64 (*b*) 3/32 (*c*) 15/64 (*d*) 5/16 (*e*) 15/64 (*f*) 3/32 (*g*) 1/64

4.62. (*a*) 57/64 (*b*) 21/32

4.63. (*a*) 1/4 (*b*) 5/16 (*c*) 11/16 (*d*) 5/8

4.64. (*a*) 250 (*b*) 25 (*c*) 500

4.65. (*a*) 17/162 (*b*) 1/324

4.66. 64/243

4.67. 193/512

4.68. (*a*) 32/243 (*b*) 192/243 (*c*) 40/243 (*d*) 242/243

4.69. (*a*) 42 (*b*) 3.550 (*c*) −0.1127 (*d*) 2.927

4.71. (*a*) $npq(q - p)$ (*b*) $npq(1 - 6pq) + 3n^2p^2q^2$

4.73. (*a*) 1.5, −1.6 (*b*) 72, 90

4.74. (*a*) 75.4 (*b*) 9

4.75. (*a*) 0.8767 (*b*) 0.0786 (*c*) 0.2991

4.76. (*a*) 0.0375 (*b*) 0.7123 (*c*) 0.9265 (*d*) 0.0154 (*e*) 0.7251 (*f*) 0.0395

4.77. (*a*) 0.9495 (*b*) 0.9500 (*c*) 0.6826

4.78. (*a*) 0.75 (*b*) −1.86 (*c*) 2.08 (*d*) 1.625 ó 0.849 (*e*) ±1.645

4.79. −0.995

4.80. 0.0668

4.81. (*a*) 20 (*b*) 36 (*c*) 227 (*d*) 40

4.82. (*a*) 93% (*b*) 8.1% (*c*) 0.47% (*d*) 15%

4.83. 84

4.84. (*a*) 61.7% (*b*) 54.7%

4.85. (*a*) 95.4% (*b*) 23.0% (*c*) 93.3%

4.86. (*a*) 1.15 (*b*) 0.77

4.87. (*a*) 0.9962 (*b*) 0.0687 (*c*) 0.0286 (*d*) 0.0558

4.88. (*a*) 0.2511 (*b*) 0.1342

4.89. (*a*) 0.0567 (*b*) 0.9198 (*c*) 0.6404 (*d*) 0.0079

4.90. 0.0089

4.91. (*a*) 0.04979 (*b*) 0.1494 (*c*) 0.2241 (*d*) 0.2241 (*e*) 0.1680 (*f*) 0.1008

4.92. (*a*) 0.0838 (*b*) 0.5976 (*c*) 0.4232

4.93. (*a*) 0.05610 (*b*) 0.06131

4.94. *(a)* 0.00248 *(b)* 0.04462 *(c)* 0.1607 *(d)* 0.1033 *(e)* 0.6964 *(f)* 0.0620

4.101. *(a)* 5/3888 *(b)* 5/324

4.102. *(a)* 0.000348 *(b)* 0.000295

4.103. 3/8

4.104. *(a)* 70/429 *(b)* 1/143 *(c)* 142/143

4.105. *(a)* $\binom{13}{6}\binom{39}{7}\Big/\binom{52}{13}$ *(b)* $\binom{13}{0}\binom{39}{13}\Big/\binom{52}{13}$

4.106. *(a)* $\binom{40}{10}\binom{20}{10}\Big/\binom{60}{20}$ *(b)* $[({}_{40}C_0)({}_{20}C_{20}) + ({}_{40}C_1)({}_{20}C_{19}) + ({}_{40}C_2)({}_{20}C_{18})]/{}_{60}C_{20}$

4.109. *(a)* 3/4 *(b)* 3/4

4.111. *(a)* 0 *(b)* $2(b-a)^4/5$

4.112. *(a)* 0 *(b)* 9/5

4.113. 1/4

4.114. *(a)* 3/4 *(b)* 1/3

4.120. *(a)* $1 - \dfrac{13}{8\sqrt{e}}$ *(b)* $\dfrac{13}{8}e^{-1/2} - \dfrac{5}{2}e^{-1}$

4.126. *(a)* 21.0 *(b)* 26.2 *(c)* 23.3

4.127. *(a)* 15.5 *(b)* 30.1 *(c)* 41.3 *(d)* 55.8

4.128. *(a)* 20.1 *(b)* 36.2 *(c)* 48.3 *(d)* 63.7

4.129. *(a)* 9.59 y 34.2

4.130. *(a)* 16.0 *(b)* 6.35 *(c)* suponiendo áreas iguales en las dos colas, $\chi_1^2 = 2.17$ y $\chi_2^2 = 14.1$

4.131. *(a)* 122.5 *(b)* 179.2

4.132. *(a)* 207.7 *(b)* 295.2

4.135. *(a)* 2.60 *(b)* 1.75 *(c)* 1.34 *(d)* 2.95 *(e)* 2.13

4.136. *(a)* 3.75 *(b)* 2.68 *(c)* 2.48 *(d)* 2.39 *(e)* 2.33

4.137. *(a)* 1.71 *(b)* 2.09 *(c)* 4.03 *(d)* −0.128

4.138. *(a)* 1.81 *(b)* 2.76 *(c)* −0.879 *(d)* −1.37

4.141. *(a)* 2.62 *(b)* 1.73 *(c)* 1.84 *(d)* 0.352 *(e)* 0.361 *(f)* 0.166

CAPITULO 5

5.49. *(a)* 9.0 *(b)* 4.47 *(c)* 9.0 *(d)* 3.16

5.50. *(a)* 9.0 *(b)* 4.47 *(c)* 9.0 *(d)* 2.58

5.51. *(a)* $\mu_{\bar{X}} = 22.40$ oz, $\sigma_{\bar{X}} = 0.008$ oz *(b)* $\mu_{\bar{X}} = 22.40$ oz, $\sigma_{\bar{X}}$ ligeramente menor que 0.008 oz

5.52. *(a)* $\mu_{\bar{X}} = 22.40$ oz, $\sigma_{\bar{X}} = 0.008$ oz *(b)* $\mu_{\bar{X}} = 22.40$ oz, $\sigma_{\bar{X}} = 0.0057$ oz

5.53. *(a)* 237 *(b)* 2 *(c)* ninguna *(d)* 24

5.54. *(a)* 0.4972 *(b)* 0.1587 *(c)* 0.0918 *(d)* 0.9544

5.55. *(a)* 0.8164 *(b)* 0.0228 *(c)* 0.0038 *(d)* 1.0000

5.56. 0.0026

5.57. (*a*) 0.0019 (*b*) 0.9596 (*c*) 0.1151

5.58. (*a*) 2 (*b*) 996 (*c*) 218

5.59. (*a*) 0.0179 (*b*) 0.8664 (*c*) 0.1841

5.60. (*a*) 6 (*b*) 9 (*c*) 2 (*d*) 12

5.62. (*a*) 6 (*b*) 125

5.63. (*a*) 0.0077 (*b*) 0.8869

5.64. (*a*) 0.0028 (*b*) 0.9172

5.65. (*a*) 0.2150 (*b*) 0.0064 (*c*) 0.4504

5.66. 0.0482

5.67. 0.0136

5.68. 0.0316

5.70. (*a*) 118.79 lb (*b*) 0.74 lb

5.71. 0.0228

5.72. (*a*) 10.00 (*b*) 11.49

5.73. (*a*) 40/3 (*b*) 28.10

5.74. (*a*) 0.50 (*b*) 0.17 (*c*) 0.28

5.75. (*a*) 0.36 (*b*) 0.49

5.80. (*a*) menor que 0.01 (*b*) entre 0.01 y 0.05 pero más cerca a 0.01

5.81. (*a*) menor que 0.01 (*b*) menor que 0.01.

5.82. (*a*) 799 (*c*) 949.5 (*e*) 100 (horas) (*g*) 62/400 = 0.155 ó 15.5% (*i*) 19.0%
(*b*) 1000 (*d*) 1099.5, 1199.5 (*f*) 76 (*h*) 29.5% (*j*) 78.0%

5.86. (*a*) 24% (*b*) 11% (*c*) 46%

5.87. (*a*) 0.003 pulg.
(*b*) 0.3195, 0.3225, 0.3255, . . . , 0.3375 pulg.
(*c*) 0.320–0.322, 0.323–0.325, 0.326–0.328, . . . , 0.335–0.337

5.92. 86

5.93. 0.50 s

5.94. 8.25

5.95. (*a*) 82 (*b*) 79

5.96. 78

5.97. 80%, 20%

5.98. 11.09 tons.

5.99. 501.0

5.100. 0.72642 pulgadas

5.101. 26.2

5.102. (*a*) 2.16 (*b*) 0.90 (*c*) 0.484

5.104. 45

5.105. (*a*) 0.733 ton. (*b*) 38.60

5.106. (*a*) $\bar{x} = 2.47$ (*b*) $s = 1.11$

5.507. (*a*) 0.000576 pulgadas (*b*) 72.1%, 93.3%, 99.76%

5.108. (*a*) 146.8 lb, 12.9 lb

5.109. (*a*) 0.7349 pulg., 0.00495 pulg.

5.111. (*a*) 6 (*b*) 40 (*c*) 288 (*d*) 2188

5.112. (*a*) 0 (*b*) 4 (*c*) 0 (*d*) 25.86

5.113. (*a*) −1 (*b*) 5 (*c*) −91 (*d*) 53

5.115. 0, 26.25, 0, 1193.1

5.116. 7

5.117. (*a*) 0, 6, 19, 42 (*b*) −4, 22, −117, 560 (*c*) 1, 7, 38, 74

5.118. 0, 0.2344, −0.0586, 0.0696

5.121. $m_1 = 0$, $m_2 = 5.97$, $m_3 = -3.97$, $m_4 = 89.22$

5.122. $m_1 = 0$, $m_2 = 0.53743$, $m_3 = 0.36206$, $m_4 = 0.84914$

5.123. (*a*) 0 (*c*) 92.35 (*e*) 26.2 (*g*) 739.38 (*i*) 706,428
(*b*) 52.95 (*d*) 7158.20 (*f*) 7.28 (*h*) 22,247 (*j*) 24,545

5.124. (*a*) −0.2464 (*b*) 2.62

5.125. (*a*) 0.4939 (*b*) 2.94

5.126. La primera distribución

5.127. (*a*) la segunda (*b*) la primera

5.128. (*a*) 7.2 (*b*) 8.4

5.129. (*a*) 106 (*b*) 4

5.130. 159

5.131. (*a*) 78.7 (*b*) 0.0090

CAPITULO 6

6.29. (*a*) 9.5 lb (*b*) 0.74 lb^2 (*c*) 0.78 **y** 0.86 lb **respectivamente**

6.30. (*a*) 1200 hr (*b*) 105.4 hr

6.31. (*a*) Las estimas de las desviaciones típicas de la población para los tamaños de muestra 30, 50 y 100 tubos son respectivamente, 101.7, 101.0 y 100.5 horas. Las estimas de las medias de la población son 1200 horas en todos los casos.

6.32. (*a*) 11.09 ± 0.18 tons. (*b*) 11.09 ± 0.24 tons.

6.33. (*a*) 0.72642 ± 0.000095 pulg. (*c*) 0.72642 ± 0.000072 pulg.
(*b*) 0.72642 ± 0.000085 pulg. (*d*) 0.72642 ± 0.000060 pulg.

6.34. (*a*) 0.72642 ± 0.000025 pulg. (*b*) 0.000025 pulg.

6.35. (*a*) al menos 96 (*b*) al menos 68 (*c*) al menos 167 (*d*) al menos 225

6.36. (*a*) al menos 384 (*b*) al menos 271 (*c*) al menos 666 (*d*) al menos 900

6.37. (*a*) 7.38 ± 0.82 onzas (*b*) 7.38 ± 1.16 onzas

6.38. (*a*) 7.38 ± 0.73 onzas (*b*) 7.38 ± 0.96 onzas

6.39. (*a*) 0.298 ± 0.030 segundos (*b*) 0.298 ± 0.049 segundos

6.40. (*a*) 0.70 ± 0.12, 0.69 ± 0.11 (*b*) 0.70 ± 0.15, 0.68 ± 0.15 (*c*) 0.70 ± 0.18, 0.67 ± 0.17

6.41. (*a*) al menos 323 (*b*) al menos 560 (*c*) al menos 756

6.43. (*a*) 1.07 ± 0.09 hr (*b*) 1.07 ± 0.12 hr

6.44. (*a*) 0.045 ± 0.073 (*b*) 0.045 ± 0.097 (*c*) 0.045 ± 0.112

6.45. (*a*) 63.8 ± 0.24 onzas (*b*) 63.8 ± 0.31 onzas

6.46. (*a*) 1800 ± 249 lb (*b*) 1800 ± 328 lb (*c*) 1800 ± 382 lb

6.47. 86 lb

6.48. (*a*) al menos 4802 (*b*) al menos 8321 (*c*) al menos 11,250

6.49. (*a*) 87.0 a 230.9 horas (*b*) 78.1 a 288.5 horas

6.50. (*a*) 95.6 a 170.4 horas (*b*) 88.9 a 190.8 horas

6.51. (*a*) 106.1 a 140.5 horas (*b*) 102.1 a 148.1 horas

6.52. (*a*) 0.269 a 7.70 (*b*) 0.453 a 4.58

6.53. (*a*) 0.519 a 2.78 (*b*) 0.673 a 2.14

6.54. (*a*) 0.138 a 10.8 (*b*) 0.259 a 5.02

6.56. (*a*) 0.941 a 2.20, 1.067 a 1.944 (*b*) 0.654 a 1.53, 0.741 a 1.35

6.57. $\lambda = (\Sigma x_k)/n$

6.58. $\nu = \dfrac{3n}{2(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}$

6.59. $k = -1 - \dfrac{n}{\ln(x_1 \cdots x_n)}$

6.60. (*a*) ±4.60 (*b*) ±3.06 (*c*) ±2.79 (*d*) ±2.75 (*e*) ±2.70

6.61. (*a*) 2400 ± 45 libras, 2400 ± 59 libras (*b*) 87.6%

6.62. 105.5 a 139.6 horas

CAPITULO 7

7.63. (*a*) 0.2606

7.64. (*a*) Aceptar la hipótesis si las bolas rojas extraídas están entre 22 y 42; rechazarla en caso contrario. (*b*) 0.99. (*c*) Aceptar la hipótesis si las bolas rojas extraídas están entre 24 y 40; rechazarla en caso contrario.

7.65. (*a*) (H_0: $p = 0.5$), (H_1: $p > 0.5$). (*b*) Ensayo unilateral. (*c*) Rechazar H_0 si se extraen más de 39 bolas rojas y aceptarla en caso contrario (o no tomar decisión alguna). (*d*) Rechazar H_0 si se extraen más de 41 bolas rojas, y se acepta en caso contrario (o no se toma ninguna decisión).

7.66. (*a*) No se puede rechazar la hipótesis al nivel de 0.05.
(*b*) Se puede rechazar la hipótesis al nivel de 0.05.

7.67. No se puede rechazar la hipótesis al nivel de 0.01 en (*a*) ni en (*b*).

7.68. Se puede rechazar la afirmación a ambos niveles mediante un ensayo unilateral.

7.69. Sí, en ambos niveles, mediante un ensayo unilateral en ambos casos.

7.70. El resultado es significativo al nivel de 0.05 en ambos ensayos.

7.71. El resultado es significativo a este nivel con un ensayo unilateral, pero no lo es con un ensayo bilateral.

7.72. (*a*) si (*b*) no

7.73. Un ensayo unilateral a ambos niveles de significación muestra que la marca B es superior a la marca A.

7.74. Un ensayo unilateral muestra que la diferencia es significativa al nivel 0.05 pero no al nivel 0.01.

7.75. Un ensayo unilateral muestra que el nuevo fertilizante es superior a ambos niveles de significación.

7.76. (*a*) Un ensayo bilateral indica que no hay diferencia en la calidad de fabricación al nivel de 0.05.
(*b*) Un ensayo unilateral muestra que B no es mejor que A al nivel de 0.05.

7.77. Un ensayo bilateral muestra que no hay evidencia a ninguno de los dos niveles de que la duración media haya cambiado.

7.78. Un ensayo unilateral indica que no disminuye la media a ninguno de los dos niveles.

7.79. Un ensayo bilateral a ambos niveles muestra que el producto no cumple con las especificaciones.

7.80. Un ensayo unilateral muestra que a ambos niveles el contenido medio en cobre es más alto que el señalado en las especificaciones.

7.81. Un ensayo unilateral muestra que el proceso no debe introducirse si el nivel de significación adoptado es 0.01, pero debe introducirse si el nivel de significación adoptado es 0.05.

7.82. Mediante un ensayo bilateral al nivel de significación de 0.05, no se deduce que haya diferencia de acidez.

7.83. Mediante un ensayo unilateral al nivel de significación de 0.05, concluimos que el primer grupo no es superior al segundo.

7.84. El aparente incremento en la variabilidad no es significativo a ninguno de los dos niveles.

7.85. El aparente decrecimiento es significativo al nivel 0.05, pero no al nivel 0.01.

7.86. Concluiríamos que el resultado no es común al nivel 0.05 pero lo es al nivel 0.01.

7.87. No podemos concluir que la primera varianza sea mayor que la segunda a ningún nivel.

7.88. Podemos concluir que la primera varianza es mayor que la segunda a ambos niveles.

7.89. no

7.90. (*a*) 0.3112 (*b*) 0.0118 (*c*) 0 (*d*) 0 (*e*) 0.0118

7.94. (*a*) 8.64 ± 0.96 onzas (*b*) 8.64 ± 0.83 onzas (*c*) 8.64 ± 0.63 onzas

7.95. (*a*) 6 (*b*) 4

7.96. $f(x) = {}_4C_x(0.32)^x(0.68)^{4-x}$; las frecuencias esperadas son 32, 60, 43, 13 y 2 respectivamente.

7.98. Las frecuencias esperadas son 1.7, 5.5, 12.0, 15.9, 13.7, 7.6, 2.7 y 0.6 respectivamente.

7.99. Las frecuencias esperadas son 1.1, 4.0, 11.1, 23.9, 39.5, 50.2, 49.0, 36.6, 21.1, 9.4, 3.1 y 1.0 respectivamente.

7.100. Las frecuencias esperadas son 41.7, 53.4, 34.2, 14.6, y 4.7 respectivamente.

7.101. $f(x) = \dfrac{(0.61)^x e^{-0.61}}{x!}$; las frecuencias esperadas son 108.7, 66.3, 20.2, 4.1 y 0.7 respectivamente.

7.102. La hipótesis no puede rechazarse a ningún nivel.

7.103. La conclusión es la misma.

7.104. El profesor nuevo no sigue las mismas normas que los otros. (El hecho de que las puntuaciones sean mejores que el promedio *puede* ser debido a un mejor aciertó en las enseñanzas o normas de puntuación menos exigentes o a ambas cosas).

7.105. No hay razón para rechazar la hipótesis de que las monedas sean honradas.

7.106. No hay razón para rechazar la hipótesis a ningún nivel.

7.107. (*a*) 10, 60, 50 respectivamente (*b*) La hipótesis de que los resultados sean iguales a los esperados no se pueden rechazar al nivel de significación de 0.05.

7.108. La diferencia es significante al nivel 0.05.

7.109. (*a*) El ajuste es bueno (*b*) no

7.110. (*a*) El ajuste es "muy bueno". (*b*) El ajuste es pobre al nivel 0.05.

7.111. (*a*) El ajuste es muy pobre al nivel 0.05. Puesto que la distribución binomial da un buen ajuste de los datos, esto es consistente con el Problema 7.109. (*b*) El ajuste es bueno pero no "muy bueno".

7.112. La hipótesis puede rechazarse al nivel 0.05 pero no al nivel 0.01.

7.113. Igual conclusión.

7.114. La hipótesis no puede rechazarse a ninguno de los niveles.

7.115. La hipótesis no puede rechazarse al nivel 0.05.

7.116. La hipótesis puede rechazarse a ambos niveles.

7.117. La hipótesis puede rechazarse a ambos niveles.

7.118. La hipótesis no puede rechazarse a ninguno de los niveles.

7.123. (*a*) 0.3863, 0.3779 (con corrección de Yates)

7.124. (*a*) 0.2205, 0.1985 (corregida) (*b*) 0.0872, 0.0738 (corregida)

7.125. 0.4651

7.128. (*a*) Un ensayo bilateral al nivel 0.05 no rechaza la hipótesis de proporciones iguales.
(*b*) Un ensayo unilateral al nivel 0.05 indica que *A* tiene una mayor proporción de bolas rojas que *B*.

7.129. (*a*) 9 (*b*) 10 (*c*) 10 (*d*) 8

7.132. (*a*) no (*b*) si (*c*) no

7.133. (*a*) si (*b*) si (*c*) no

7.134. (*a*) no (*b*) no (*c*) no

7.137. Mediante un ensayo unilateral, el resultado es significativo al nivel 0.05 pero no al nivel 0.01.

7.138. No puede concluirse que la marca *A* sea mejor que la *B* al nivel 0.05.

7.139. No al nivel 0.05.

CAPITULO 8

8.64. (*a*) $y = -\frac{1}{3} + \frac{5}{7}x$ ó $y = -0.333 + 0.714\,x$ (*b*) $x = 1 + \frac{9}{7}y$ ó $x = 1.00 + 1.29\,y$

8.65. (*a*) 3.24, 8.24 (*b*) 10.00

8.67. (*b*) $y = 29.13 + 0.661\,x$ (*c*) $x = -14.39 + 1.15\,y$ (*d*) 79 (*e*) 95

8.68. (*b*) $y = 4.000 + 0.500\,x$ (*c*) $x = 2.408 + 0.612\,y$

8.69. $y = 5.51 + 3.20(x-3) + 0.733(x-3)^2$ ó $y = 2.51 - 1.20\,x + 0.733\,x^2$

8.70. (*b*) $d = 41.77 - 1.096\,v + 0.08786\,v^2$ (*c*) 170 ft, 516 ft

8.71. (*b*) $y = 32.14(1.427)^x$ ó $y = 32.14(10)^{0.1544\,x}$ ó $y = 32.14e^{0.3556\,x}$ (*d*) 387

8.74. (*a*) $z = 61.40 - 3.65\,x + 2.54\,y$ (*b*) 40

8.79. (*a*) 1.304 (*b*) 1.443

8.80. (*a*) 24.50 (*b*) 17.00 (*c*) 7.50

8.81. 0.5533

8.83. 1.5

8.84. (*a*) 0.8961 (*b*) $y = 80.78 + 1.138\,x$ (*c*) 132

8.85. (*a*) 0.958 (*b*) 0.872

8.86. (*a*) $y = 0.8\,x + 12$ (*b*) $x = 0.45\,y + 1$

8.87. (*a*) 1.60 (*b*) 1.20

8.88. ±0.80

8.89. 75%

8.90. (*a*) −0.9203

8.92. 3.12

8.93. (*a*) 0.9927

8.95. $r_{\text{grad}} = \frac{2}{3}$

8.96. (*a*) 0.5606 (*b*) 0.9318

8.97. (*a*) −1.0000

8.107. (*a*) 2.00 ± 0.21 (*b*) 2.00 ± 0.28

8.108. (*a*) Mediante un ensayo unilateral puede rechazarse la hipótesis.
(*b*) Mediante un ensayo unilateral no puede rechazarse la hipótesis.

8.109. (*a*) 37.0 ± 3.6 (*b*) 37.0 ± 4.9

8.110. (*a*) 37.0 ± 1.5 (*b*) 37.0 ± 2.1

8.111. (*a*) 1.138 ± 0.398 (*b*) 132.0 ± 19.2 (*c*) 132.0 ± 5.4

8.112. (*a*) si (*b*) no

8.113. (*a*) no (*b*) si

8.114. (*a*) 0.2923 y 0.7951 y
(*b*) 0.1763 y 0.8361 y

8.115. (*a*) 0.3912 y 0.7500 y
(*b*) 0.3146 y 0.7861 y

8.116. 0.7096 y 0.9653

8.117. (*a*) si (*b*) no

8.120. 415

8.125. 0.5402

8.126. (*a*) $y = 3.33x - 66.4$

(*b*) 146.7 y 173.4 libras

8.127. (*a*) 20.36 lb

(*b*) 3.30 pulg.

8.128. 0.4547 y 0.6158

8.129. 0.9254

8.130. (*b*) $y = 122.42 + 2.19x$ si la unidad x es 1/2 año y el origen es el 1o. de enero de 1954; o $y = 107.9 + 4.38x$ si la unidad x es un año y el origen es el 1o. de julio de 1950 (*d*) 142.1 (*e*) 1971

8.131. (*b*) $y = 18.16 - 0.1083x + 0.4653x^2$, donde y es la natalidad por 1000 habitantes, x es 5 años con origen en julio de 1935.

CAPITULO 9

9.23. Hay una diferencia significativa en rendimiento a ambos niveles.

9.24. No hay diferencia significativa en neumáticos a ningún nivel.

9.25. Hay una diferencia significativa en los métodos de enseñanza al nivel 0.05 pero no al nivel 0.01.

9.26. Hay una diferencia significativa en marcas al nivel 0.05 pero no al nivel 0.01.

9.27. Hay una diferencia significativa en sus calificaciones a ambos niveles.

9.31. No hay diferencia significativa en operarios o máquinas.

9.32. No hay diferencia significativa en operarios o máquinas.

9.33. Hay una diferencia significativa en el tipo de maíz pero no en los suelos al nivel 0.05.

9.34. No hay diferencia significativa en el tipo de maíz o suelos al nivel 0.01.

9.35. Hay una diferencia significativa en neumáticos y automóviles al nivel 0.05.

9.36. No hay diferencia significativa en neumáticos o automóviles al nivel 0.01.

9.37. No hay diferencia significativa en los métodos de enseñanza o planteles al nivel 0.05.

9.38. No hay diferencia significativa en el color del pelo o estatura.

9.39. Igual al Problema 9.38.

9.40. Hay una diferencia significativa en los sitios pero no en los fertilizantes al nivel 0.05.

9.41. No hay diferencia significativa en los sitios o fertilizantes al nivel 0.01.

9.42. Hay una diferencia significativa en operarios pero no en máquinas.

9.43. No hay diferencia significativa en fertilizantes o suelos.

9.44. Igual al Problema 9.43.

9.45. No hay una diferencia significativa en rendimiento escolástico debido a diferencias en estatura, color del pelo o lugar de nacimiento.

9.46. Hay diferencias significativas en especies y cantidades del primer compuesto químico, pero no otras diferencias significativas.

9.47. Hay diferencias significativas en tipos de cables pero no en operarios, máquinas o fortaleza de cables.

9.48. No hay diferencia significativa en tratamientos a cualquier nivel.

9.49. No hay diferencia significativa en los puntajes de I.Q.

9.52. Hay diferencias significativas en los puntajes de los exámenes debido al estado veterano y al I.Q. al nivel 0.05.

9.53. Al nivel 0.01 las diferencias en los puntajes del examen debidas al estado veterano no son significativas, pero las debidas al I.Q. sí lo son.

9.54. No hay diferencias significativas en los puntajes de los estudiantes de diferentes partes del país; pero hay diferencias debidas al I.Q.

9.55. Igual al Problema 9.54.

9.61. No hay diferencias significativas debido a los químicos o sitios.

9.62. Hay diferencias significativas debido a los sitios pero no a los fertilizantes.

9.63. No hay diferencias significativas debido a sitios o fertilizantes.

9.64. Hay diferencias significativas debidas al factor 1 pero no al factor 2 o tratamientos *A*, *B*, *C*.

9.66. No hay diferencias significativas debidas a los factores o tratamientos.

Indice

LIBROS DE LA SERIE SCHAUM PUBLICADOS EN ESPAÑOL

- Acústica
- Algebra elemental
- Algebra elemental moderna
- Algebra lineal
- Algebra superior
- Análisis estructural
- Análisis estructural avanzado
- Análisis de Fourier
- Análisis numérico
- Análisis vectorial
- Cálculo diferencial e integral
- Cálculo superior
- Ciencias de las computadoras
- Ciencias físicas
- Circuitos eléctricos
- Circuitos electrónicos
- Contabilidad I
- Contabilidad II
- Contabilidad intermedia I (en prensa)
- Contabilidad intermedia II (en prensa)
- Contabilidad de costos (en prensa)
- Dinámica de los fluidos
- Dinámica de Lagrange
- Diseño de concreto armado
- Diseño de máquinas
- Economía internacional (en prensa)
- Ecuaciones básicas de las ciencias de la ingeniería
- Ecuaciones diferenciales
- Ecuaciones diferenciales modernas
- Espacio de estado y sistema lineal
- Estadística
- Física general
- Fundamentos de matemáticas superiores
- Genética
- Geometría analítica
- Geometría descriptiva
- Geometría diferencial
- Geometría plana
- Geometría proyectiva
- Líneas de trasmisión
- Macroeconomía
- Manual de fórmulas matemáticas
- Matemáticas aplicadas a ciencia y tecnología
- Matemáticas financieras
- Matemáticas finitas
- Matemáticas superiores para ingenieros y científicos
- Materiales de construcción
- Matrices
- Mecánica de los fluidos e hidráulica
- Mecánica del medio continuo
- Mecánica técnica
- Mecánica teórica
- Métodos cuantitativos para administración de empresas (en prensa)
- Macroeconomía
- Microeconomía
- Óptica
- Probabilidad
- Probabilidad y estadística con cálculo
- Programación BASIC
- Química física (en prensa)
- Química general
- Resistencia de materiales
- Retroalimentación y sistemas de control
- Teoría de conjuntos y temas afines
- Teoría de grupos
- Termodinámica
- Topología
- Trasformadas de Laplace
- Trigonometría
- Variables complejas
- Variables reales
- Vibraciones mecánicas

0-07-090922-9